# 《瀚海之巅》2022-2023 第 2 期 · 征解

中国科大数学科学学院团委　《瀚海之巅》项目组

日期：2023 年 1 月 9 日

1. 证明：在置换群 $\mathfrak{S}_{n+2}$ 中存在两个与 $\mathfrak{S}_n$ 同构但是不共轭的子群。

供题人：罗云杰

2. (1) 计算

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{n}, \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n}.$$

(2) 利用前面的结果，计算

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

(3) 尝试计算

$$\zeta(2k)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}},\ k\in\mathbb{N}$$

（Hint：利用函数 $x^{2k}$ 的 Fourier 展开）。更进一步，导出 $\zeta(2k)$ 的递推关系式。（本题征解暂不做要求）

供题人：刘景寒

3.（有限域上线性空间的子空间计数问题）设 $\mathbb{F}_q$ 为 $q$ 阶的有限域，$V=\mathbb{F}_q^n$ 为 $\mathbb{F}_q$ 上的 $n$ 维线性空间，我们定义 $\binom{n}{k}_q$ 为 $V$ 的 $k$ 维线性子空间数目，称为**高斯二项式系数 (Gaussian binomial coefficient)**。我们下面的主要目标是导出其表达式，并寻找其与二项式系数 $\binom{n}{k}$ 的联系。

(1) 求 $V$ 上的秩 $k$ 线性无关组的数目；

(2) 求 $k$ 维线性子空间的基的组数；

(3) (i) 利用 (1)(2) 的结果给出 $\binom{n}{k}_q$ 的表达式；

(ii) 现假设 $q\in\mathbb{R}$，求证：

$$\lim_{q\to 1}\binom{n}{k}_q=\binom{n}{k}.$$

(4) 求 $V$ 的全体子空间数目。（本小问不要求作答，事实上它可能没有初等的答案。$q=2$ 的一些结果可以参考：Sum of Gaussian binomial coefficients [n,k] for q=2 and k=0..n.）

供题人：徐思懿

4. $S_n$ 和 $S_n'$ 表示两个独立的直线上简单对称随机游走，且 $S_0 = S_0' = 0$，定义 **"懒" 随机游走**：

$$R_n = \frac{1}{2}(S_n - S_n').$$

(1) 若事件 "质点从原点出发后存在某个时刻回到原点" 发生的概率为 1，则称该随机游走是常返的。判断 "懒" 随机游走 $R_n$ 的常返性，并说明理由；

(2) 定义 $T = \inf\{n \in \mathbb{N}^* : R_n = 0\}$，求 $T$ 的分布列。

**提示**: 可引入

$$P_n = \mathbb{P}(R_1 > 0, R_2 > 0, \cdots, R_{n-1} > 0, R_n = 0),\ P_0 = 0,$$

$$Q_n = \mathbb{P}(R_1 \geq 0, R_2 \geq 0, \cdots, R_{n-1} \geq 0, R_n = 0),\ Q_0 = 1.$$

(3) 证明: 对 $\forall \delta > 0$，均有

$$\frac{R_n}{n^{\frac{1}{2}+\delta}} \xrightarrow{\text{a.s.}} 0.$$

供题人：宗语轩

5. 令 $S = (s_0, s_1, s_2, \cdots)$ 为一正整数列。我们称 $S$ 是**次指数增长**的，如果 $s_n \leqslant 2^{2^{f(n)}}, \forall\, n \in \mathbb{N}$，其中 $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ 满足 $\dfrac{f(n)}{\log_2 n} \to 0\ (n \to \infty)$。

求证：如果正整数列 $S$ 是严格递增且次指数增长的，那么

$$\mathbb{P}_S :\ = \{p \text{ 是素数}: \exists\, n \in \mathbb{N}, p \mid s_n\}$$

是无穷的。

供题人：张哲琛

6. 设 $\{\gamma_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 满足如下条件:

(1) $\gamma_{-k} = \gamma_k, \forall\, k \in \mathbb{N}$;

(2) $\sum_{k=1}^{\infty} |\gamma_k| < \infty$;

(3) $\forall\, n$，令 $a_{ij} = \gamma_{i-j}, 1 \leq i, j \leq n$，则矩阵 $(a_{ij})_{n\times n}$ 半正定。

考虑函数

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \gamma_k \cos \omega k,\ \omega \in \mathbb{R}.$$

求证：$f(w)$ 是连续函数且值域非负。

供题人：罗迟

7. 设 $A$ 为一个 $n$ 阶复方阵，考虑多项式 $f(x) = |I - xA|$, $x \in \mathbb{C}$。

证明下列命题等价:

(1) $f(x)$ 为常值多项式。

(2) $\exists\, m \in \mathbb{N}$，使得 $\forall\, m+1 \leq k \leq m+n$, $\mathrm{tr}(A^k) = 0$。

