《瀚海之巅》2022-2023 第 2 期 · 征解解答

中国科大数学科学学院团委　《瀚海之巅》项目组

日期：2023 年 3 月 14 日

1、证明：在置换群 $\mathfrak{S}_{n+2}$ 中存在两个与 $\mathfrak{S}_n$ 同构但是不共轭的子群。

供题人：罗云杰

证明. 记 $N_n = \{1, 2, \cdots, n\}$，$\mathrm{Aut}(N_n)$ 为 N_n 的自同构群。注意到子群

$$A = \{f \in \mathrm{Aut}(N_{n+2}) \mid f(n+1) = n+1,\ f(n+2) = n+2\}$$

与子群

$$B = \{f \in \mathrm{Aut}(N_{n+2}) \mid f|_{N_n} \in \mathrm{Aut}(N_n),\ \mathrm{sgn}(f) = 1\}$$

均与 $\mathfrak{S}_n$ 同构，但两者不共轭 (两者作用在 N_{n+2} 上的不动点个数不同)。 □

评论. 实际上应当要求 $n > 1$。

2、

(1) 计算

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}.$$

(2) 利用前面的结果，计算

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

(3) 尝试计算

$$\zeta(2k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}},\ k \in \mathbb{N}$$

（Hint：利用函数 x^{2k} 的 Fourier 展开）。更进一步，导出 $\zeta(2k)$ 的递推关系式。（本题征解暂不做要求）

供题人：刘景寒

解. (1) 只需考虑 $0 < x < 2\pi$。记

$$C(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n}, \quad S(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}.$$

则有

$$
\begin{aligned}
C(x)+iS(x) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nx)+i\sin(nx)}{n}\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{inx}}{n}\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(e^{ix}\right)^n}{n}\\
&= -\ln\left(1-e^{ix}\right)\\
&= -\ln\left(2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)-i\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)\right)\\
&= -\ln\left(2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cdot e^{i\frac{x-\pi}{2}}\right)\\
&= -\ln\left(2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)+i\frac{\pi-x}{2}.
\end{aligned}
$$

最终分开实部与虚部，得到

$$
C(x)=-\ln\left(2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right),\quad S(x)=\frac{\pi-x}{2}.
$$

下面的解答来自于乐屈毅同学。

先证明级数收敛。注意到两个恒等式：

$$
\sum_{n=1}^{N}\sin(nx)=\frac{\cos\left(Nx+\frac{x}{2}\right)-\cos\left(x-\frac{x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)},
$$

$$
\sum_{n=1}^{N}\cos(nx)=\frac{\sin\left(Nx+\frac{x}{2}\right)-\sin\left(x-\frac{x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.
$$

故 $\sin x$和 $\cos x$ 的部分和有界，由 Dirichlet 判别法知级数收敛。

接下来进行计算：设 $\boldsymbol{z}=\cos x+\boldsymbol{i}\sin x$。

则一方面：

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\boldsymbol{z}^n}{n} &= \ln\frac{1}{1-\boldsymbol{z}}\\
&= \ln\frac{1}{1-\cos x+\boldsymbol{i}\sin x}\\
&= -\frac{1}{2}\ln\left(2-2\cos x\right)+\boldsymbol{i}\arctan\frac{\sin x}{1-\cos x}\\
&= -\frac{1}{2}\ln\left(2-2\cos x\right)+\boldsymbol{i}\frac{\pi-x}{2}\\
&= -\ln\left|2\sin\frac{x}{2}\right|+\boldsymbol{i}\frac{\pi-x}{2}.
\end{aligned}
$$

第三步用到了 $\ln\boldsymbol{z}=\ln|\boldsymbol{z}|+\boldsymbol{i}arg\boldsymbol{z}$。

另一方面：

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\boldsymbol{z}^n}{n} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos x+\boldsymbol{i}\sin x^n}{n}\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{n}+\boldsymbol{i}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n}.
\end{aligned}
$$

故有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{n}=-\ln\left|2\sin\frac{x}{2}\right|,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n}=\frac{\pi-x}{2}.$$

(2)（解法一）

考虑函数

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{n^2}.$$

那么由上题结果我们有

$$f(\pi)-f(0)=\int_0^{\pi}-\frac{sin(nx)}{n}dx=\int_0^{\pi}\frac{x-\pi}{2}dx=-\frac{\pi^2}{4}.$$

因为

$$f(\pi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=-\frac{f(0)}{2},$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=f(0)=\frac{\pi^2}{6}.$$

同样是简单的，还可以得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{n^2}=\frac{x^2}{4}-\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi^2}{6}\quad 0\leqslant x\leqslant 2\pi.$$

（解法二）

令 $f(x)=x^2(-\pi\leq x\leq\pi)$。

因为 $f(x)$ 是偶函数，故 $b_n=0$。

计算 Fourier 系数

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^2 f(x)dx=\frac{2}{3}\pi^2,\quad 且$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^2 f(x)\cos nx dx=\frac{(-1)^n\cdot 4}{n^2}.$$

则

$$f(x)=x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx,-\pi\leq x\leq\pi.$$

令 $x=\pi$，则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

(3) 该解答来自于**乐屈毅同学**.

参考知乎 https://zhuanlan.zhihu.com/p/142293931

考虑函数 $f(x)=x^{2m}$ 的 Fourier 级数。

由于 f 是偶函数，故没有正弦项，即：

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(nx).$$

下面计算系数：

$$\begin{aligned}a_0&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^{2m}dx\\&=\frac{2\pi^{2m}}{2m+1}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^{2m}cos(nx)dx\\&=\frac{1}{\pi}\left(\sum_{i=0}^{m-1}(-1)^i\left(\frac{(2m)!}{(2m-2i)!}x^{2m-2i}\frac{\sin(nx)}{n^{2i+1}}+\frac{(2m)!}{(2m-2i-1)!}x^{2m-2i-1}\frac{\cos(nx)}{n^{2i+2}}\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi}\right)\\&=\frac{1}{\pi}\left(\sum_{i=0}^{m-1}(-1)^i\frac{2\cdot(2m)!}{(2m-2i-1)!}x^{2m-2i-1}\frac{(-1)^n}{n^{2i+2}}\right),\end{aligned}$$

