《瀚海之巅》2022-2023 第 3 期 · 征解解答

中国科大数学科学学院团委　《瀚海之巅》项目组

日期：2023 年 5 月 13 日

1. 设 $f(x):[0,1]\to\mathbb{R}$, 记命题 p:“$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上 a.e. 连续”, 命题 q:“存在在 $[0,1]$ 上处处连续的 $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=g(x)$, a.e. $x\in[0,1]$”, 请判断“$p\Rightarrow q$”与“$q\Rightarrow p$”是否成立, 并给出理由

供题人: 刁睿明

解. “$p\Rightarrow q$”与“$q\Rightarrow p$”均不成立, 以下给出反例.

“$p\nRightarrow q$”:（此证明我起初未想出, 受到一位群友提示才想到, 在此致谢）

考虑

$$f(x)=\begin{cases}0, & 0\le x\le \frac{1}{2}\\ 1, & \frac{1}{2}<x\le 1\end{cases}.$$

显然 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上 a.e. 连续, 但是不存在 $g(x)\in C[0,1]$ 与 $f(x)$ a.e. 相等. 若存在这样的 $g(x)$, 则对任意充分小的 $\delta>0$, 存在 $x_0\in(\frac{1}{2}-\delta,\frac{1}{2})$ 使得 $0=f(x_0)=g(x_0)$（否则 $(\frac{1}{2}-\delta,\frac{1}{2})\subset\{x\in[0,1]|f(x)\neq g(x)\}$, 与 f 与 g 几乎处处相等矛盾）, 所以根据海涅归结原理, $g(\frac{1}{2})=0$, 但同理又成立 $g(\frac{1}{2})=1$, 矛盾, 所以不存在这样的 $g(x)$, 这就是“$p\nRightarrow q$”的例子.

“$q\nRightarrow p$”: 考虑

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\cap[0,1]\\ 0, & x\notin\mathbb{Q}\text{且}x\in[0,1]\end{cases}$$

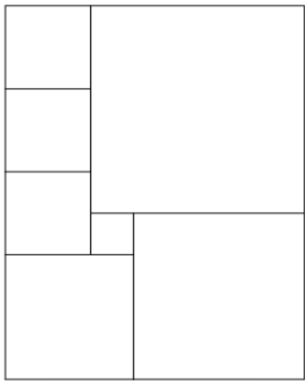
$D(x)$ 在 $[0,1]$ 上处处不连续, 但考虑 $g(x)=0, \forall\, 0\le x\le 1$, $D(x)=g(x)$ a.e. $x\in[0,1]$ □

2. 若边长为 a,b 的矩形可以分切为一些边长为 $x_1,x_2,\dots,x_n$ 的正方形.
求证: $x_i/a, x_i/b (i=1,2,\dots,n)$ 都是有理数.

供题人: 孙之棋

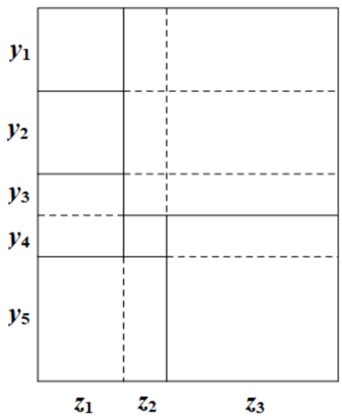
证明. 选取 $\mathbb{R}$ 作为 $\mathbb{Q}$ 上的线性空间的一组基 $\{r_i: i\in I\}$, 其中, $r_0\in\mathbb{Q}$.
定义 $\mathbb{R}$ 上的线性映射

$$\varphi\left(\sum_{i\in I}t_ir_i\right)=\sum_{i\in I}t_ir_i-t_0r_0.$$



于是, $x \in \mathbb{Q}$ 当且仅当 $\varphi(x) = 0$.

如图所示, 我们可以将图形分割为一些小矩形, 使得每个小矩形均属于某个正方形. 矩形侧边长为 $y_1, y_2, \ldots, y_s$, 底边长为 $z_1, z_2, \ldots, z_t$. 不妨设 $a \in \mathbb{Q}$, 于是



$$
\begin{aligned}
0 = \varphi(a)\varphi(b) &= \varphi(\sum_{i=1}^{s} y_i)\varphi(\sum_{j=1}^{t} z_j) \\
&= \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t} \varphi(y_i)\varphi(z_j) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{y_i \times z_j \subset x_k \times x_k} \varphi(y_i)\varphi(z_j) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \varphi(x_k)^2 \geq 0
\end{aligned}
$$

所以 $\varphi(x_i) = 0,\ x_i \in \mathbb{Q}$. $\square$

3.

(1) 利用第二期征解中的 Wallis 引理

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \cdots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \cdots},$$

求证:

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\,\mathrm{d}\,x = \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

(2) 利用上一问计算 I_n 的结果, 求证:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}\,x = \sqrt{\pi}.$$

供题人: 刘景寒

证明. (1) 证明: 基础地, 作 $t = \frac{\pi}{2} - x$ 的变量替换,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)\,\mathrm{d}\,x = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^n\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\mathrm{d}\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,\mathrm{d}\,t \triangleq I_n.$$

基础地, 对于此 n 次方类型的问题, 利用分部积分公式, 采用递推的办法.

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\,\mathrm{d}\,x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1}(x)\,\mathrm{d}(-\cos(x)) \\
&= -\cos(x)\sin^{n-1}(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\,\mathrm{d}\sin^{n-1}(x) \\
&= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}(x)\cos^2(x)\,\mathrm{d}\,x \\
&= (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n \\
\Rightarrow I_n &= \frac{n-1}{n} I_{n-2}.
\end{aligned}$$

初值

$$I_0 = \frac{\pi}{2}, \qquad I_1 = 1,$$

所以

$$I_{2k} = \frac{2k-1}{2k}\cdot\frac{2k-3}{2k-2}\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\cdot\frac{\pi}{2}, \quad n = 2k,$$

$$I_{2k+1} = \frac{2k}{2k+1}\cdot\frac{2k-2}{2k-1}\cdots\frac{2}{3}\cdot 1 = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}, \quad n = 2k+1.$$

下面我们需要用到 Wallis 公式, Wallis 公式的证明在第二期征解中也有提及.$\sqrt{\pi}$ 的形式也与 Wallis 公式联系比较紧密.

引理: Wallis 公式

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot 8\cdot 8\cdots}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 7\cdot 9\cdots}.$$

引理证明: 因为

$$\sin^{2n+1}(x) < \sin^{2n}(x) < \sin^{2n-1}(x) \quad 0 < x < \frac{\pi}{2},$$

所以同样地

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}(x)\,\mathrm{d}\,x < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(x)\,\mathrm{d}\,x < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1}(x)\,\mathrm{d}\,x.$$

利用上述计算结果就有

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} < \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2} < \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!},$$

所以就有

$$\frac{1}{2n+1}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 < \frac{\pi}{2} < \frac{1}{2n}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2.$$

又因为

$$\begin{aligned}0 &\leqslant \frac{1}{2n}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 - \frac{1}{2n+1}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\\ &= \frac{1}{2n}\cdot\frac{1}{2n+1}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\\ &< \frac{1}{2n}\cdot\frac{\pi}{2},\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 = \frac{\pi}{2}$$

展开就得到

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot 8\cdot 8\cdots}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 7\cdot 9\cdots}.$$

回到原题

$$\frac{1}{2n}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 = \frac{(2n+1)^2}{2n}\left[\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\right]^2 = \frac{2n+1}{2n}\cdot(2n+1)I_{2n+1}^2,$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}(2n+1)I_{2n+1}^2 = \frac{\pi}{2}.$$

又因

$$I_{2n+1} < I_{2n} < I_{2n-1},$$

所以就有

$$(2n+1)I_{2n+1}^2 < \frac{2n+1}{2n}\cdot(2n)I_{2n}^2 < \frac{2n+1}{2n-1}\cdot(2n-1)I_{2n-1}^2,$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}(2n)I_{2n}^2 = \frac{\pi}{2}.$$

因此对于任一正整数 n 都有

$$\lim_{n\to\infty} nI_n^2 = \frac{\pi}{2},$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n(x)\,\mathrm{d}\,x = \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

(2) 经典且高效的方法是将该积分转化为一个二重积分进行计算, 或者利用 Gamma 函数进行运算. 这里我们采用新的方式, 利用 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n(x)\,\mathrm{d}\,x$.

