《瀚海之巅》2022-2023 第 4 期 · 征解

中国科大数学科学学院团委　《瀚海之巅》项目组

日期：2023 年 7 月 29 日

1. 存在首一非 0 整系数多项式 f 使得 $f(\alpha)=0$, 且满足 $g(\alpha)=0$ 的次数最低的非 0 整系数多项式所有复根模长均为 1, 证明: α 为单位根.

供题人: 孙之棋

2. (从范畴论角度看集合的映射) 我们所熟知的集合间的单射与满射的定义是依赖于元素的, 而范畴论提供了一种单纯从映射的角度去认识单射与满射的方式.

   设 A, B 为集合, 我们称映射 $f\colon A\to B$ 为**单同态 (Monomorphism)**, 若对任意集合 Z 与任意 $\alpha,\alpha'\colon Z\to A$, 有
   $$f\circ\alpha=f\circ\alpha'\Rightarrow\alpha=\alpha'.$$
   称映射 f 为**满同态 (Epimorphism)**, 若对任意集合 Z 与任意 $\beta,\beta'\colon B\to Z$, 有
   $$\beta\circ f=\beta'\circ f\Rightarrow\beta=\beta'.$$
   试证明:
   (1) 单同态等价于单射;
   (2) 满同态等价于满射.

供题人: 徐思懿

3. (关系生成的等价关系) 我们称 $R\subset X\times X$ 为集合 X 上的**关系**, 而**等价关系**指的是满足以下三条性质的关系:

   自反性 $\forall x\in X,\ (x,x)\in R$;

   对称性 $\forall x,y\in X,\ (x,y)\in R\Leftrightarrow(y,x)\in R$;

   传递性 $\forall x,y,z\in X,\ (x,y)\in R,\ (y,z)\in R\Rightarrow(x,z)\in R$.

   简便起见, 如果 $\sim$ 是 X 上的关系, 我们用 $x\sim y$ 表示 $(x,y)\in\sim$. 而所谓**由 R 生成的等价关系**指的是所有包含 R 的等价关系的交.

   (1) 设 $<$ 为 X 上的完全的严格偏序关系, 即满足:

   非自反性 $\forall x\in X,\ x\not<x$;

   传递性 $\forall x,y,z\in X,\ x<y,\ y<z\Rightarrow x<z$;

   完全性 $\forall x,y\in X$, 必有 $x<y$ 或 $x=y$ 或 $y<x$.

   求 $<$ 生成的等价关系.

(2) 我们已经知道集合 X 上的等价关系 $\sim$ 自然诱导了商集 $X/\sim$, 即所有等价类的集合, 进一步可以得到自然投影 $\pi\colon X \to X/\sim,\ x \mapsto [x]$. 现在设 X, Y 为两个集合, $A \subset Y$, 存在映射 $f\colon A \to X$. 那么关系 $(a,0) \sim (f(a),1),\ \forall\, a \in A$ 在 $X \sqcup Y := \{(x,0),(y,1) \mid x \in X,\ y \in Y\}$ 上生成了一个等价关系, 试描述这个等价关系及 $X \sqcup Y$ 在此等价关系下的商集 $X \cup_f Y$.

特别地, 如果 X, Y 为拓扑空间, A 为 Y 的闭子集, 且 $f\colon A \to X$ 为连续映射, 则商空间 $X \cup_f Y$ 称为**黏着空间 (Adjunction Space)**, f 称为**贴映射 (Attaching map)**, 称 Y 沿 f 黏合到 X.

供题人: 徐思懿

4. 若 $a_k > 0, k \in \mathbb{N}_+,\ s \geq r > 0$, 试证 S_1 收敛可推出 S_2 收敛, 其中

$$S_1 = \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{a_k(\mathrm{lnln}a_k)^r}, S_2 = \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{a_k(\mathrm{lnln}k)^s}.$$

供题人: 谢鸿瑞

5. 对于 $x > 0$, 我们设 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

(a) 对于 $u_n = (-1)^n f(n)$, 考虑 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的收敛性;

(b) 对于 $v_n = \int_{n-1}^{n} f(x)\mathrm{d}x - f(n)$, 考虑 $\sum_{n=2}^{\infty} v_n$ 的收敛性;

(c) 我们承认 $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1), n \to \infty$. 考虑 $2\sum_{k=1}^{n} f(2k) - \sum_{k=1}^{2n} f(k)$, 并由此导出 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n f(n)$ 关于 γ 的表达式.

供题人： 罗云杰

6. (虽然看起来是复分析但实际上其实是数分题?!) 非常值多项式 $P \in \mathbb{C}[X]$.

(a)$\forall\, a \in \mathbb{C}, \forall\, \rho > 0, \exists\, b \in \mathbb{C}, |b-a| < \rho$ 使得 $|P(b)| > |P(a)|$.

(b) 设 $r > 0$, 求证 : $\forall\, z_0 \in \mathbb{C}, |z_0| < r, |P(z_0)| < \sup_{|z|=r} |P(z)|$.

供题人: 罗云杰

7. p 为素数, 计算 $GL_n(\mathbb{F}_p)$ 的 Sylow-p 子群个数.

供题人: 孙之棋

8. 我们令 p 为质数, $b_1, b_2, \cdots, b_{p-1}$ 为模 p 缩系, 并取 $a_1, a_2, \cdots, a_{p-1}$ 使得 $p | a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_{p-1}b_{p-1}$, 试证明存在 $1, 2, ..., p-1$ 的置换 $i_1, i_2, ..., i_{p-1}$, 使得对于矩阵 M,$(m_{jk}) = a_{i_{k-j}}$, $k-j$ 为模 $p-1$ 意义下 (模为 0 时算作 $p-1$), 有 $p|\det(M)$.