在这里我们取 $x=\pi$，化简得：

$$\begin{aligned}\pi^{2m}&=\frac{\pi^{2m}}{2m+1}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\left(\sum_{i=0}^{m-1}(-1)^i\frac{2\cdot(2m)!}{(2m-2i-1)!}\pi^{2m-2i-1}\frac{(-1)^n}{n^{2i+2}}\right)\\&=\frac{\pi^{2m}}{2m+1}+\sum_{i=1}^{m}(-1)^{i+1}\frac{2\cdot(2m)!}{(2m-2i+1)!}\pi^{2m-2i}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2i}}\\&=\frac{\pi^{2m}}{2m+1}+\sum_{i=1}^{m}(-1)^{i+1}\frac{2\cdot(2m)!}{(2m-2i+1)!}\pi^{2m-2i}\zeta(2i).\end{aligned}$$

从而对任意 m 有：

$$\frac{m}{(2m+1)!}=\sum_{i=1}^{m}(-1)^{i+1}\frac{1}{(2m-2i+1)!}\frac{\zeta(2i)}{\pi^{2i}}.$$

即为 $\zeta(2i)$ 的一个递推关系式。

为进一步计算出结果，首先我们需要定义**伯努利数 (Bernoulli numbers)**：它是一组满足以下母函数的唯一序列

$$\frac{x}{e^x-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_k}{k!}x^k.$$

容易发现 $\frac{x}{e^x-1}+\frac{x}{2}$ 是偶函数。

故

$$B_{2k+1}=0\,(\forall k\geq 1).$$

接着，我们引入**伯努利多项式**，也通过母函数定义：

$$\frac{xe^{tx}}{e^x-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_k(t)}{k!}x^k. \tag{1}$$

显然有 $B_k(0)=B_k$，接下来我们陈述一些结论：

我们尝试对母函数进行分解:

$$\begin{aligned}\frac{xe^{tx}}{e^x-1} &= \frac{x}{e^x-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^kx^k}{k!}\\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}x^n\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^kx^k}{k!}\right)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{B_kt^{n-k}}{k!\cdot(n-k)!}\right)x^n.\end{aligned} \tag{2}$$

比较系数知:

$$B_n\left(t\right)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_kt^{n-k}, \tag{3}$$

再对其求导:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}B_n\left(t\right) &= \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}\left(n-k\right)B_kt^{n-1-k}\\ &= n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}B_kt^{n-1-k}\\ &= nB_{n-1}\left(t\right).\end{aligned} \tag{4}$$

得到这些结论后，考虑伯努利多项式的 Fourier 展开

为方便起见，设:

$$B_n\left(t\right)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\left(2\pi kt\right)+b_k\sin\left(2\pi kt\right)\right).$$

由于奇数项的伯努利数为 0，再代入 $t=0$，可以设:

$$B_{2m}=\frac{a_{0,m}}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_{k,m}. \tag{5}$$

下面计算系数:

$$a_{0,m}=2\int_0^1 B_{2m}\left(t\right)dt=\frac{2}{2m+1}B_{2m+1}\left(t\right)\Big|_0^1=0.$$

故 (5) 式可改写为:

$$B_{2m}=\sum_{k=1}^{\infty}a_{k,m}. \tag{6}$$

又因为有:

$$
\begin{aligned}
a_{k,m} &= 2\int_0^1 B_{2m}(t)\cos(2\pi kt)\,dt \\
&= 2B_{2m}(t)\cdot\frac{\sin(2\pi kt)}{2\pi k}\bigg|_0^1 + \frac{2\cdot 2m}{2\pi k}\int_0^1 B_{2m-1}(t)\left(-\sin(2\pi kt)\right)dt \\
&= \frac{2m}{2\pi k}\left(\left(2B_{2m-1}(t)\cdot\frac{\cos(2\pi kt)}{2\pi k}\bigg|_0^1\right) - \frac{2(2m-1)}{2\pi k}\int_0^1 B_{2m-2}(t)\cos(2\pi kt)\,dt\right) \\
&= -\frac{2\cdot 2m(2m-1)}{(2\pi k)^2}\int_0^1 B_{2m-2}(t)\cos(2\pi kt)\,dt \\
&= -\frac{2\cdot 2m(2m-1)}{(2\pi k)^2}a_{k,m-1}.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

因此我们只需计算 $a_{k,1}$:

$$
\begin{aligned}
a_{k,1} &= 2\int_0^1\left(t^2-t+\frac{1}{6}\right)\cos(2\pi kt)\,dt \\
&= \frac{1}{\pi k}\left(t^2-t+\frac{1}{6}\right)\sin(2\pi kt)\bigg|_0^1 - \frac{1}{\pi k}\int_0^1(2t-1)\sin(2\pi kt)\,dt \\
&= \frac{1}{\pi k}\cdot\frac{1}{2\pi k}(2t-1)\cos(2\pi kt)\bigg|_0^1 - \frac{1}{\pi k}\cdot\frac{2}{2\pi k}\int_0^1\cos(2\pi kt)\,dt \\
&= \frac{1}{(\pi k)^2}
\end{aligned}
\tag{8}
$$

从而由数学归纳法知

$$
a_{k,m} = \frac{2\cdot(-1)^{m-1}(2m)!}{(2\pi k)^{2m}}. \tag{9}
$$

将 (9) 式代回 (6) 式，有:

$$
\begin{aligned}
B_{2m} &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2\cdot(-1)^{m-1}(2m)!}{(2\pi k)^{2m}} \\
&= \frac{2\cdot(-1)^{m-1}(2m)!}{(2\pi)^{2m}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2m}} \\
&= \frac{2\cdot(-1)^{m-1}(2m)!}{(2\pi)^{2m}}\zeta(2m).
\end{aligned}
$$

移项得:

$$
\zeta(2m) = \frac{B_{2m}(2\pi)^{2m}}{2(2m)!}\cdot(-1)^{m-1}. \tag{10}
$$

$\square$

3、(有限域上线性空间的子空间计数问题) 设 $\mathbb{F}_q$ 为 q 阶的有限域，$V=\mathbb{F}_q^n$ 为 $\mathbb{F}_q$ 上的 n 维线性空间，我们定义 $\binom{n}{k}_q$ 为 V 的 k 维线性子空间数目，称为**高斯二项式系数 (Gaussian binomial coefficient)**。我们下面的主要目标是导出其表达式，并寻找其与二项式系数 $\binom{n}{k}$ 的联系。

(1) 求 V 上的秩 k 线性无关组的数目；

(2) 求 k 维线性子空间的基的组数；

(3) (i) 利用 (1)(2) 的结果给出 $\binom{n}{k}_q$ 的表达式；

(ii) 现假设 $q \in \mathbb{R}$，求证：

$$\lim_{q \to 1} \binom{n}{k}_q = \binom{n}{k}.$$

(4) 求 V 的全体子空间数目。（本小问不要求作答，事实上它可能没有初等的答案。$q = 2$ 的一些结果可以参考：Sum of Gaussian binomial coefficients [n,k] for q=2 and k=0..n.）