首先我们要配凑出 I_n.

$$(1+x)e^{-x} \leqslant 1,$$

当且仅当 $x=1$ 时取等号. 故

$$1-x^2 \leqslant e^{-x^2} \leqslant \frac{1}{1+x^2} \quad \forall\, x \in \mathbb{R},$$

回到原题, 有

$$\left(1-x^2\right)^n < e^{-nx^2} \quad 0<x<1,$$

以及

$$e^{-nx^2} < \frac{1}{\left(1+x^2\right)^n}, \quad 0<x<+\infty.$$

所以我们就有

$$\int_0^1 \left(1-x^2\right)^n \mathrm{d}\, x < \int_0^1 e^{-nx^2} \mathrm{d}\, x < \int_0^\infty e^{-nx^2} \mathrm{d}\, x < \int_0^\infty \frac{1}{\left(1+x^2\right)^n} \mathrm{d}\, x.$$

做变量替换 $x=\cos(t)$ 有

$$\int_0^1 \left(1-x^2\right)^n \mathrm{d}\, x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}(t)\, \mathrm{d}\, t,$$

又考虑变量替换 $t=\sqrt{n}x$ 有

$$\int_0^\infty e^{-nx^2} \mathrm{d}\, x = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \int_0^\infty e^{-t^2} \mathrm{d}\, t,$$

最后考虑变量替换 $x=\tan(t)$ 有

$$\int_0^\infty \frac{1}{\left(1+x^2\right)^n} \mathrm{d}\, x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2}(t)\, \mathrm{d}\, t.$$

与第一问一样, 记

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\, \mathrm{d}\, x,$$

那么我们就有

$$\sqrt{n} I_{2n+1} < \int_0^\infty e^{-x^2} \mathrm{d}\, x < \sqrt{n} I_{2n-2}.$$

由第一题结论

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} I_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

因此就有

$$\sqrt{\frac{n}{2n+1}} \cdot \sqrt{2n+1} I_{2n+1} < \int_0^\infty e^{-x^2} \mathrm{d}\, x < \sqrt{\frac{n}{2n-2}} \cdot \sqrt{2n-2} I_{2n-2}.$$

两边同时取极限, 得到

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \mathrm{d}\, x = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

所以最终

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \mathrm{d}\, x = \sqrt{\pi}$$

$\square$

4. （球极投影的有趣结论）设 $S^2=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 \mid x_1^2+x_2^2+x_3^2=1\}$ 为 $\mathbb{R}^3$ 中的单位球面, $N=(0,0,1)$ 为北极点, Λ 为落在球面上的圆周. 证明: 若 $N\in\Lambda$, 则 Λ 在球极投影下的像为直线；若 $N\notin\Lambda$, 则 Λ 在球极投影下的像为圆.

供题人: 徐思懿

证明. 不妨设 Λ 为平面 $\Pi: ax_1+bx_2+cx_3=1$ 与 S^2 的交线. 若 $N\in\Lambda\subset\Pi$, 则 Λ 在球极投影下的像必然位于 Π 与 x_1Ox_2 平面的交线上, 且容易发现像恰为交线.

对于 $N\notin\Lambda$ 的情形, 我们提供两种方法:

(解法一)

考虑 Λ 上任意一点 (x_1,x_2,x_3), 则 $\begin{cases}ax_1+bx_2+cx_3=1,\\ x_1^2+x_2^2+x_3^2=1\end{cases}$. 其像为 $(\frac{x_1}{1-x_3},\frac{x_2}{1-x_3},0)$.

令 $\begin{cases}x=\frac{x_1}{1-x_3},\\ y=\frac{x_2}{1-x_3}\end{cases}$, 则 $\begin{cases}x_1=x(1-x_3),\\ x_2=y(1-x_3)\end{cases}$. 代入平面与球面方程得:

$$ax(1-x_3)+by(1-x_3)+cx_3=1,$$
$$x^2(1-x_3)^2+y^2(1-x_3)^2+x^3=1.$$

由平面方程, $x_3=\frac{1-ax-by}{c-ax-by}$, $1-x_3=\frac{c-1}{c-ax-by}$. 于是

$$\begin{aligned}&x^2\frac{(c-1)^2}{(c-ax-by)^2}+y^2\frac{(c-1)^2}{(c-ax-by)^2}+\frac{(1-ax-by)^2}{(c-ax-by)^2}=1\\ \Rightarrow&(c-1)^2x^2+(c-1)^2y^2+(1-ax-by)^2=(c-ax-by)^2\\ \Rightarrow&(c-1)^2x^2+(c-1)^2y^2+2a(c-1)x+2b(c-1)y=c^2-1.\end{aligned}$$

由于 $N\notin\Lambda, c\neq 1$, 于是两边除以 $(c-1)^2$ 得

$$\begin{aligned}&x^2+y^2+2\frac{a}{c-1}x+2\frac{b}{c-1}y=\frac{c+1}{c-1}\\ \Rightarrow&(x+\frac{a}{c-1})^2+(y+\frac{b}{c-1})^2=\frac{(c+1)^2+a^2+b^2}{(c-1)^2}.\end{aligned}$$

这是圆的方程.

(解法二)

我们考虑在球面外放置一个圆锥面, 使球内切圆锥于 Λ. 记圆锥顶点为 P, 那么考虑过 P 的水平面 α, 以及球极投影在该水平面上的投影. 根据位似原理, 如果该水平面上的投影为圆, 那么在 x_1Ox_2 平面上投影也是圆. 于是我们考虑该水平面.

考虑 Λ 上任一点 Q, 设它在 α 上的投影为 Q', 那么我们只需证明 PQ' 为常数. 我们延长 PQ (注意, 这是圆锥的母线, 所以与球面相切) 使得它与 N 所在的水平面相交, 交点为 R, 那么 NR 与球面相切, RQ 与球面相切, 从而 $NR=RQ$, 且 $\triangle RNQ\sim\triangle PQ'Q$ (注意 NR 与 PQ' 平行, 因为四点共面), 于是 $PQ'=PQ$, 而 PQ 长为 Λ 半径, 故为常数. □

5. 在 $\mathbb{R}^2$ 中, 若 a 为有理数, 则 $B_a=\{a\}\times(0,1]$, 若 a 为无理数, 则 $B_a=\{a\}\times[-1,0]$. 我们设 $B=\bigcup_{a\in\mathbb{R}}B_a$, 求证: B 是连通集.

供题人: 罗云杰

证明. B 是连通集等价于所有连续映射 $f\colon B \to \{0,1\}$ 是常值映射.

任取连续映射 $f\colon B \to \{0,1\}$, 我们断言它是常值映射. 注意到 f 限制在 B_a 上一定是常值, 因为 B_a 是连通集.

我们定义 $g\colon \mathbb{R} \to \{0,1\}$, 其中 $g(x)$ 的取值为 f 在 B_x 上的取值. 我们将说明 g 是局部常值映射.

若 $a \notin \mathbb{Q}$, 我们有 $(a,0) \in B$, 由 f 连续而且 $f(a,0)$ 是 $\{0,1\}$ 的开集, 故 $f^{-1}(\{f(a,0)\})$ 是 B 的开集. 则存在 $\varepsilon > 0$ 使得任意 $(x,y) \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \times (-\varepsilon, \varepsilon) \cap B$, 我们有 $f(x,y) = f(a,0)$. 然后对于 $x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, 我们有 $g(x) = g(a)$. 因为若 $x \notin \mathbb{Q}$, $g(x) = f(x,0) = f(a,0) = g(a)$; 若 $x \in \mathbb{Q}$, $g(x) = f(x, \frac{\varepsilon}{2}) = f(a,0) = g(a)$. 故 g 在无理点的邻域中是局部常值的.

