《瀚海之巅》2022-2023 第 3 期 · 征解

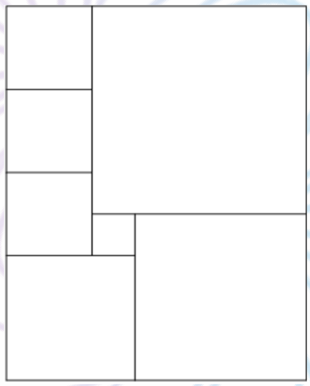
中国科大数学科学学院团委　《瀚海之巅》项目组

日期：2023 年 3 月 31 日

1. 设 $f(x):[0,1]\to\mathbb{R}$，记命题 p：“$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上 a.e. 连续”，命题 q：“存在在 $[0,1]$ 上处处连续的 $g:[0,1]\to\mathbb{R}$，$f(x)=g(x)$，a.e. $x\in[0,1]$”，请判断“$p\Rightarrow q$”与“$q\Rightarrow p$”是否成立，并给出理由

供题人：刁睿明

2. 若边长为 a,b 的矩形可以分切为一些边长为 $x_1,x_2,\ldots,x_n$ 的正方形.



求证: $x_i/a, x_i/b(i=1,2,\ldots,n)$ 都是有理数.

供题人: 孙之棋

3. (1) 利用第二期征解中的 Wallis 引理

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\cdot8\cdot8\cdots}{1\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\cdot7\cdot9\cdots},$$

求证:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n(x)\,\mathrm{d}\,x=\sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

(2) 利用上一问计算 I_n 的结果, 求证:

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}.$$

供题人: 刘景寒

4. (球极投影的有趣结论) 设 $S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ 为 $\mathbb{R}^3$ 中的单位球面, $N = (0, 0, 1)$ 为北极点, Λ 为落在球面上的圆周. 证明: 若 $N \in \Lambda$, 则 Λ 在球极投影下的像为直线; 若 $N \notin \Lambda$, 则 Λ 在球极投影下的像为圆.

供题人: 徐思懿

5. 在 $\mathbb{R}^2$ 中, 若 a 为有理数, 则 $B_a = \{a\} \times (0, 1]$, 若 a 为无理数, 则 $B_a = \{a\} \times [-1, 0]$. 我们设 $B = \bigcup_{a \in \mathbb{R}} B_a$, 求证: B 是连通集.

供题人: 罗云杰

6. $\mathbb{C}$ 为复数域, f, g 为 $\mathbb{C}[x, y]$ 上二互素多项式. 求证: $\mathbb{C}[x, y]/(f, g)$ 为 $\mathbb{C}$ 上有限维线性空间.

供题人: 孙之棋

7. 当人们尝试推广面积、体积等概念时, 人们曾经试图找到一个函数 $\mu\colon \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ 使它具有以下性质:

   i. 若 $E_1, E_2, \cdots \subset \mathbb{R}^n$ 为一列有限或无限的不交集, 则
   $$\mu(E_1 \cup E_2 \cup \cdots) = \mu(E_1) + \mu(E_2) + \cdots .$$
   ii. 若 E 与 F 全等 (即, E 可以通过平移、旋转与反射变换为 F), 则 $\mu(E) = \mu(F)$.

   iii. $\mu(Q) = 1$, 这里 Q 为单位立方体:
   $$Q = \{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 \le x_j < 1,\ j = 1, \cdots, n\}.$$
   但很不幸, 这些条件是互相矛盾的. 本题向你解释当 $n = 1$ 时矛盾在何处, 过程可以轻易地拓展到高维情形.

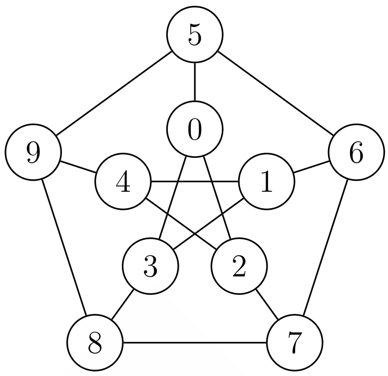
   考虑 $\mathbb{R}$ 的单位立方体 $[0, 1)$, 在其上定义等价关系 $x \sim y :\Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$, 并设 N 为恰好包含每个等价类中的一个元素的集合, 即该等价关系的完全代表元系 (N 的构造依赖于选择公理). 接下来令 $R = \mathbb{Q} \cap [0, 1)$, 并对每个 $r \in R$, 令
   $$N_r = \{x + r \mid x \in N \cap [0, 1 - r)\} \cup \{x + r - 1 \mid x \in N \cap [1 - r, 1)\}.$$
   (1) 证明 $N_r \subset [0, 1)$, 且每个 $x \in [0, 1)$ 恰属于一个 N_r.