供题人：徐思懿

题源：改编自《COUNTING SUBSPACES OF A FINITE VECTOR SPACE》

证明. (a) 线性无关组中的向量显然是非零的，因此首先我们任意选取一个非零向量 $v_1 \in V$，选法有 $q^n - 1$ 种。然后选取 $v_2 \in V$ 与 v_1 线性无关，即 $v_2 \in V - \mathrm{span}\{v_1\}$，选法有 $q^n - q$ 种。

假定我们已经取定了 $v_1, \cdots, v_i$，我们接着选取 $v_{i+1} \in V - \mathrm{span}\{v_1, \cdots, v_i\}$，选法有 $q^n - q^i$ 种。

反复进行上述操作，直到 $i = k$，于是 $\{v_1, \cdots, v_k\}$ 的选法（可能重复）有 $(q^n - 1) \cdots (q^n - q^{k-1})$ 种，剔除掉重复的选法，秩 k 的线性无关组数目为：

$$\frac{(q^n - 1) \cdots (q^n - q^{k-1})}{k!}.$$

(b) 问题等价于求 k 维线性子空间的秩 k 线性无关组的数目，于是在 (a) 的结果中取 $n = k$ 得到

$$\frac{(q^k - 1) \cdots (q^k - q^{k-1})}{k!}.$$

(c) (i) 注意到 $\mathrm{span}\{v_1, \cdots, v_k\}$ 恰为 k 维线性子空间，于是取遍所有秩 k 的线性无关组，可以得到相应数量的 k 维线性子空间，数量是

$$\frac{(q^n - 1) \cdots (q^n - q^{k-1})}{k!}.$$

但不同的线性无关组张成的线性空间可能一致，由 (b) 的结论，每个 k 维线性子空间可能由

$$\frac{(q^k - 1) \cdots (q^k - q^{k-1})}{k!}$$

个线性无关组张成，因此将二者相除，可以得到

$$\binom{n}{k}_q = \frac{(q^n - 1) \cdots (q^n - q^{k-1})}{(q^k - 1) \cdots (q^k - q^{k-1})}.$$

(ii) 由 L'Hôpital 法则，容易得到

$$\lim_{q \to 1} \frac{q^n - q^i}{q^k - q^i} = \lim_{q \to 1} \frac{q^{n-i} - 1}{q^{k-i} - 1} = \lim_{q \to 1} \frac{(n-i) q^{n-i-1}}{(k-i) q^{k-i-1}} = \frac{n-i}{k-i}$$

对 $i=0,\cdots,k-1$ 成立，于是相乘得

$$\lim_{q\to 1}\binom{n}{k}_q=\lim_{q\to 1}\frac{q^n-1}{q^k-1}\cdots\lim_{q\to 1}\frac{q^n-q^{k-1}}{q^k-q^{k-1}}=\frac{n\cdots(n-k+1)}{k\cdots 1}=\binom{n}{k}.$$

□

4、S_n 和 S'_n 表示两个独立的直线上简单对称随机游走，且 $S_0=S'_0=0$，定义 **“懒”随机游走**：

$$R_n=\frac{1}{2}(S_n-S'_n).$$

(1) 若事件“质点从原点出发后存在某个时刻回到原点”发生的概率为 1，则称该随机游走是常返的。判断“懒”随机游走 R_n 的常返性，并说明理由；

(2) 定义 $T=\inf\{n\in\mathbb{N}^*:R_n=0\}$，求 T 的分布列。

提示：可引入

$$P_n=\mathbb{P}(R_1>0,R_2>0,\cdots,R_{n-1}>0,R_n=0),\ P_0=0,$$

$$Q_n=\mathbb{P}(R_1\geq 0,R_2\geq 0,\cdots,R_{n-1}\geq 0,R_n=0),\ Q_0=1.$$

(3) 证明：对 $\forall\delta>0$，均有

$$\frac{R_n}{n^{\frac{1}{2}+\delta}}\xrightarrow{\text{a.s.}}0.$$

供题人：宗语轩

证明. (1) 我们先证明一个引理：

引理: 记 $p_{00}^{(n)}$ 表示从原点出发的质点，经过 n 步后又回到原点的概率，则该随机游走是常返的当且仅当

$$\sum_{n=1}^{\infty}p_{00}^{(n)}=+\infty.$$

引理的证明: 定义 $N_0=\sum_{n=1}^{\infty}I_{\{R_n=0\}}$ 表示质点经过点 0 的次数，$\tau_m^k=\inf\left\{n\geq\tau_m^{k-1}:R_n=m\right\}$，$\tau_m^0=0$，$\rho_0$ 表示事件 ‘‘之后存在某个时刻回到原点" 发生的概率，显然 $0\leq\rho_0\leq 1$。由定义知，$\rho_0=1$ 等价于该随机游走常返，$\mathbb{P}(\tau_0^1-\tau_0^0<\infty)=\rho_0$，同时我们有 $\tau_m^{k+1}-\tau_m^k$ 与 $\tau_m^k-\tau_m^{k-1}$ 独立同分布 (即为强马氏性)，故 $\tau_m^{k+1}-\tau_m^k\overset{d}{=}\tau_m^1-\tau_m^0$。由此可推得

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N_0\geq k)&=\mathbb{P}(\tau_0^k<\infty)=\mathbb{P}(\tau_0^k<\infty,\tau_0^{k-1}<\infty)=\mathbb{P}(\tau_0^k-\tau_0^{k-1}<\infty,\tau_0^{k-1}<\infty)\\&=\mathbb{P}(\tau_0^k-\tau_0^{k-1}<\infty)\mathbb{P}(\tau_0^{k-1}<\infty)=\mathbb{P}(\tau_0^1-\tau_0^0<\infty)\mathbb{P}(\tau_0^{k-1}<\infty)\\&=\rho_0\mathbb{P}(\tau_0^{k-1}<\infty)\\&\ \vdots\\&=\rho_0^k.\end{aligned}$$

利用 Fubini 定理，我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty}p_{00}^{(n)}=\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{E}_0[I_{\{R_n=0\}}]=\mathbb{E}_0[N_0]=\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}(N_0\geq k)=\sum_{k=1}^{\infty}\rho_0^k.$$