若 $a \in \mathbb{Q}$, 设 $b \in (0,1]$, 则 f 在 (a,b) 处连续, 故存在 $\varepsilon > 0$ 使得对于任意 $x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap \mathbb{Q}$, $g(x) = f(x,b) = f(a,b) = g(a)$. 而对于 $x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$, 可以用一列 (x_n) 去逼近 x, 结合 f 的连续性, 同样有 $g(x) = g(a)$. 故 g 在有理点的邻域中是局部常值的.

综合可得, g 在 $\mathbb{R}$ 上是局部常值的. 由于 $\mathbb{R}$ 是连通的, 故 g 在 $\mathbb{R}$ 上是常值, 故 f 是常值映射. $\square$

6. $\mathbb{C}$ 为复数域, f, g 为 $\mathbb{C}[x,y]$ 上二互素多项式. 求证: $\mathbb{C}[x,y]/(f,g)$ 为 $\mathbb{C}$ 上有限维线性空间.

供题人: 孙之棋

证明. 用 $\mathbb{D}[x]$ 表示 $\mathbb{C}[x]$ 的商域. 于是, f, g 均可看做 $\mathbb{D}[x][y]$ 中元素. 易证 f, g 在 $\mathbb{D}[x][y]$ 中互素.

由 Bezóut 定理:

$$\text{存在 } p, q \in \mathbb{D}[x][y], \text{使得 } pf + qg = 1.$$

即

$$\text{存在 } p_1, q_1 \in \mathbb{C}[x,y],\ r_1 \in \mathbb{C}[x] \text{ 使得 } p_1 f + q_1 g = r_1,$$

同理

$$\text{存在 } f_2, g_2 \in \mathbb{C}[x,y],\ r_2 \in \mathbb{C}[y] \text{ 使得 } p_2 f + q_2 g = r_2,$$

必有 $r_1, r_2 \in (f,g)$. 我们用 r_1, r_2 对 $\mathbb{C}[x,y]$ 中任意元素 h 进行欧式算法, 可以使得 $h + (f,g) = h' + (f,g)$, 且 h' 中关于 x 的最高次数 $\leq \deg r_1 - 1$, 关于 y 的最高次数 $\leq \deg r_2 - 1$. 于是

$$\{1 + (f,g), x + (f,g), \ldots, x^{\deg r_1 - 1} + (f,g), \ldots, x^{\deg r_1 - 1} y^{\deg r_2 - 1} + (f,g)\}$$

可线性表出 $\mathbb{C}[x,y]/(f,g)$, 所以 $\mathbb{C}[x,y]/(f,g)$ 为 $\mathbb{C}$ 上有限维线性空间. $\square$

7. 当人们尝试推广面积、体积等概念时, 人们曾经试图找到一个函数 $\mu\colon \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0,\infty]$ 使它具有以下性质:

i. 若 $E_1, E_2, \cdots \subset \mathbb{R}^n$ 为一列有限或无限的不交集, 则

$$\mu(E_1 \cup E_2 \cup \cdots) = \mu(E_1) + \mu(E_2) + \cdots .$$

ii. 若 E 与 F 全等（即, E 可以通过平移、旋转与反射变换为 F）, 则 $\mu(E) = \mu(F)$.

iii. $\mu(Q) = 1$, 这里 Q 为单位立方体:

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 \le x_j < 1,\ j = 1, \cdots, n\}.$$

但很不幸, 这些条件是互相矛盾的. 本题向你解释当 $n = 1$ 时矛盾在何处（过程可以轻易地拓展到高维情形）.

考虑 $\mathbb{R}$ 的单位立方体 $[0,1)$, 在其上定义等价关系 $x \sim y :\Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$, 并设 N 为恰好包含每个等价类中的一个元素的集合, 即该等价关系的完全代表元系（N 的构造依赖于选择公理）. 接下来令 $R = \mathbb{Q} \cap [0,1)$, 并对每个 $r \in R$, 令

$$N_r = \{x + r \mid x \in N \cap [0, 1-r)\} \cup \{x + r - 1 \mid x \in N \cap [1-r, 1)\}.$$

(1) 证明 $N_r \subset [0,1)$, 且每个 $x \in [0,1)$ 恰属于一个 N_r.

(2) 证明满足 (i)、(ii)、(iii) 的 μ 不存在.

(3) 证明一般的情形: 满足 (i)、(ii)、(iii) 的 $\mu\colon \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0,\infty]$ 不存在.

供题人: 徐思懿

证明. (1) 当 $x \in N \cap [0, 1-r) \subset [0, 1-r)$ 时, $x + r \in [r, 1) \subset [0,1)$; 当 $x \in N \cap [1-r, 1) \subset [1-r, 1)$ 时, $x + r - 1 \in [0, r) \subset [0,1)$. 于是对任意 $x \in N_r$ 都有 $x \in [0,1)$, 从而 $N_r \subset [0,1)$.

另一方面, 显然 x 至少属于一个 N_r, 若 x 还属于 N_s, 那么按定义, $x - r$(或 $x - r + 1$) 和 $x - s$(或 $x - s + 1$) 均属于 N, 且为不同的元素, 这是不可能的. 于是 s 不存在, x 唯一落在 N_r 中.

(2) 若这样的 μ 存在, 由 (i) 有

$$\mu(N) = \mu(N \cap [0, 1-r)) + \mu(N \cap [1-r, 1)) = \mu(N_r),\ \forall\, r \in R.$$

而且, 仍然由 (i), 我们注意到 $\{N_r\}_{r \in R}$ 是 $[0,1)$ 的划分, 于是

$$\mu([0,1)) = \sum_{r \in R} \mu(N_r) = \sum_{r \in R} \mu(N).$$

但注意, 等式左边是 1(由 (iii)), 而因为 R 可数, 等式右边 $= \begin{cases} 0,\ \mu(N) = 0, \\ \infty,\ \mu(N) \neq 0 \end{cases}$, 等式无法成立, 于是 μ 不存在.

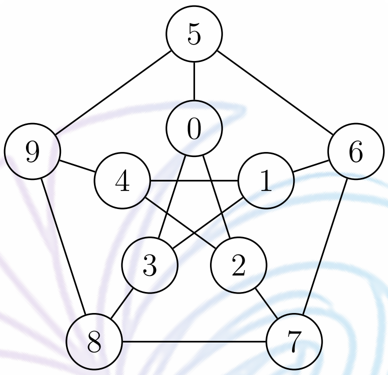
(3) 仿照前面过程, 我们可以找到 Q 的分拆: $\{N_r \times [0,1)^{n-1}\}_{r \in R}$, 于是仿照 (2) 的讨论可得到矛盾.