   (2) 证明满足 (i)、(ii)、(iii) 的 μ 不存在.

   (3) 证明一般的情形: 满足 (i)、(ii)、(iii) 的 $\mu\colon \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ 不存在.

供题人: 徐思懿

8. 考虑集合 $A = A^0 \sqcup A^1 \sqcup A^2$, 其中 $A^0 = \{0, 1, \ldots, 9\}$, $A^1 = \{\{0, 2\}, \{2, 4\}, \{4, 1\}, \{1, 3\}, \{3, 0\}, \{0, 5\}, \{1, 6\}, \{2, 7\}, \{3, 8\}, \{4, 9\}, \{9, 5\}, \{5, 6\}, \{6, 7\}, \{7, 8\}, \{8, 9\}\}$, $A^2 = \{\{0, 1, 2, 3, 4\}, \{0, 2, 5, 6, 7\}, \{2, 4, 7, 8, 9\}, \{1, 4, 5, 6, 9\}, \{1, 3, 6, 7, 8\}, \{0, 3, 5, 8, 9\}\}$, 从而以 A^0 为点, A^1 为边, 我们能得到以下的 Petersen 图:



$P = \{A, \subseteq\}$ 构成偏序集 (事实上, 构成**抽象多面体**). 试求 P 的自同构群.

供题人: 曾相如

9. 试按照以下步骤证明 $R = \mathbb{Z}[\omega]$ 是非欧几里得主理想整环，其中 $\omega = \frac{-1+\mathrm{i}\sqrt{19}}{2}$。

   (a) 验证 $\omega^2 + \omega + 5 = 0$，且 $\eta\colon R \to \mathbb{N}, x \mapsto x\bar{x} = |x|^2$ 是良定义的乘性函数;

   (b) 证明 R 中的单位 u 有且仅有 ± 1（提示：$\eta(u) = 1$）;

   (c) 假设 R 上存在一个欧几里得函数 f，取 $x_0 \in R$ 使 $f(x_0) = \min\{f(x)\colon 0 \neq x \in R, x$ 非单位$\}$, 证明 $S = R/x_0R$ 恰由 R 中的 0 和单位组成。从而 card $S = 2$ 或 3，证明此时 $x^2 + x + 5 = 0$ 在 S 中无解得到矛盾，并由此推出 R 不是欧几里得整环;

接下来对于 R 中任意一个非零理想 I，我们考虑 I 中使 $\eta(x)$ 达到最小正值的（非零）元素 x_1，则显然有 $x_1R \subseteq I$，只需证明 $I \subseteq x_1R$，即证 $J = x_1^{-1}I \subseteq R$，其中视 J 为 $\mathbb{C}$ 的 R-子模。(这里我们其实是用 η 来替代欧几里得函数，不过它并不满足欧几里得函数的所有性质)

   (d) 证明对于 $x \in J, y \in R$，若 $|x - y|^2 < 1$，则 $x \in R$。由此得到 $\forall z \in J - R, m \in \mathbb{Z}, \left|\operatorname{Im} z - m\frac{\sqrt{19}}{2}\right| \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$;

   (e) 证明若 $J - R \neq \varnothing$, 则 $\exists z_0 \in J - R$ 满足 $\frac{\sqrt{3}}{2} \leqslant \operatorname{Im} z_0 \leqslant \frac{\sqrt{19}-\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} \leqslant \operatorname{Re} z_0 < \frac{1}{2}$, 结合 (d) 验证 $2z_0 \in R$，证明此时有 $\frac{\omega\bar{\omega}}{2} = \frac{5}{2} \in J$ 并导出矛盾。因此 R 是主理想整环。

供题人: 张哲琛

10. 已知一列标准高斯 (正态) 随机变量 $Z_1, \cdots, Z_n$ 独立同分布.

    (1) 记 $S_n = Z_1^2 + \cdots Z_n^2$, 当 $\lambda < \frac{1}{2}$ 时, 计算 $\mathbb{E}[\mathrm{e}^{\lambda S_n}]$, 并证明

$$\mathbb{P}((1-\varepsilon)^2 n \leq S_n \leq (1+\varepsilon)^2 n) \geq 1 - 2\mathrm{e}^{-n\varepsilon^2}.$$

(2) 定义 $A_n = \max\limits_{1\le i\le n} |Z_i|, B_n = \max\limits_{1\le i\le n} Z_i$. 证明:

(2a) 当 $t \to +\infty$ 时, 有

$$\mathbb{P}(Z_1 > t) = t^{-1}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} + o(1);$$

(2b) 当 $n \to +\infty$ 时, 有

$$\mathbb{E}[A_n] = \sqrt{2\log n} + o(1), \quad \mathbb{E}[B_n] = \sqrt{2\log n} + o(1).$$