供题人：罗迟

8. 设 $R$ 是一个含幺交换环，它包含了一个域 $K$，且 $R$ 作为 $K$ 线性空间是有限维的，$R$ 上的一个含幺环自同态 $\phi$ 满足 $\phi^2 = \mathrm{id}$。问：
   (1) 若 $\mathrm{char}K = p$，$p$ 为素数，则是否 $\phi(K) = K$ 总是成立？证明或举出反例。
   (2) 若 $\mathrm{char}K = 0$，则是否 $\phi(K) = K$ 总是成立？证明或举出反例。

供题人：葛霖

9. 在一个圆上给出了 $2^{500}$ 个点，它们被随机标记为 $1, 2, \ldots, 2^{500}$。证明一个人可以选择 100 个不相交的弦来连接这些点中的一些点，使得所选弦端点处的 100 对数字的和相等。

供题人：王乐达

10. 证明下列命题：任给 $\mathbb{R}^2$ 中的一个三角形 $ABC$，以及 $ABC$ 中一个点 $O$，我们称线段 $AO$、$BO$、$CO$ 的并为一个“Y”型子集。试证明无法找到不可数个互不相交的“Y”型子集。

供题人：曾相如

11. 证明：对每个 $d \geqslant 2$，存在 $\mathbb{R}^d$ 中 $2\lfloor \frac{\sqrt{6}}{9}(\frac{2}{\sqrt{3}})^d \rfloor$ 个点的点集 $S \subseteq \{0,1\}^d$（单位 $d$-立方体的顶点）使得这些点只决定锐角（任三点构成的角均是锐角）。

供题人：张哲琛

12. 令 $f\colon \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)} - \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(x-k)^2}.$$
   (1) 证明 $f$ 表达式中的级数在定义域内的有界闭集上是一致收敛的，并说明 $f$ 是连续函数。
   (2) 证明 $f$ 在 0 处的极限存在，因此可以适当地定义整数处 $f$ 的取值，得到一个在实数上连续的函数，也记为 $f$。并且这是一个周期函数，于是有界。
   (3) 证明
$$f(x) + f\left(x + \frac{1}{2}\right) = 4f(2x),$$
   并说明 $f \equiv 0$，因此得到
$$\forall x \notin \mathbb{Z}, \quad \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(x-k)^2}; \tag{1}$$
$$\forall x \notin \mathbb{Z} + \frac{1}{2}, \quad \pi^2(\tan \pi x)' = \frac{\pi^2}{\cos^2(\pi x)} = 4\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(2x-2k-1)^2}. \tag{2}$$

(4) 证明

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

(5) 证明

$$\forall x\notin\mathbb{Z}+\frac{1}{2},\quad \pi^{2n}\frac{\tan^{(2n-1)}(\pi x)}{(2n-1)!}=2^{2n}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(2x-2k-1)^{2n}}.$$

特别的，

$$\pi^{2n}\frac{\tan^{(2n-1)}(0)}{(2n-1)!}=2(2^{2n}-1)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2n}}.$$

我们定义 $\zeta(2n)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}k^{-2n}$。

(6) 证明

$$\tan x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(2^{2n}-1)\zeta(2n)}{\pi^{2n}}x^{2n-1},\quad |x|<\pi/2.$$

(7) 证明

$$\pi\tan(\pi x)=8x\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2-4x^2},\quad x\notin\mathbb{Z}+\frac{1}{2}. \tag{3}$$

(8) 证明

$$\frac{\pi}{\sin(\pi x)}=\frac{1}{x}+2x\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{x^2-k^2}.$$

(9) 求不定积分

$$\int\left(\pi\cot(\pi x)-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x.$$

并证明

$$\sin(\pi x)=\pi x\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right). \tag{4}$$

由于被积函数的定义域，仅说明了表达式对 $0<x<1$ 成立，但是两端在 $x=0$ 处极限相同，再考虑奇偶性和周期性，对所有的 $x\in\mathbb{R}$ 也成立。

(10) 证明

$$\frac{2}{\pi}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{4n^2}\right),$$

于是有 **Wallis 公式**：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!\sqrt{2n+1}}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

(11) 证明

$$\pi=\int_{\mathbb{R}}\frac{\sin^2 x}{x^2}\mathrm{d}x.$$

由此证明

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}.$$

下面各问中 $0<p<1$：

(12) 证明下列级数在 $[0,1-\delta]$ 上一致收敛

$$\frac{x^{p-1}}{1+x}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{p+k-1}.$$

(13) 证明

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x}\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{p+k},\quad \int_1^{\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x}\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{p-k},$$

并证明

$$\int_0^{\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{\sin(p\pi)}.$$

(14) 仿照上述步骤，证明

$$\int_0^{\infty}\frac{x^{p-1}\ln x}{x-1}\mathrm{d}x=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(p-k)^2}=\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi p)}.$$

供题人：杨笛龙

**注：** 第 3 期供题与第 2 期征解的截止日期是 2023 年 2 月 10 日，欢迎大家踊跃投稿，有关投稿事宜请参见“项目组介绍 + 投稿须知”