$\square$

8. 考虑集合 $A = A^0 \sqcup A^1 \sqcup A^2$, 其中

$$
\begin{aligned}
A^0 =& \{0,1,\ldots,9\},\\
A^1 =& \{\{0,2\},\{2,4\},\{4,1\},\{1,3\},\{3,0\},\{0,5\},\{1,6\},\{2,7\},\\
&\{3,8\},\{4,9\},\{9,5\},\{5,6\},\{6,7\},\{7,8\},\{8,9\}\},\\
A^2 =& \{\{0,1,2,3,4\},\{0,2,5,6,7\},\{2,4,7,8,9\},\\
&\{1,4,5,6,9\},\{1,3,6,7,8\},\{0,3,5,8,9\}\}.
\end{aligned}
$$

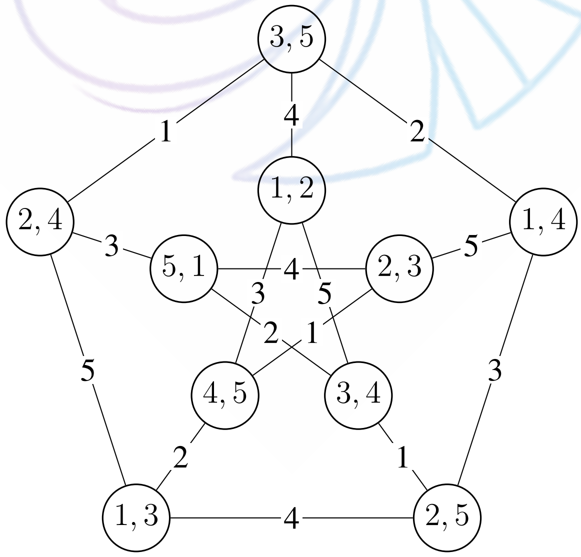
从而以 A^0 为点, A^1 为边, 我们能得到以下的 Petersen 图:



$P = \{A, \subseteq\}$ 构成偏序集（事实上, 构成**抽象多面体**）. 试求 P 的自同构群.

供题人: 曾相如

解. 我们知道 Petersen 图为 Kneser 图 $K(5,2)$, 也就是说我们可以将图作如下编号:



此时, 1 到 5 中的每个数恰好对应三条边. 注意到, 如果两条边的顶点间最短距离为 2, 则他们拥有相同的编号. 由于自同构保持距离, 一个自同构一定将相同编号的边映作相同编号的边, 这便给出了一个映射 $\mathrm{Aut}(P) \to S_5$. 又注意到, 一个点的编号和其三条邻边的编号恰好给出了 1 到 5, 所以自同构对边的编号的影响可以唯一决定自同构对点

的编号的影响. 由于顶点的编号两两不同, 我们此时可以认为 $\mathrm{Aut}(P) \subseteq S_5$. （事实上, Petersen 图的自同构群就是 S_5. ）此时考察 A^2 中任意一个元素, 其在 Petersen 图中对应一个长度为 5 的圈. 可以发现, 将该圈的边的编号依次写下总是能给出一个奇置换, 这说明 P 的自同构一定是偶置换. 另一方面, 容易验证一个偶置换可以给出 P 的自同构, 于是 $\mathrm{Aut}(P) \cong A_5$.

事实上, P 为**十二面体半形**, 即将正十二面体的对径点粘合后得到的抽象多面体. 由于正十二面体的自同构保持对径点, 我们可以将 P 的自同构群看作正十二面体的自同构群的商群, 也就是 $I_h/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = A_5$. 一个有趣的事实是, 正二十面体的顶点可以连出 5 个正方体, 其中每个顶点出现在两个正方体中, 这这对应着 Petersen 图中点的编号. 同时, 正二十面体的每条棱恰平行于其中一个正方体的棱, 这对应着 Petersen 图中边的编号. □

9. 试按照以下步骤证明 $R = \mathbb{Z}[\omega]$ 是非欧几里得主理想整环, 其中 $\omega = \frac{-1+\mathrm{i}\sqrt{19}}{2}$.

(a) 验证 $\omega^2 + \omega + 5 = 0$, 且 $\eta\colon R \to \mathbb{N}, x \mapsto x\bar{x} = |x|^2$ 是良定义的乘性函数；
(b) 证明 R 中的单位 u 有且仅有 ± 1（提示: $\eta(u) = 1$）；
(c) 假设 R 上存在一个欧几里得函数 f, 取 $x_0 \in R$ 使 $f(x_0) = \min\{f(x)\colon 0 \neq x \in R, x\text{ 非单位}\}$, 证明 $S = R/x_0R$ 恰由 R 中的 0 和单位组成. 从而 card $S = 2$ 或 3, 证明此时 $x^2 + x + 5 = 0$ 在 S 中无解得到矛盾, 并由此推出 R 不是欧几里得整环；

接下来对于 R 中任意一个非零理想 I, 我们考虑 I 中使 $\eta(x)$ 达到最小正值的（非零）元素 x_1, 则显然有 $x_1R \subseteq I$, 只需证明 $I \subseteq x_1R$, 即证 $J = x_1^{-1}I \subseteq R$, 其中视 J 为 $\mathbb{C}$ 的 R-子模. （这里我们其实是用 η 来替代欧几里得函数, 不过它并不满足欧几里得函数的所有性质）

(d) 证明对于 $x \in J, y \in R$, 若 $|x-y|^2 < 1$, 则 $x \in R$. 由此得到 $\forall z \in J - R, m \in \mathbb{Z}, \left|\mathrm{Im}\, z - m\frac{\sqrt{19}}{2}\right| \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$;
(e) 证明若 $J - R \neq \varnothing$, 则 $\exists z_0 \in J - R$ 满足 $\frac{\sqrt{3}}{2} \leqslant \mathrm{Im}\, z_0 \leqslant \frac{\sqrt{19}-\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} \leqslant \mathrm{Re}\, z_0 < \frac{1}{2}$, 结合 (d) 验证 $2z_0 \in R$, 证明此时有 $\frac{\omega\bar{\omega}}{2} = \frac{5}{2} \in J$ 并导出矛盾. 因此 R 是主理想整环.

供题人: 张哲琛

证明. (a) 直接验证即可, 其中 $\eta(a+b\omega) = a^2 - ab + 5b^2$;
(b) 设 $u = a + b\omega$, 则 $\eta(u) = 1 \iff (a - \frac{b}{2})^2 + \frac{19}{4}b^2 = 1 \iff (a,b) = (\pm 1, 0)$;
(c) 只需注意到 $x^2 - x + 5$ 在 $\mathbb{F}_2$ 和 $\mathbb{F}_3$ 上均不分裂；
(d) 设 $x = x_1^{-1}x_2, x_2 \in I$, 则 $x_2 - x_1 y \in I, |x_2 - x_1 y|^2 < |x_1|^2 \implies x_2 = x_1 y \iff x = y \in R$. 假设存在 (z_1, m_1) 使 $\left|\mathrm{Im}\, z_1 - m_1\frac{\sqrt{19}}{2}\right| < \frac{\sqrt{3}}{2}$, 注意到 $\left|z_1 - \left\lceil\frac{\lfloor 2\mathrm{Re}\, z_1 + m_1\rfloor}{2}\right\rceil - m_1\omega\right|^2 < 1$, 矛盾！

(e) 同 (d) 理, $\forall z\in J-R$, 设 $m=\left\lfloor\frac{\operatorname{Im} z}{\sqrt{19}/2}\right\rfloor$, 则 $z_0=z-\left\lceil\frac{\lfloor 2\operatorname{Re} z+m\rfloor}{2}\right\rceil-m\omega\in J-R$ 满足条件. 由 (d), 此时 $\left|\operatorname{Im}(2z_0)-\frac{\sqrt{19}}{2}\right|\leqslant\frac{\sqrt{19}}{2}-\sqrt{3}<\frac{\sqrt{3}}{2}\implies 2z_0\in R$, 故 $z_0=\frac{\omega}{2}$ 或 $-\frac{\bar\omega}{2}$, 因此 $-\frac{\omega}{2}(1+\omega)=-\frac{\bar\omega}{2}(1+\bar\omega)=\frac{\omega\bar\omega}{2}=\frac{5}{2}\in J$, 但 $\frac{5}{2}\notin R$ 且 $\left|\operatorname{Im}\frac{5}{2}-0\right|<\frac{\sqrt{3}}{2}$, 与 (d) 矛盾. 综上, R 是主理想整环.

$\square$

10. 已知一列标准高斯 (正态) 随机变量 $Z_1,\cdots,Z_n$ 独立同分布.