而

$$\sum_{k=1}^{\infty}\rho_0^k=\begin{cases}+\infty, & \rho_0=1,\\ \frac{1}{1-\rho_0}<\infty, & 0\le\rho_0<1.\end{cases}$$

故引理得证。

回到原题。我们有

$$\begin{aligned}p_{00}^{(n)}&=\mathbb{P}(R_n=0)=\mathbb{P}(S_n=S_n')=\sum_{k=-n}^{n}\mathbb{P}(S_n=S_n'=k)=\sum_{k=-n}^{n}(\mathbb{P}(S_n=k))^2\\&=\frac{1}{4^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2\\&=\frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}.\end{aligned}$$

利用 Stirling 公式 $n!\sim\sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n\ (n\to\infty)$ 可得 $p_{00}^{(n)}=O(n^{-\frac{1}{2}})$，因此

$$\sum_{k=1}^{n}p_{00}^{(k)}=+\infty.$$

由引理知 R_n 常返。

(2) 引入

$$P_n=\mathbb{P}(R_1>0,R_2>0,\cdots,R_{n-1}>0,R_n=0),P_0=0,$$

$$Q_n=\mathbb{P}(R_1\ge0,R_2\ge0,\cdots,R_{n-1}\ge0,R_n=0),Q_0=1.$$

一方面,

$$\{R_0=0,R_1>0,R_2>0,\cdots,R_{n-1}>0,R_n=0\}$$

与

$$\left\{\frac{X_1-X_1'}{2}=1\right\}\bigcup\{R_1=1,R_2\ge1,\cdots,R_{n-2}\ge1,R_{n-1}=1\}\bigcup\left\{\frac{X_n-X_n'}{2}=-1\right\}$$

一一对应。且

$$\{R_1=1,R_2\ge1,\cdots,R_{n-2}\ge1,R_{n-1}=1\}$$

与

$$\{R_0=0,R_1\ge0,\cdots,R_{n-3}\ge0,R_{n-2}=0\}$$

一一对应。结合 $P_0=0,P_1=\frac{1}{2}$，因此有

$$P_n=\frac{1}{16}Q_{n-2}+\frac{1}{2}\delta_{1,n}.$$

另一方面, 考虑 0 的首达时，即

$$\{R_1\ge0,\cdots,R_{n-1}\ge0,R_n=0\}$$

与

$$\bigsqcup_{k=1}^{n}(\{R_1>0,R_2>0,\cdots,R_{k-1}>0,R_k=0\}\cup\{R_{k+1}\ge0,\cdots R_{n-1}\ge0,R_n=0\})$$

一一对应。结合 $Q_0=1$, 有

$$Q_n=\sum_{k=1}^{n}P_kQ_{n-k}+\delta_{0,n}.$$

记序列 $\{P_n\},\{Q_n\}$ 的母函数 $P(s),Q(s)$，则有

$$P(s)=\frac{1}{16}s^2Q(s)+\frac{1}{2}s,\qquad Q(s)=P(s)Q(s)+1.$$

联立可解得

$$P(s)=\frac{1}{2}+\frac{s}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{1-s}.$$

记序列 $\{\mathbb{P}(T=n)\}$ 的母函数是 $T(s)$，则有

$$T(s)=2\left(P(s)-\frac{s}{2}\right)+\frac{s}{2}=1-\sqrt{1-s}=-\sum_{k=1}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{k}(-s)^k=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-3)!!}{2^kk!}s^k.$$

因此

$$\mathbb{P}(T=n)=\frac{(2n-3)!!}{2^nn!}.$$

(3) 令 $Y_i=\frac{1}{2}(X_i-X_i')$，则 $R_n=\sum_{k=1}^{n}Y_k$，Y_k 独立同分布且奇阶矩为 0，偶阶矩为 $\frac{1}{2}$。

引理： 证明：对 $\forall k\in\mathbb{N}*$，均有

$$\mathbb{E}\left[\left(\frac{R_n}{\sqrt{n}}\right)^k\right]\to\frac{1}{2^{\frac{k}{2}}}\gamma_k,n\to\infty.$$

其中 $\gamma_{2m-1}=0,\quad\gamma_{2m}=(2m-1)!!$。

引理的证明： LHS 展开后非零项 $\mathbb{E}[X_{i_1}\cdots X_{i_k}]$ 必可写为形如 $\mathbb{E}[X_{i_1}^{a_1}\cdots X_{i_m}^{a_m}],i_1\neq\cdots\neq i_m$, 且 $a_1,\cdots,a_m\geq 2$。因 $a_1+\cdots+a_m=k$, 则 $m\leq\left[\frac{k}{2}\right]$，表明 k 为奇数时，

$$\text{LHS}=n^{-\frac{k}{2}}O(n^m)\to 0.$$

当 k 为偶数时，主项必在 $m=\frac{k}{2}$ 时取到，这时 $a_1=a_2=\cdots=a_m=2$，从 $i_1,i_2,\cdots,i_{2m-1},i_{2m}$ 两两配对，配对总数是 $\gamma_k=(k-1)!!$。对每一种给定的配对方式，对应极限

$$\sum_{\substack{i_1,\cdots,i_k\\ \text{一种配对}}}\frac{1}{2^m}\cdot\frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{n^m}\to\frac{1}{2^{\frac{k}{2}}}.$$

故引理得证。

回到原题。利用上述引理，取正偶数 k，使得 $\delta k>1$，对 $\forall\varepsilon>0$，当 n 充分大时，有

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{R_n}{n^{\frac{1}{2}+\delta}}\right|>\varepsilon\right)\leq\frac{1}{\varepsilon^kn^{\delta k}}\mathbb{E}\left[\left(\frac{R_n}{\sqrt{n}}\right)^k\right]\leq\frac{\gamma_k}{\varepsilon^kn^{\delta k}}$$

因此

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}\left(\left|\frac{R_n}{n^{\frac{1}{2}+\delta}}\right|>\varepsilon\right)\leq\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\gamma_k}{\varepsilon^kn^{\delta k}}<+\infty.$$

利用 Borel-Cantelli 引理即得

$$\frac{R_n}{n^{\frac{1}{2}+\delta}}\xrightarrow{\text{a.s.}}0.$$

$\square$

总结：这道题引入了 ‘‘懒" 随机游走的背景，但是所求的几个问题都是概率论和随机游走中非常经典的问题，用到的方法殊途同归。(1) 中出现的引理是马氏链中常见的等价命题，常返性转化为判断 $p_{00}^{(n)}$ 构成的级数是否发散；(2) 是随机游走中经典的数列母函数方法，得到母函数的递推关系后可以精确求解，最后通过幂级数转化得到所求分布列；(3) 涉及到经典的矩方法与组合计数，选择合适的高阶矩，再通过高阶矩 Markov 不等式结合 Borel-Cantelli 引理即得。