供题人: 谢鸿瑞

9. (这题真的很基础) 考虑 $U \subseteq \mathbb{R}^n$ 为开集, $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n) \in U, u \in C^2(U). \Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ 称为 **Laplace 算子**, 满足 **Laplace 方程** (亦称**位势方程**)

$$\Delta u = 0 \tag{1}$$

的函数 u 称为**调和函数**.

Poisson 方程为:

$$-\Delta u = f, \tag{2}$$

其中 $f\colon U \to \mathbb{R}$ 已给定.

(a) 验证 Laplace 方程是**旋转不变量 (rotation invariant)**, 即: 若 u 是调和函数, O 是 n 阶正交方阵, $\Delta u = 0, O \in \mathcal{O}(n, \mathbb{R})$, 则 $u_O(\boldsymbol{x}) := u(O\boldsymbol{x})$ 也为调和函数, 即 $\Delta u_O = 0$;

(b) 记 $\mu_n := \mu(B^n(\boldsymbol{x}, 1)) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(1 + \frac{n}{2}\right)}$ 为 n 维单位球的体积, 验证

$$\Phi(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \ln \|\boldsymbol{x}\|, & n = 2, \\ \frac{1}{n(n-2)\mu_n} \frac{1}{\|\boldsymbol{x}\|^{n-2}}, & n \geqslant 3 \end{cases} (\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n - \{\boldsymbol{0}\}) \tag{3}$$

是调和函数, 它被称为 Laplace 方程的**基本解 (fundamental solution)**;

(c) [**平均值性质 (mean value property)**] 证明:

$$\begin{aligned} \Delta u = 0 \iff u(\boldsymbol{x}) &= \frac{1}{n\mu_n r^{n-1}} \int_{S^{n-1}(\boldsymbol{x},r)} u \,\mathrm{d}S, \forall S^{n-1}(\boldsymbol{x}, r) \subseteq U \\ \iff u(\boldsymbol{x}) &= \frac{1}{\mu_n r^n} \int_{B^n(\boldsymbol{x},r)} u \,\mathrm{d}\mu, \forall B^n(\boldsymbol{x}, r) \subseteq U; \end{aligned} \tag{4}$$

(Hint: $n\mu_n = \mu(S^{n-1}(\boldsymbol{x}, 1))$ 为 $n-1$ 维单位球面的面积)

(d) [**最大值原理 (maximum principle)**] 设 U 有界连通, $u \in C^2(U) \cap C\left(\overline{U}\right)$ 调和. 若 $\exists \boldsymbol{x}_0 \in U$ s.t. $u(\boldsymbol{x}_0) = \max\limits_{\overline{U}} u$, 则 u 在 U 上常值;

(e) [**确定边界的 Poisson 方程解的唯一性**] 证明: 对于 $f \in C(U), g \in C(\partial U)$, 方程

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \boldsymbol{x} \in U, \\ u = g, & \boldsymbol{x} \in \partial U \end{cases} \tag{5}$$

的解 $u \in C^2(U) \cap C\left(\overline{U}\right)$ 至多唯一.

供题人: 张哲琛

10. (二次互反律的 (1/196+ 个) 证明)[**二次互反律**] 对于不同的奇素数 p, q,

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}, \tag{6}$$

其中 $\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 1, & a\text{为模}\, p\, \text{二次剩余}, \\ -1, & a\text{为模}\, p\, \text{二次非剩余} \end{cases}$ (此处$p \nmid a$) 为 **Legendre 符号**.

(a) $\left[\textbf{Euler 判别准则}\right]$ 证明: 在 $\mathbb{F}_p$ 中, $\forall p \nmid a, \left(\dfrac{a}{p}\right) = a^{\frac{p-1}{2}}$, 因此 $\left(\dfrac{\cdot}{p}\right)$ 是乘性的;

接下来我们考虑有限域 $\mathbb{F}_{q^{p-1}}$.

(b) 证明: $\mathbb{F}_{q^{p-1}}^{\times}$ 中存在 p 阶元素 ζ;

(c) **[(Frobenius) 自同构]** 验证 $\sigma\colon \mathbb{F}_{q^{p-1}} \to \mathbb{F}_{q^{p-1}}, g \mapsto g^q$ 是同构;

引入 **Gauss 和**

$$G \coloneqq \sum_{i=1}^{p-1} \left(\frac{i}{p}\right) \zeta^i. \tag{7}$$

下面我们推导 G^q 的两个不同的表达式完成二次互反律的证明.

(d) 证明 $G^q = \left(\dfrac{q}{p}\right) G, G^2 = (-1)^{\frac{p-1}{2}} p$;

(e) 结合 (d), 根据 $G^q = G \cdot (G^2)^{\frac{q-1}{2}}$ 证明二次互反律.

供题人: 张哲琛

注: 第 5 期供题与第 4 期征解的截止日期是 2023 年 9 月 1 日, 欢迎大家踊跃投稿. 有关投稿事宜请参见“项目组介绍 + 投稿须知”.

在此基础上, 本期征解部分的投稿我们允许投稿人使用自己的纸质解答拍照扫描后生成的 pdf 文件投稿, 其中纸质解答上务必附上自己的姓名、学号 (非科大学生提供学校)、征解的期号和题号, 同时保证字迹清晰, 拍照清晰. 其他要求参见上述投稿须知. 供题部分的投稿须按照上述投稿须知中的要求.