(1) 记 $S_n=Z_1^2+\cdots Z_n^2$, 当 $\lambda<\frac{1}{2}$ 时, 计算 $\mathbb{E}[\mathrm{e}^{\lambda S_n}]$, 并证明

$$\mathbb{P}((1-\varepsilon)^2n\le S_n\le(1+\varepsilon)^2n)\ge 1-2\mathrm{e}^{-n\varepsilon^2}.$$

(2) 定义 $A_n=\max\limits_{1\le i\le n}|Z_i|$, $B_n=\max\limits_{1\le i\le n}Z_i$. 证明:

(2a) 当 $t\to+\infty$ 时, 有

$$\mathbb{P}(Z_1>t)=t^{-1}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}+o(1);$$

(2b) 当 $n\to+\infty$ 时, 有

$$\mathbb{E}[A_n]=\sqrt{2\log n}+o(1),\quad \mathbb{E}[B_n]=\sqrt{2\log n}+o(1).$$

供题人: 宗语轩

证明. 本题由《Calculus on Gauss Space: An Introduction to Gaussian Analysis》1.1 节中的内容改编而成.

(1) 易知

$$\mathbb{E}[\mathrm{e}^{\lambda S_n}]=(\mathbb{E}[\mathrm{e}^{\lambda Z_1^2}])^n=(1-2\lambda)^{-\frac{n}{2}}.$$

一方面, 对 $\forall\lambda\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 及 $t>0$, 均有

$$\mathbb{P}(S_n>nt^2)=\mathbb{P}(\mathrm{e}^{\lambda S_n}>\mathrm{e}^{\lambda nt^2})\le\mathrm{e}^{-\lambda nt^2}\mathbb{E}[\mathrm{e}^{\lambda S_n}]=(1-2\lambda)^{-\frac{n}{2}}\mathrm{e}^{-\lambda nt^2}.$$

因此

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_n>nt^2)&\le\exp\left\{-n\sup_{0<\lambda<1/2}\left[\lambda t^2+\frac{1}{2}\log(1-2\lambda)\right]\right\}\\&=\exp\left\{-\frac{n}{2}(t^2-1-2\log t)\right\},\end{aligned}$$

对 $\varepsilon>0$, 令 $t=1+\varepsilon$, 结合 $\log t<t-1$ 并代入上式, 有

$$\mathbb{P}(S_n>n(1+\varepsilon)^2)\le\mathrm{e}^{-n\varepsilon^2}.$$

另一方面, 对 $\forall\lambda>0$ 及 $t<1$, 均有

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_n<nt^2)=\mathbb{P}(\mathrm{e}^{-\lambda S_n}>\mathrm{e}^{-\lambda nt^2})&\le\exp\left\{-n\sup_{\lambda>0}\left[-\lambda t^2+\frac{1}{2}\log(1+2\lambda)\right]\right\}\\&=\exp\left\{-\frac{n}{2}(t^2-1-2\log t)\right\}.\end{aligned}$$

对 $0<\varepsilon<1$, 令 $t=1-\varepsilon$, 结合 $-2\log t>2(1-t)+(1-t)^2$, 并代入上式, 有

$$\mathbb{P}(S_n<n(1-\varepsilon)^2)\le\mathrm{e}^{-n\varepsilon^2}.$$

因此

$$\mathbb{P}((1-\varepsilon)^2 n \le S_n \le (1+\varepsilon)^2 n) \ge 1 - 2\mathrm{e}^{-n\varepsilon^2}.$$

(2) (2a) 记 Z_1 的密度函数为 $f(x)$, 分布函数为 $F(x)$, 并利用 $f'(x)+xf(x)=0$, 有

$$\begin{aligned}1-F(t) &= \int_t^{+\infty} f(u)\,\mathrm{d}\,u = -\int_t^{+\infty} \frac{f'(u)}{u}\,\mathrm{d}\,u = \frac{f(t)}{t} + \int_t^{+\infty} \frac{f'(u)}{u^3}\,\mathrm{d}\,u \\ &= \frac{f(t)}{t} - \frac{f(t)}{t^3} - \int_t^{+\infty} \frac{3f'(u)}{u^5}\,\mathrm{d}\,u.\end{aligned}$$

而

$$\lim_{t\to+\infty} \int_t^{+\infty} \frac{f'(u)}{u^3}\,\mathrm{d}\,u = 0, \quad \lim_{t\to+\infty} \int_t^{+\infty} \frac{f'(u)}{u^5}\,\mathrm{d}\,u = 0.$$

因此当 $t \to +\infty$ 时, 有

$$\mathbb{P}(Z_1 > t) = t^{-1}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} + o(1).$$

(2b) 一方面, 由 (2a) 得

$$\mathbb{P}(A_n > t) \le \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(|Z_k| > t) = n\mathbb{P}(|Z_1| > t) \le Ant^{-1}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}},$$

其中 $A > 0$ 为常数. 因此

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[A_n] &= \int_0^{\sqrt{2\log n}} \mathbb{P}(A_n > t)\,\mathrm{d}\,t + \int_{\sqrt{2\log n}}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n > t)\,\mathrm{d}\,t \\ &\le \sqrt{2\log n} + An \int_{\sqrt{2\log n}}^{+\infty} t^{-1}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}\,t \\ &\le \sqrt{2\log n} + A \int_{\sqrt{2\log n}}^{+\infty} t^{-1}\,\mathrm{d}\,t \\ &= \sqrt{2\log n} + o(1) \quad (n \to +\infty).\end{aligned}$$

另一方面, 对 $\forall\, \varepsilon > 0$, 有

$$\mathbb{E}[B_n] \ge (\sqrt{2\log n} - \varepsilon)\mathbb{P}(B_n > \sqrt{2\log n} - \varepsilon).$$

为证原命题, 只需证明

$$\sqrt{\log n}\,\mathbb{P}(B_n \le \sqrt{2\log n} - \varepsilon) \xrightarrow{n\to+\infty} 0,$$

因为

$$\mathbb{E}[B_n] \ge (\sqrt{2\log n} - \varepsilon)\left(1 - o\left(\frac{1}{\sqrt{\log n}}\right)\right) = \sqrt{2\log n} - \varepsilon + o(1),$$

再令 $\varepsilon \to 0$ 即可. 而

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B_n \le \sqrt{2\log n} - \varepsilon) &= \left(1 - \mathbb{P}(Z_1 > \sqrt{2\log n} - \varepsilon)\right)^n \\ &\le \exp\left(-n\mathbb{P}(Z_1 > \sqrt{2\log n} - \varepsilon)\right) \\ &\le \mathrm{e}^{-(\log n)^2} = o\left(\frac{1}{\sqrt{\log n}}\right),\end{aligned}$$

其中最后一个不等式是因为 (利用 (2a))

$$\mathbb{P}(Z_1 > \sqrt{2\log n} - \varepsilon) = \frac{\mathrm{e}^{-\varepsilon^2/2} + o(1)}{2n\sqrt{\pi\log n}} \exp\left(\varepsilon\sqrt{2\log n}\right) \quad (n \to +\infty).$$

因此

$$\sqrt{\log n}\mathbb{P}(B_n \le \sqrt{2\log n}-\varepsilon) \xrightarrow{n\to+\infty} 0.$$

注意到 $B_n \le A_n$, 综上, 当 $n \to +\infty$ 时, 有

$$\mathbb{E}[A_n] = \sqrt{2\log n}+o(1), \quad \mathbb{E}[B_n] = \sqrt{2\log n}+o(1).$$

□

11. 已知一列独立同分布的有界随机变量 $X_1, \cdots, X_n$. 记 $h(t_1, \cdots, t_r)$ 为 r 元对称多项式,

$$U = \binom{n}{r}^{-1} \sum_{1\le i_1<\cdots<i_r\le n} h(X_{i_1}, \cdots, X_{i_r}), \quad V = U - \mathbb{E}[U].$$

本题的目的是研究 V 的极限分布.