5、令 $S=(s_0,s_1,s_2,\cdots)$ 为一正整数列。我们称 S 是**次指数增长**的，如果 $s_n\leqslant 2^{2^{f(n)}},\forall n\in\mathbb{N}$，其中 $f\colon\mathbb{N}\to\mathbb{R}_+$ 满足 $\dfrac{f(n)}{\log_2 n}\to 0\ (n\to\infty)$。

求证：如果正整数列 S 是严格递增且次指数增长的，那么

$$\mathbb{P}_S\colon=\{p\text{ 是素数}\colon\exists\, n\in\mathbb{N},p\mid s_n\}$$

是无穷的。

供题人：张哲琛

题源：改编自《数学天书中的证明》（中文第五版）Page6-8

证明. 反证法。设 $\mathbb{P}_S\colon=\{p_1,\cdots,p_k\}$ 有限。对于 $n\in\mathbb{N}$，令

$$s_n=p_1^{\alpha_{n1}}\cdots p_k^{\alpha_{nk}},\quad \alpha_{ni}\geqslant 0,$$

则有

$$2^{\alpha_{n1}+\cdots+\alpha_{nk}}\leqslant s_n\leqslant 2^{2^{f(n)}},$$

即

$$0\leqslant\alpha_{ni}\leqslant\alpha_{n1}+\cdots+\alpha_{nk}\leqslant 2^{f(n)},\quad 1\leqslant i\leqslant k.$$

因此，每个 α_{ni} 有不超过 $2^{f(n)}+1$ 个不同的可能值。这就给出了估计

$$n\leqslant\left(2^{f(n)}+1\right)^k\leqslant 2^{(f(n)+1)k},$$

我们得到

$$k\geqslant\frac{\log_2 n}{f(n)+1},\quad \forall n\in\mathbb{N}.$$

然而这对于足够大的 n 是不可能的，因为当 $n\to\infty$ 时，$\frac{f(n)}{\log_2 n}\to 0$。 $\square$

评论. 注意到对于 $\forall t>1, s_n\leqslant t^{t^{f(n)}}$ 实际上给出的是同一类序列，这里取 $t=2$ 只是为了书写的简洁。这仅仅是聪明的计数的证明在一定意义上是最佳可能。比如说，对于 $s_n=n$，我们得到素数无限；而将 $\{|p(n)|\colon p(n)\neq 0\}$ 按升序排列，其中 $p(x)$ 为任意非常数整系数多项式，我们得到了 Issai Schur 的结果。

关于次指数增长条件，我们指出它不能减弱为 “对于某个 $\varepsilon_0>0,\frac{f(n)}{\log_2 n}<\varepsilon_0$。” 考虑将所有形如 $p_1^{\alpha_1}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 的数按升序排列，其中 $p_1<\cdots<p_k$ 为固定的素数，那么当 $k>\frac{1}{\varepsilon}$ 时，$\log_2 s_n\approx n^{1/k}\implies\frac{\log_2(\log_2 s_n)}{\log_2 n}\approx\frac{1}{k}<\varepsilon$，而根据构造，$\mathbb{P}_S$ 有限。 $\square$

6、设 $\{\gamma_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 满足如下条件：

(1) $\gamma_{-k}=\gamma_k, \forall\, k\in\mathbb{N}$;

(2) $\sum_{k=1}^{\infty}|\gamma_k|<\infty$;

(3) $\forall\, n$，令 $a_{ij}=\gamma_{i-j}, 1\le i,j\le n$，则矩阵 $(a_{ij})_{n\times n}$ 半正定。

考虑函数

$$f(\omega)=\frac{1}{2\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\gamma_k\cos\omega k,\ \omega\in\mathbb{R}.$$

求证：$f(w)$ 是连续函数且值域非负。

供题人：罗迟

证明. $f(w)$ 的连续性由数分的 Weierstrass 定理或者实分析的控制收敛定理可得，下面重点讨论非负性。

由半正定的条件可知，对于任意 n 个实数 c_i, $i=1\cdots n$，我们有

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_ic_j\gamma_{i-j}\ge 0.$$

令 $c_i=\cos\omega i$，可得：

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\gamma_{i-j}\cos\omega i\cos\omega j\ge 0.$$

类似

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\gamma_{i-j}\sin\omega i\sin\omega j\ge 0,$$

所以

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\gamma_{i-j}[\cos\omega i\cos\omega j+\sin\omega i\sin\omega j]\\
=&\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\gamma_{i-j}\cos\omega(i-j)\\
=&\sum_{k=-(n-1)}^{n-1}(n-|k|)\gamma_k\cos\omega k\\
=&n\sum_{k=-(n-1)}^{n-1}\left[1-\frac{|k|}{n}\right]\gamma_k\cos\omega k\ge 0,
\end{aligned}$$

其中，$k=(i-j)$。因此

$$\sum_{k=-(n-1)}^{n-1}\left[1-\frac{|k|}{n}\right]\gamma_k\cos\omega k\ge 0.$$

由 $\{\gamma_k\}$ 绝对收敛性可知，对于任意 $\varepsilon>0$，存在 $N>0$，使得

$$\sum_{k=-\infty}^{-(N+1)}|\gamma_k|+\sum_{k=N+1}^{\infty}|\gamma_k|<\varepsilon.$$

于是，对于 $n>N$。我们有

$$\sum_{k=-n}^{n}\frac{|k|}{n}|\gamma_k|<\sum_{k=-N}^{N}\frac{|k|}{n}|\gamma_k|+\sum_{k=-\infty}^{-(N+1)}|\gamma_k|+\sum_{k=N+1}^{\infty}|\gamma_n|$$
$$<\sum_{k=-N}^{N}\frac{|k|}{n}|\gamma_n|+\varepsilon.$$

在上述不等式两边关于 n 取上极限，由 ε 的任意性，可得

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=-n}^{n}\frac{|k|}{n}|\gamma_k|=0.$$

又由于 $|\gamma_k\cos\omega k|\le|\gamma_k|$。因此

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=-n}^{n}\frac{|k|}{n}\gamma_k\cos\omega k=0.$$