供题人: 宗语轩

11. 已知一列独立同分布的有界随机变量 $X_1, \cdots, X_n$. 记 $h(t_1, \cdots, t_r)$ 为 r 元对称多项式,

$$U = \binom{n}{r}^{-1} \sum_{1\le i_1<\cdots<i_r\le n} h(X_{i_1}, \cdots, X_{i_r}), \quad V = U - \mathbb{E}[U].$$

本题的目的是研究 V 的极限分布。

(1) 记 $X_a^b = (X_a, X_{a+1}\ldots, X_b)$, $\zeta_c = \operatorname{Var}\left(\mathrm{E}\left[h\left(X_1^c, X_{c+1}^r\right) \mid X_1^c\right]\right)$. 证明:当 $n \to \infty$ 时, $n\operatorname{Var}(V) \to r^2\zeta_1$.

(2) 记 $\hat{V} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathrm{E}\left[V \mid X_i\right]$, 证明: $n \to \infty$ 时, $\sqrt{n}\hat{V}$ 依分布收敛于 $N(0, r^2\zeta_1)$.

(3) 证明: 当 $n \to \infty$ 时, $\sqrt{n}V$ 依分布收敛于 $N(0, r^2\zeta_1)$.

(4) 在 (3) 中, 若 $\zeta_1 = 0$, 则 $\sqrt{n}V$ 依分布收敛于 0, 这就说明 V 的阶比 $O(1/\sqrt{n})$ 小。若已知 $\zeta_1 = \cdots = \zeta_k = 0$, $\zeta_{k+1} \neq 0$, 则此时该如何确定 V 的阶呢?(这里所谓 U 的阶是 $O(1/n^x)$ 是指: 当 n 趋于无穷时, n^xU 依分布收敛于一个非常值的随机变量.)

供题人: 罗迟

12. 在一个量子系统中, 考虑哈密顿量:

$$H_0 = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2x_1^2 + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2x_2^2,$$

这是两个解耦的谐振子的哈密顿量.

(1) 计算 H_0 的本征态和本征值 (能量本征态可以标记为 $|n_1, n_2\rangle$).

(2) 假设两个谐振子的产生和湮灭算符为 $a_i^\dagger, a_i, i = 1, 2$. 定义以下算符

$$J_+ = a_1^\dagger a_2, \quad J_- = a_2^\dagger a_1, \quad J_z = \frac{1}{2}\left(a_1^\dagger a_1 - a_2^\dagger a_2\right).$$

证明: $[J_z, J_\pm] = \pm J_\pm, \quad [J_+, J_-] = 2J_z$.

(3) 考虑扰动的哈密顿量 (λ 很小)

$$H = H_0 + \lambda x_1^2 p_2^2.$$

计算能级 $n_1 + n_2 = 2$ 处能量的一阶修正.

供题人: 王乐达

13. 试证明:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{2^{n+1}\pi i}\oint_{\Omega}\frac{(z^2-1)^n}{(z-x)^{n+1}}\,\mathrm{d}z,$$

并且当 $t<\dfrac{x-\sqrt{1-x^2}}{2}$ 是正有理数时, 对任意给定的 N,

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ nt\in\mathbb{Z}}}\{(\frac{1-\sqrt{1-2xt+t^2}}{t}-x-\sum_{k=0}^{nt}\frac{1}{\sqrt{n^2-2xkn+k^2}}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n\sqrt{1+t^2-2tx}})n^{2N-1}$$
$$-\sum_{j=1}^{N}\sum_{l=1}^{\infty}n^{2N-1-2j}C_j\frac{(-1)^j(l+2j)!t^l}{(2j)!l!2^{l+2j}\pi i}\oint_{\Omega}\frac{(z^2-1)^{l+2j}}{(z-x)^{2j+l}}\,\mathrm{d}z\}=0$$

其中, Ω 是绕 x 的围道. C_k 满足 $C_0=1$, $\displaystyle\sum_{j=0}^{k-1}\frac{C_j}{j!(k-j)!}=0$.

供题人: 葛霖

注: 第 4 期供题与第 3 期征解的截止日期是 2023 年 5 月 5 日, 欢迎大家踊跃投稿. 有关投稿事宜请参见 “项目组介绍 + 投稿须知” .

在此基础上, 本期征解部分的投稿我们允许投稿人使用自己的纸质解答拍照扫描后生成的 pdf 文件投稿, 其中纸质解答上务必附上自己的姓名、学号 (非科大学生提供学校)、征解的期号和题号, 同时保证字迹清晰, 拍照清晰. 其他要求参见上述投稿须知. 供题部分的投稿须按照上述投稿须知中的要求.