(1) 记 $X_a^b = (X_a, X_{a+1}\ldots, X_b)$, $\zeta_c = \operatorname{Var}\left(\mathrm{E}\left[h\left(X_1^c, X_{c+1}^r\right) \mid X_1^c\right]\right)$. 证明: 当 $n\to\infty$ 时, $n\operatorname{Var}(V)\to r^2\zeta_1$.

(2) 记 $\hat{V} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathrm{E}\left[V \mid X_i\right]$, 证明: $n\to\infty$ 时, $\sqrt{n}\hat{V}$ 依分布收敛于 $N(0, r^2\zeta_1)$.

(3) 证明: 当 $n\to\infty$ 时, $\sqrt{n}V$ 依分布收敛于 $N(0, r^2\zeta_1)$.

(4) 在 (3) 中, 若 $\zeta_1 = 0$, 则 $\sqrt{n}V$ 依分布收敛于 0, 这就说明 V 的阶比 $O(1/\sqrt{n})$ 小. 若已知 $\zeta_1 = \cdots = \zeta_k = 0$, $\zeta_{k+1}\ne 0$, 则此时该如何确定 V 的阶呢?（这里所谓 U 的阶是 $O(1/n^x)$ 是指: 当 n 趋于无穷时, n^xU 依分布收敛于一个非常值的随机变量.）

供题人: 罗迟

证明. (1) 即证: $n\operatorname{Var}(U)\to r^2\zeta_1$. 注意到, 若 $\{i_1, \cdots i_r\}$ 和 $\{j_1, \cdots j_r\}$ 中有 c 个指标相同, 则

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Cov}\left(h\left(X_{i_1}, \cdots, X_{i_r}\right), h\left(X_{j_1}, \cdots, X_{j_r}\right)\right)\\
=&\operatorname{Cov}\left(h\left(X_1^c, X_{c+1}^r\right), h\left(X_1^c, X_{r+1}^{2r-c}\right)\right)\\
=&\operatorname{Cov}\left(\mathrm{E}\left[h\left(X_1^c, X_{c+1}^r\right) \mid X_1^c\right], \mathrm{E}\left[h\left(X_1^c, X_{r+1}^{2r-c}\right) \mid X_1^c\right]\right)\\
&+\mathrm{E}\operatorname{Cov}\left[h\left(X_1^c, X_{c+1}^r\right), h\left(X_1^c, X_{r+1}^{2r-c}\right) \mid X_1^c\right]\\
=&\operatorname{Var}\left(\mathrm{E}\left[h\left(X_1^c, X_{c+1}^r\right) \mid X_1^c\right]\right).
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
\operatorname{Var}(U) &= \frac{1}{\binom{n}{r}^2} \sum_{1\le i_1<\cdots<i_r\le n}\sum_{1\le j_1<\cdots<j_r\le n} \operatorname{Cov}\left(h\left(X_{i_1}, \cdots, X_{i_r}\right), h\left(X_{j_1}, \cdots, X_{j_r}\right)\right)\\
&= \frac{1}{\binom{n}{r}^2}\sum_{c=1}^r \binom{n}{r}\binom{r}{c}\binom{n-r}{r-c}\zeta_c = \frac{1}{\binom{n}{r}}\sum_{c=1}^r \binom{r}{c}\binom{n-r}{r-c}\zeta_c.
\end{aligned}$$

因此

$$n\,\mathrm{Var}(U) \to \frac{nr!(n-r)!r(n-r)!}{n!(r-1)!(n-2r+1)!}\zeta_1 \to r^2\zeta_1.$$

(2) 注意到 $\hat{V}$ 为独立同分布的部分和, 利用 (1) 中的结论及中心极限定理即证.

(3) 先证明: 当 $n\to\infty$ 时,

$$\frac{V}{\sqrt{\mathrm{Var}(V)}} - \frac{\hat{V}}{\sqrt{\mathrm{Var}(\hat{V})}} \xrightarrow{P} 0.$$

事实上, 令

$$Z = \frac{V}{\sqrt{\mathrm{Var}(V)}} - \frac{\hat{V}}{\sqrt{\mathrm{Var}(\hat{V})}},$$

则 $E(Z)=0$.

而

$$\mathrm{Var}(Z) = 2-2\frac{\mathrm{Cov}(V,\hat{V})}{\sqrt{\mathrm{Var}(V)\,\mathrm{Var}(\hat{V})}} = 2-2\frac{\sqrt{\mathrm{Var}(\hat{V})}}{\sqrt{\mathrm{Var}(V)}} \to 0,\ \text{as } n\to\infty.$$

所以 $Z \xrightarrow{L^2} 0$, 因此也依概率收敛于 0. 由此知 $\sqrt{n}(V-\hat{V}) \xrightarrow{P} 0$.

(4) 我们有

$$n^{k+1}\,\mathrm{Var}(U) \to \frac{n^{k+1}r!(n-r)!r!(n-r)!}{n!((r-k-1)!)^2(k+1)!(n-2r+k+1)!}\zeta_{k+1} \to C\zeta_{k+1},$$

其中 C 为常数. 类似可证 $\sqrt{n^{k+1}}V$ 依分布收敛于 $N(0, C\zeta_{k+1})$. 因此 U 是 $O(1/\sqrt{n^{k+1}})$ 阶的.

□

12. 在一个量子系统中, 考虑哈密顿量:

$$H_0 = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x_1^2 + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x_2^2,$$

这是两个解耦的谐振子的哈密顿量.

(1) 计算 H_0 的本征态和本征值 (能量本征态可以标记为 $|n_1, n_2\rangle$).

(2) 假设两个谐振子的产生和湮灭算符为 $a_i^\dagger, a_i, i=1,2$. 定义以下算符

$$J_+ = a_1^\dagger a_2, \quad J_- = a_2^\dagger a_1, \quad J_z = \frac{1}{2}\left(a_1^\dagger a_1 - a_2^\dagger a_2\right).$$

证明: $[J_z, J_\pm] = \pm J_\pm, \quad [J_+, J_-] = 2J_z$.

(3) 考虑扰动的哈密顿量 (λ 很小)

$$H = H_0 + \lambda x_1^2 p_2^2.$$

计算能级 $n_1+n_2=2$ 处能量的一阶修正.

供题人: 王乐达

解. (1) 定义算子

$$a_1=\sqrt{\frac{mw}{2\hbar}}x_1+i\sqrt{\frac{1}{2\hbar wm}}p_1,\quad a_1^\dagger=\sqrt{\frac{mw}{2\hbar}}x_1-i\sqrt{\frac{1}{2\hbar wm}}p_1,$$
$$a_2=\sqrt{\frac{mw}{2\hbar}}x_2+i\sqrt{\frac{1}{2\hbar wm}}p_2,\quad a_2^\dagger=\sqrt{\frac{mw}{2\hbar}}x_2-i\sqrt{\frac{1}{2\hbar wm}}p_2.$$

它们满足非平凡的对易关系

$$\left[a_1,a_1^\dagger\right]=1,\quad \left[a_2,a_2^\dagger\right]=1,$$

因此, 哈密顿量

$$H_0=\hbar w\left(a_1^\dagger a_1+a_2^\dagger a_2+1\right)$$

从满足下述条件的状态 $|0,0\rangle$ 下出发, 可以找到所有的本征态

$$a_1|0,0\rangle=0,\quad a_2|0,0\rangle=0.$$

进一步, 能量本征态

$$|n_1,n_2\rangle=\frac{\left(a_1^\dagger\right)^{n_1}}{\sqrt{n_1!}}\frac{\left(a_2^\dagger\right)^{n_2}}{\sqrt{n_2!}}|0,0\rangle.$$

能量本征值可表示为

$$(n_1+n_2+1)\,\hbar\omega.$$

(2) 由对易关系

$$\left[a_1,a_1^\dagger\right]=1,\quad \left[a_2,a_2^\dagger\right]=1$$

可以直接验证待证.