所以

$$f(\omega)=\frac{1}{2\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\gamma_k\cos\omega k=\frac{1}{2\pi}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=-(n-1)}^{n-1}\left[1-\frac{|k|}{n}\right]\gamma_k\cos\omega k\ge 0.$$

其中上式的第二个等号由 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=-n}^{n}\frac{|k|}{n}\gamma_k\cos\omega k=0$ 推出，最后的不等号由

$$\sum_{k=-(n-1)}^{n-1}\left[1-\frac{|k|}{n}\right]\gamma_k\cos\omega k\ge 0$$

以及极限的保号性得出。 □

7、设 A 为一个 n 阶复方阵，考虑多项式 $f(x)=|I-xA|$, $x\in\mathbb{C}$。

证明下列命题等价:

(1) $f(x)$ 为常值多项式。

(2) $\exists\, m\in\mathbb{N}$，使得 $\forall\, m+1\le k\le m+n$, $\mathrm{tr}(A^k)=0$。

供题人：罗迟

证明. 引理 1： $f(x)$ 为常值多项式当且仅当 A 的特征值为 0。

引理 1 的证明： 只需证明: A 存在非零特征值当且仅当 $f(x)=|I-xA|$ 不是常数。

事实上：若 A 存在非零特征值 a，则说明 $|aI-A|=0$，所以，$f(1/a)=|I-\frac{1}{a}A|=0$，另一方面，$f(0)=1$，故 $f(x)$ 不是常值多项式。

反过来，若 $f(x)$ 为常值多项式，则 $\forall x\ne 0$，$f(x)=|I-xA|=f(0)=1$，$\implies 1=|I-xA|=x^n|\frac{1}{x}I-A|\implies\forall\lambda\ne 0, |\lambda I-A|=\lambda^{-n}\ne 0$。

所以，非零复数一定不是 A 的特征值，所以 A 的特征值一定只能是 0。

引理 1 证毕。

引理 2： A 的特征值为 0 当且仅当条件 (2) 成立。

引理 2 的证明： 事实上，考虑 A 的 n 个特征值 $\lambda_1\cdots\lambda_n$，条件 (2) 等价于下列 n 个恒等

式：

$$
\begin{aligned}
&\lambda_1^{m+1}+\cdots+\lambda_n^{m+1}=0,\\
&\lambda_1^{m+2}+\cdots+\lambda_n^{m+2}=0,\\
&\vdots\\
&\lambda_1^{m+n}+\cdots+\lambda_n^{m+n}=0.
\end{aligned}
$$

因此，若 A 的特征值为 0，则上述 n 个方程对任意的 m 都成立。

反过来，假设 A 存在非零特征值，不妨设 $\lambda_1\cdots\lambda_r$ 是 A 的非零互异的特征值。

且设代数重数为 $s_1\cdots s_r$，则上述前 r 个方程变成：

$$
\begin{aligned}
&s_1\lambda_1^{m+1}+\cdots+s_r\lambda_r^{m+1}=0,\\
&s_1\lambda_1^{m+2}+\cdots+s_r\lambda_r^{m+2}=0,\\
&\vdots\\
&s_1\lambda_1^{m+r}+\cdots+s_r\lambda_r^{m+r}=0.
\end{aligned}
$$

将上述方程组看成是 $s_1\cdots s_r$ 的齐次线性方程组，其系数行列式如下：

$$
D=\det\begin{pmatrix}\lambda_1^{m+1} & \lambda_2^{m+1} & \cdots & \lambda_r^{m+1}\\ \lambda_1^{m+2} & \lambda_2^{m+2} & \cdots & \lambda_r^{m+2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \lambda_1^{m+r} & \lambda_2^{m+r} & \cdots & \lambda_r^{m+r}\end{pmatrix}=\prod_{k=1}^{r}\lambda_k^{m+1}\prod_{1\le j<i\le r}(\lambda_i-\lambda_j)\,.
$$

故 $D\neq 0$。

故上述方程组只有零解。故 A 的非零特征值的代数重数均为 0，故 A 特征值均为 0，矛盾，引理 2 证毕。

由引理 1 与引理 2，命题得证。 $\square$

8、设 R 是一个含幺交换环，它包含了一个域 K，且 R 作为 K 线性空间是有限维的，R 上的一个含幺环自同态 ϕ 满足 $\phi^2=\mathrm{id}$。问：

(1) 若 $\mathrm{char}K=p$，p 为素数，则是否 $\phi(K)=K$ 总是成立？证明或举出反例。

(2) 若 $\mathrm{char}K=0$，则是否 $\phi(K)=K$ 总是成立？证明或举出反例。

供题人：葛霖

证明. (1) 有反例 $A=F_p(x,y),K=F_p(x^p,y),\phi:f(x,y)\mapsto f(y,x)$。

(2) 有反例 $A=Q(\sqrt[3]{2},\sqrt{-3}),K=Q(\sqrt[3]{2}),\phi:\sqrt{-3}\mapsto-\sqrt{-3},\sqrt[3]{2}\mapsto(\dfrac{-1-\sqrt{-3}}{2})\sqrt[3]{2}$。 $\square$

9、在一个圆上给出了 2^{500} 个点，它们被随机标记为 $1,2,\ldots,2^{500}$。证明一个人可以选择 100 个不相交的弦来连接这些点中的一些点，使得所选弦端点处的 100 对数字的和相等。

供题人：王乐达

证明. 引理: 在图 G 中, 每个顶点 v 的度为 d_v。则 G 包含一个独立集 S, 使得 $f(G) \le |S|$, 其中

$$f(G)=\sum_{v\in G}\frac{1}{d_v+1}.$$

证明. 对 $n=|G|$ 归纳。$n=1$ 显然；一般地，选择一个度数最小的顶点 v_0，度为 d。删除 v_0 和其所有邻接点 $v_1,\ldots,v_d$ 和所有邻接于 $v_0,v_1,\ldots,v_d$ 的边。这给出了一个新的图 G'。由归纳假设 G'，有独立集 S' 使得 $|S'|\ge f(G')$。由于没有 S' 中的顶点与 v_0 相邻，$S=S'\cup\{v_0\}$ 是 G 的独立集。令 d'_v 是 G' 顶点 v 的度。显然 $d'_v\le d_v$ 对 $\forall v$ 都成立，且 $d_{v_i}\ge d, \forall i=0,1,\ldots,d$，由 v_0 的最小性。因此

$$f(G')=\sum_{v\in G'}\frac{1}{d'_v+1}\ge\sum_{v\in G'}\frac{1}{d_v+1}=f(G)-\sum_{i=0}^{d}\frac{1}{d_{v_i}+1}\ge f(G)-\frac{d+1}{d+1}=f(G)-1.$$