(3) 共有三个态矢 $\alpha_1=|0,2\rangle,\alpha_2=|1,1\rangle,\alpha_3=|2,0\rangle$. 我们需要计算三阶方阵

$$\left\langle n_1,n_2\left|x_1^2p_2^2\right|n_1',n_2'\right\rangle$$

然后计算该矩阵的特征值. 由于 x_1 与 p_2 对易,

$$\left\langle n_1,n_2\left|x_1^2p_2^2\right|n_1',n_2'\right\rangle=\left\langle n_1\left|x_1^2\right|n_1'\right\rangle\left\langle n_2\left|p_2^2\right|n_2'\right\rangle.$$

由湮灭算符的定义,

$$x_1^2=\frac{\hbar}{2mw}\left(a_1^2+\left(a_1^\dagger\right)^2+a_1a_1^\dagger+a_1^\dagger a_1\right),p_2^2=\frac{\hbar}{2mw}\left(a_2^2+\left(a_2^\dagger\right)^2-a_2a_2^\dagger-a_2^\dagger a_2\right),$$

x_1^2 的矩阵表示中的非零元为 $\left\langle 0\left|x_1^2\right|2\right\rangle,\left\langle 0\left|x_1^2\right|0\right\rangle,\left\langle 1\left|x_1^2\right|1\right\rangle,\left\langle 2\left|x_1^2\right|2\right\rangle$ (和其共轭), 它们值为 (忽略因子 $\frac{\hbar}{2mw}$)

$$\left\langle 0\left|x_1^2\right|2\right\rangle=\sqrt{2},\quad \left\langle 0\left|x_1^2\right|0\right\rangle=1,\left\langle 1\left|x_1^2\right|1\right\rangle=3,\left\langle 2\left|x_1^2\right|2\right\rangle=5$$

类似的对于 p_2^2, $\left\langle 0\left|p_2^2\right|2\right\rangle,\left\langle 0\left|p_2^2\right|0\right\rangle,\left\langle 1\left|p_2^2\right|1\right\rangle,\left\langle 2\left|p_2^2\right|2\right\rangle$ (和其共轭), 它们值为

$$\left\langle 0\left|p_2^2\right|2\right\rangle=\sqrt{2},\quad \left\langle 0\left|p_2^2\right|0\right\rangle=-1,\left\langle 1\left|p_2^2\right|1\right\rangle=-3,\left\langle 2\left|p_2^2\right|2\right\rangle=-5$$

所以非零的矩阵元为

$$\left\langle 0,2\left|x_1^2p_2^2\right|2,0\right\rangle,\quad \left\langle 0,2\left|x_1^2p_2^2\right|0,2\right\rangle,\left\langle 1,1\left|x_1^2p_2^2\right|1,1\right\rangle,\left\langle 2,0\left|x_1^2p_2^2\right|2,0\right\rangle,$$

所求矩阵可表为

$$\begin{bmatrix} -5 & 0 & 2 \\ 0 & -9 & 0 \\ 2 & 0 & -5 \end{bmatrix},$$

本征值 $\lambda_1 = -9, \lambda_2 = -7, \lambda_3 = -3.$

$\square$

13. 试证明:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{2^{n+1}\pi i} \oint_{\Omega} \frac{(z^2-1)^n}{(z-x)^{n+1}} \,\mathrm{d}\,z$$

并且当 $t < \dfrac{x-\sqrt{1-x^2}}{2}$ 是正有理数时, 对任意给定的 N,

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ nt\in\mathbb{Z}}} \{\left(\frac{1-\sqrt{1-2xt+t^2}}{t} - x - \sum_{k=0}^{nt} \frac{1}{\sqrt{n^2-2xkn+k^2}} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n\sqrt{1+t^2-2tx}}\right) n^{2N-1}$$
$$- \sum_{j=1}^{N}\sum_{l=1}^{\infty} n^{2N-1-2j} C_j \frac{(-1)^j (l+2j)! t^l}{(2j)! l! 2^{l+2j} \pi i} \oint_{\Omega} \frac{(z^2-1)^{l+2j}}{(z-x)^{2j+l}} \,\mathrm{d}\,z\} = 0.$$

其中, Ω 是绕 x 的围道. C_k 满足 $C_0 = 1$, $\displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} \frac{C_j}{j!(k-j)!} = 0.$

供题人: 葛霖

证明. (a) 先是关于全纯函数零点个数 N 的幅角原理

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{\psi'(z)}{\psi(z)} \,\mathrm{d}\,z = N,$$

再设 $p(z)$ 和 $q(z)$ 在围道 C 上及 C 内是解析的, a 为 C 内一点. 如果对于 C 上的点 ζ, 参数 t 满足

$$|tq(\zeta)| < |\zeta - a|,$$

则方程

$$z = a + tq(z)$$

在 C 内有一根而且只有一根; 当 $t = 0$ 时此根趋于 a.
这是因为应用儒歇于函数

$$\psi(z) \equiv z - a - tq(z),$$

设 z 是方程

$$z = a + tq(z)$$

在 C 内的惟一的根, 有

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C p(\zeta) \frac{\psi'(\zeta)}{\psi(\zeta)} \,\mathrm{d}\,\zeta = p(z).$$

但另一方面

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_C p(\zeta)\frac{\psi'(\zeta)}{\psi(\zeta)}\,\mathrm{d}\,\zeta=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_C p(\zeta)\frac{1-t\varphi'(\zeta)}{\zeta-a-t\varphi(\zeta)}\,\mathrm{d}\,\zeta\\
&=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_c p(\zeta)[1-t\varphi(\zeta)]\sum_{n=0}^{\infty}t^n\frac{[\varphi(\zeta)]^n}{(\zeta-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}\,\zeta\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}a^n}\left\{p(a)[\varphi(a)]^n\right\}\\
&-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}a^n}\left\{p(a)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}[\varphi(a)]^{n+1}\right\}\\
&=p(a)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}a^{n-1}}\left\{p'(a)[\varphi(a)]^n\right\},
\end{aligned}
$$

因此有

函数 $p(z)$ 可以依 t 的幂展为

$$p(z)=p(a)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}a^{n-1}}\left\{p'(a)[q(a)]^n\right\}.$$

设 $q(z)=(z^2-1)/2$, 则方程 $z-x-tq(z)=0$ 的一个根是

$$z=\frac{1-\sqrt{1-2xt+t^2}}{t}.$$

当 $t=0$ 时, $z\to x$. 于是令 $p(z)\equiv z$, 得

$$\frac{1-\sqrt{1-2xt+t^2}}{t}=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}\left\{\left(\frac{x^2-1}{2}\right)^n\right\}.$$

两边对 x 求微商, 得展开式

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!2^n}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(x^2-1\right)^n.$$

即

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{2^{n+1}\pi i}\oint_{\Omega}\frac{(z^2-1)^n}{(z-x)^{n+1}}\,\mathrm{d}\,z.$$

(b) 设 $\varphi(t)$ 是 t 的任意 n 次多项式, 则有设 $0\leqslant t\leqslant 1$. 以 $\mathrm{d}t$ 乘恒等式

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{m=1}^{n}(-1)^m(z-a)^m\varphi^{(n-m)}(t)f^{(m)}[a+(z-a)t]\\
&=-(z-a)\varphi^{(n)}(t)f'[a+(z-a)t]\\
&+(-1)^n(z-a)^{n+1}\varphi(t)f^{(n+1)}[a+(z-a)t]
\end{aligned}
$$

的两边, 求积分, 从 0 到 1 , 并注意 $\varphi^{(n)}(t)=\varphi^{(n)}(0)$ (因为 $\varphi(t)$ 是 n 次多项式), 即得

$$
\begin{aligned}
&\varphi^{(n)}(0)\{f(z)-f(a)\}\\
&=\sum_{m=1}^{n}(-1)^{m-1}(z-a)^m\left\{\varphi^{(n-m)}(1)f^{(m)}(z)-\varphi^{(n-m)}(0)f^{(m)}(a)\right\}\\
&\quad+(-1)^n(z-a)^{n+1}\int_0^1\varphi(t)f^{(n+1)}[a+(z-a)t]\,\mathrm{d}\,t.
\end{aligned}
$$