因此 $|S|=|S'|+1\ge f(G')+1\ge f(G)$，归纳完毕。 □

回到原问题，记 $n=2^{499}$ 且画出由所有给定的 $2n$ 个点给出的弦。将所有弦染色为 $3,4,\ldots,4n-1$ 中的一种，根据其端点处的数字之和。对每种颜色 c 考虑图 G_c。它的顶点集是颜色 c 的弦，且如果两弦相交，则它们是 G_c 中的相邻点。令 $f(G_c)$ 具有与引理相同的含义。每条弦 ℓ 将圆分成两个弧，其中一个包含 $m(\ell)\le n-1$ 个给定的点。对 $\forall i=0,1,\ldots,n-2$ 都有 $2n$ 条弦 ℓ 满足 $m(\ell)=i$。这样的弦在相应的图中的度数最多为 i。事实上令 $A_1,\ldots,A_i$ 是由弦 ℓ 确定的任一弧上的所有点，其中 $m(\ell)=i$，颜色为 c。每个 A_j 都是一个颜色为 c 的端点。因此至多 i 条颜色为 c 的弦与 ℓ 相交。因此，对于每个 $i=0,1,\ldots,n-2$，$2n$ 条弦 ℓ 满足 $m(\ell)=i$ 对和 $\sum_c f(G_c)$ 贡献了至少 $\frac{2n}{i+1}$。对 $i=0,1,\ldots,n-2$ 求和，

$$\sum_c f(G_c)\ge 2n\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i}.$$

因为总共有 $4n-3$ 种颜色，存在一种颜色 c 使得

$$f(G_c)\ge\frac{2n}{4n-3}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i}>\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i}.$$

由引理，至少 $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i}$ 对不相交的颜色为 c 的弦，也就是说，在它们的端点处具有的总和 c。只要证明 $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i}\ge 100$ 对于 $n=2^{499}$。事实上

$$\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i}>\sum_{i=1}^{2^{400}}\frac{1}{i}=1+\sum_{k=1}^{400}\sum_{i=2^{k-1}+1}^{2^k}\frac{1}{i}>1+\sum_{k=1}^{400}\frac{2^{k-1}}{2^k}=201>200.$$

这说明结论成立。

综上，原命题成立。 □

10、证明下列命题：任给 $\mathbb{R}^2$ 中的一个三角形 ABC，以及 ABC 中一个点 O，我们称线段 AO、BO、CO 的并为一个 “Y” 型子集。试证明无法找到不可数个互不相交的 “Y” 型子集。

供题人：曾相如

题源：与中法班同学的交流

证明. 不妨用有序对 (A,B,C,O) 来表示一个 “Y” 型 $AO\cup BO\cup CO$。对于一族两两不相交的 “Y” 型子集 $\mathcal{F}$，要证明 $\mathcal{F}$ 可数，我们只需构造一个从 $\mathcal{F}$ 到一可数集的单射。对于 “Y” 型子集 (A,B,C,O)，我们可以取三个有理点 (P,Q,R) 使得 $PQ\cap AO\neq\varnothing$，$QR\cap BO\neq\varnothing$，$RP\cap CO\neq\varnothing$，且均不交在端点处，且 O 落在三角形 PQR 内部（具体地，P、Q、R 可以由 ABC 三边中点微扰得到）。这样，我们便给出了一个映射 $f\colon\mathcal{F}\to\mathbb{Q}^6$。

下面证明 f 是单射。假设存在 $(A,B,C,O),(A',B',C',O')\in\mathcal{F}$，使得两者均被 f 映为 (P,Q,R)。设 $PQ\cap AO=\{U\}$，$QR\cap BO=\{V\}$，$RP\cap CO=\{W\}$，那么三角形 PQR 便被分为四边形 $PUOW$，$QVOU$，$RWOV$ 之并。由于 (A',B',C',O') 与 (A,B,C,O) 不相交，O' 一定落在某个四边形的内部，不妨设 O' 在 $PUOW$ 的内部。但此时 $B'O'$ 想要和线段 QR 相交就必须和折线 UOW 相交，而 UOW 是 (A,B,C,O) 的子集，矛盾。于是 f 是单射，从而 $\mathcal{F}$ 可数。 □

评论. 我们经常需要证明欧氏空间中某些对象构成的集合 $\mathcal{F}$ 是可数的。一般的思路是构造一个 $\mathcal{F}$ 到 $\mathbb{Q}^n$ 的单射，也就是说给每个对象赋予一组有理数标识。这样的单射往往无法典范的构造，一定程度上会依赖于选择公理。

11、证明：对每个 $d\geqslant 2$，存在 $\mathbb{R}^d$ 中 $2\lfloor\frac{\sqrt{6}}{9}(\frac{2}{\sqrt{3}})^d\rfloor$ 个点的点集 $S\subseteq\{0,1\}^d$（单位 d-立方体的顶点）使得这些点只决定锐角（任三点构成的角均是锐角）。

供题人：张哲琛

题源：《数学天书中的证明》（中文第五版）Page125-126

证明. 令 $m:=\lfloor\frac{\sqrt{6}}{9}(\frac{2}{\sqrt{3}})^d\rfloor$，考虑 $3m$ 个 d-立方体的顶点

$$\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_{3m}\in\{0,1\}^d.$$

则它们不决定钝角。我们称 (i,j,k) 正交，如果三个顶点 $\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x}_j,\boldsymbol{x}_k$ 决定以 $\boldsymbol{x}_j$ 为顶点的直角，即标量积

$$\langle\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{x}_j,\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{x}_j\rangle=0,$$

也即

$$x_{i\ell}=x_{j\ell}\text{ 或者 }x_{k\ell}=x_{j\ell},\quad 1\leqslant\ell\leqslant d.$$

对于某个三元组 (i,j,k)，其正交的概率是 $(\frac{3}{4})^d$：它非正交当且仅当存在某个 ℓ_0 使得

$$x_{i\ell_0}=x_{k\ell_0}\neq x_{j\ell_0}.$$

我们一共考虑 $3\binom{3m}{3}$ 个三元组，则 $E(\text{正交三元组})=3\binom{3m}{3}(\frac{3}{4})^d$。因此必定存在一组 $\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_{3m}$ 生成至多 $3\binom{3m}{3}(\frac{3}{4})^d$ 个正交三元组，并且

$$3\binom{3m}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^d<3\frac{(3m)^3}{6}\left(\frac{3}{4}\right)^d=\frac{27}{6}m^3\left(\frac{3}{4}\right)^d\leqslant m.$$