现在记 $\varphi_n(x)$ 为 n 次多项式满足 $\varphi_n(k)=n\sum_{s=0}^{k-1}s^{n-1}+C_{\frac{n}{2}}$, 其中约定 C_α 在 α 不是整数时取 0 . 把 n 换成 $2n$, 得

$$
\begin{aligned}
&\varphi_{2n}^{(2n)}(0)\{f(z)-f(a)\}\\
&=\sum_{m=1}^{2n}(-1)^{m-1}(z-a)^m\left\{\varphi_{2n}^{(2n-m)}(1)f^{(m)}(z)-\varphi_{2n}^{(2n-m)}(0)f^{(m)}(a)\right\}\\
&\quad+(z-a)^{2n+1}\int_0^1\varphi_{2n}(t)f^{(2n+1)}[a+(z-a)t]\,\mathrm{d}\,t.
\end{aligned}
$$

注意到如下事实

$$
\begin{aligned}
&\varphi_{2n}^{(2n)}(0)=(2n)!,\\
&\varphi_{2n}^{(2n-m)}(x)=\frac{(2n)!}{m!}\varphi_m(x),\\
&\varphi_m(1)=(-1)^m\varphi_m(0)=(-1)^m\varphi_m(0),\\
&\varphi_1(0)=-\frac{1}{2},\quad \varphi_{2k+1}(0)=0,
\end{aligned}
$$

用 $(-1)^{k-1}C_k$ 代替 $\varphi_{2k}(0)$, 得

$$
\begin{aligned}
f(z)-f(a)=&\frac{z-a}{2}\left[f'(z)+f'(a)\right]\\
&+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{(z-a)^{2k}}{(2k)!}\mathrm{C}_k\left[f^{(2k)}(z)-f^{(2k)}(a)\right]\\
&+\frac{(z-a)^{2n+1}}{(2n)!}\int_0^1\varphi_{2n}(t)f^{(2n+1)}[a+(z-a)t]\,\mathrm{d}\,t.
\end{aligned}
$$

令 $F(z)=f'(z)$, 把 $z-a$ 写作 h, 有

$$
\begin{aligned}
\int_a^{a+h}F(x)\,\mathrm{d}\,x=&\frac{h}{2}[F(a+h)+F(a)]\\
&+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^kh^{2k}\mathrm{C}_k}{(2k)!}\left[F^{(2k-1)}(a+h)-F^{(2k-1)}(a)\right]\\
&+\frac{h^{2n+1}}{(2n)!}\int_0^1\varphi_{2n}(t)F^{(2n)}(a+ht)\,\mathrm{d}\,t
\end{aligned}
$$

依次把 a 换为 $a+h, a+2h, \cdots, a+(m-1)h$, 然后将结果加起来, 得

$$\begin{aligned}\int_a^{a+mh} F(x)\,\mathrm{d}\,x =& h\left\{\frac{F(a)}{2}+F(a+h)+\cdots\right.\\&\left.+F[a+(m-1)h]+\frac{F(a+mh)}{2}\right\}\\&+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k C_k h^{2k}}{(2k)!}\left[F^{(2k-1)}(a+mh)\right.\\&\left.-F^{(2k-1)}(a)\right]+R_n,\end{aligned}$$

其中

$$R_n=\frac{h^{2n+1}}{(2n)!}\int_0^1 \varphi_{2n}(t)\sum_{s=0}^{m-1}F^{(2n)}(a+hs+ht)\,\mathrm{d}\,t.$$

余项 R_n 需要估值. 为此, 引进周期为 1 的函数 $\mathrm{P}_\lambda(t)$:

$$\left.\begin{array}{ll}\mathrm{P}_\lambda(t)=\varphi_\lambda(t)/\lambda!, & \text{当}0\leqslant t<1,\\ \mathrm{P}_\lambda(t+1)=\mathrm{P}_\lambda(t), & \lambda\text{ 为非负整数.}\end{array}\right\}$$

于是

$$R_n=h^{2n+1}\int_0^1 \mathrm{P}_{2n}(t)\sum_{s=0}^{m-1}F^{(2n)}[a+h(t+s)]\,\mathrm{d}\,t.$$

把 $t+s$ 换成 t, 利用 $\mathrm{P}_\lambda(t)$ 的周期性, 有

$$\begin{aligned}R_n&=h^{2n+1}\sum_{s=0}^{m-1}\int_s^{s+1}\mathrm{P}_{2n}(t)F^{(2n)}(a+ht)\,\mathrm{d}\,t\\&=h^{2n+1}\int_0^m \mathrm{P}_{2n}(t)F^{(2n)}(a+ht)\,\mathrm{d}\,t,\end{aligned}$$

或, 换部求积分, 得

$$R_n=-h^{2n+2}\int_0^m \mathrm{P}_{2n+1}(t)F^{(2n+1)}(a+ht)\,\mathrm{d}\,t,$$

在证明过程中用到下面两个公式:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{P}_\lambda(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi_\lambda(t)/\lambda!=\varphi_{\lambda-1}(t)/(\lambda-1)!=\mathrm{P}_{\lambda-1}(t),$$

$$\mathrm{P}_{2n+1}(1)=(-1)^{2n+1}\mathrm{P}_{2n+1}(0)=0.$$

由于 $P_\lambda(t)$ 是周期为 1 的函数, 它可以展成傅里叶级数. 当 $\lambda=2n$ 时, 因 $\varphi_{2n}(1-t)=\varphi_{2n}(t)$, 故在区间 $0\leqslant t<1$ 中 $\mathrm{P}_{2n}(1-t)=\mathrm{P}_{2n}(t)=\mathrm{P}_{2n}(-t)$, 即 $\mathrm{P}_{2n}(t)$ 是偶函数. 因此,

$$\mathrm{P}_{2\pi}(t)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\cos 2k\pi t.$$

可以算出

$$a_0=\int_0^1 \mathrm{P}_{2n}(t)\,\mathrm{d}\,t=\mathrm{P}_{2n+1}(1)-\mathrm{P}_{2n+1}(0)=0\quad(n\geqslant 1),$$

$$a_k=2\int_0^1 \mathrm{P}_{2n}(t)\cos 2k\pi t\,\mathrm{d}\,t=\frac{2(-1)^{n+1}}{(2k\pi)^{2n}},$$

而得

$$\mathrm{P}_{2n}(t)=(-1)^{n+1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2\cos 2k\pi t}{(2k\pi)^{2n}}\quad (n\geqslant 1).$$

类似地有

$$\mathrm{P}_{2n+1}(t)=(-1)^{n+1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2\sin 2k\pi t}{(2k\pi)^{2n+1}}\quad\left(\begin{array}{c} n\geqslant 0; \\ \text{当} n=0,\ 0<t<1\end{array}\right)$$

得

$$|\mathrm{P}_{\lambda}(t)|\leqslant\frac{2}{(2\pi)^{\lambda}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\lambda}}.$$

当 $\lambda\geqslant 2$ 时

$$1+\frac{1}{2^{\lambda}}+\frac{1}{3^{\lambda}}+\cdots<1+\int_{1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\,x}{x^{\lambda}}=1+\frac{1}{\lambda-1}\leqslant 2,$$

故

$$|\mathrm{P}_{\lambda}(t)|\leqslant\frac{4}{(2\pi)^{\lambda}}.$$

这式在 $\lambda=1$ 时也成立, 因为 $|P_1(t)|=|\varphi_1(t)|=\left|t-\dfrac{1}{2}\right|\leqslant\dfrac{1}{2}<\dfrac{4}{2\pi}$.

如今取 $F(t)=\dfrac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}$, $h=\dfrac{1}{n}$, 注意到 $F(t)$ 的各阶导数在实轴上一致有界即可证毕.

□