那么我们可以从 $3m$ 个顶点中删除所有正交三元组对应的直角顶点使得剩下的至少 $2m$ 个顶点不决定直角而只决定锐角。 $\square$

评论. 1950 年左右，Paul Erdős 提出了如下猜想：$\mathbb{R}^d$ 上的每个大于 2^d 的点的集合一定会产生至少一个钝角。1962 年 Ludwig Danzer 和 Branko Grünbaum 同时解决了这个猜想和 Victor Klee 提出的另一个不相关问题，有兴趣的同学可以参阅 Martin Aigner 和 Günter M. Ziegler 所著《Proofs from THE BOOK》。Danzer 和 Grünbaum 又提出了下列问题：如果进一步要求所有的角是锐角（换言之不允许直角）会怎么样？以上证明中 Paul Erdös 和 Zoltan Füredi 向我们展示了概率方法的强大力量。关于这个问题目前我知道的是 Danzer 和 Grünbaum 给出了 $2d-1$ 的下界与 2^d-1 的上界，Erdös 和 Füredi 在 1983 年将下界提高至 $2\lfloor\frac{\sqrt{6}}{9}(\frac{2}{\sqrt{3}})^d\rfloor$，而 Balázs Gerencsér 和 Viktor Harangi 在 2017 年进一步给出了惊人的下界 $2^{d-1}+1$，论文为：Acute Sets of Exponentially Optimal Size。 $\square$

12、令 $f\colon \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$，

$$f(x)=\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)}-\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(x-k)^2}.$$

(1) 证明 f 表达式中的级数在定义域内的有界闭集上是一致收敛的，并说明 f 是连续函数。

(2) 证明 f 在 0 处的极限存在，因此可以适当地定义整数处 f 的取值，得到一个在实数上连续的函数，也记为 f。并且这是一个周期函数，于是有界。

(3) 证明

$$f(x)+f\left(x+\frac{1}{2}\right)=4f(2x),$$

并说明 $f\equiv 0$，因此得到

$$\forall x\notin\mathbb{Z},\quad \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)}=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(x-k)^2};\tag{1}$$

$$\forall x\notin\mathbb{Z}+\frac{1}{2},\quad \pi^2(\tan\pi x)'=\frac{\pi^2}{\cos^2(\pi x)}=4\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(2x-2k-1)^2}.\tag{2}$$

(4) 证明

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

(5) 证明

$$\forall x\notin\mathbb{Z}+\frac{1}{2},\quad \pi^{2n}\frac{\tan^{(2n-1)}(\pi x)}{(2n-1)!}=2^{2n}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(2x-2k-1)^{2n}}.$$

特别的，

$$\pi^{2n}\frac{\tan^{(2n-1)}(0)}{(2n-1)!}=2(2^{2n}-1)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2n}}.$$

我们定义 $\zeta(2n)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}k^{-2n}$。

(6) 证明

$$\tan x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(2^{2n}-1)\zeta(2n)}{\pi^{2n}}x^{2n-1},\quad |x|<\pi/2.$$

(7) 证明

$$\pi\tan(\pi x)=8x\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2-4x^2},\quad x\notin\mathbb{Z}+\frac{1}{2}. \tag{3}$$

(8) 证明

$$\frac{\pi}{\sin(\pi x)}=\frac{1}{x}+2x\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{x^2-k^2}.$$

(9) 求不定积分

$$\int\left(\pi\cot(\pi x)-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x.$$

并证明

$$\sin(\pi x)=\pi x\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right). \tag{4}$$

由于被积函数的定义域，仅说明了表达式对 $0<x<1$ 成立，但是两端在 $x=0$ 处极限相同，再考虑奇偶性和周期性，对所有的 $x\in\mathbb{R}$ 也成立。

(10) 证明

$$\frac{2}{\pi}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{4n^2}\right),$$

于是有 **Wallis 公式**：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!\sqrt{2n+1}}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

(11) 证明

$$\pi=\int_{\mathbb{R}}\frac{\sin^2 x}{x^2}\mathrm{d}x.$$

由此证明

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}.$$

下面各问中 $0<p<1$：

(12) 证明下列级数在 $[0,1-\delta]$ 上一致收敛

$$\frac{x^{p-1}}{1+x}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{p+k-1}.$$

(13) 证明

$$\int_0^1\frac{x^{p-1}}{1+x}\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{p+k},\quad \int_1^{\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x}\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{p-k},$$

并证明

$$\int_0^{\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{\sin(p\pi)}.$$

(14) 仿照上述步骤，证明

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{p-1}\ln x}{x-1}\mathrm{d}x = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(p-k)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi p)}.$$

供题人：杨笛龙

证明. (1) 给定有界集合 $A \subset \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$，存在上下界 m, M，使得任取 $x \in A$，都有 $m < x < M$。存在整数 $n < m, N > M$，此时

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(x-k)^2} = \left(\sum_{k=-\infty}^{n-1} + \sum_{k=n}^{N} + \sum_{k=N+1}^{\infty}\right) \frac{1}{(x-k)^2}.$$

此时两个无限求和的分母中 $(x-k)$ 项的符号保持不变，与 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{-2}$ 对比知一致收敛。一致收敛的函数项级数的极限也是连续的，f 在定义域上连续。

(2) 利用 $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$，注意到

$$\lim_{x\to 0} \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)} - \frac{1}{x^2} = \frac{\pi^2}{3}.$$

又因为 f 在原定义域上周期为 1，在整数上定义

$$f(\mathbb{Z}) = \frac{\pi^2}{3} - 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2},$$

得到连续的周期函数 f。此时 f 的值域等于 $f([0,1])$，闭区间上连续函数有界，f 在 $\mathbb{R}$ 上也有界。

(3)

$$\begin{aligned} f(x) + f\left(x + \frac{1}{2}\right) =& \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)} + \frac{\pi^2}{\cos^2(\pi x)} - \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\frac{1}{(x-k)^2} + \frac{1}{(x-k+1/2)^2}\right) \\ =& \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)\cos^2(\pi x)} - 4\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\frac{1}{(2x-2k)^2} + \frac{1}{(2x-2k+1)^2}\right) \\ =& 4\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi 2x)} - 4\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(2x-k)^2} \\ =& 4f(2x). \end{aligned}$$

这说明

$$\left|f\left(\frac{x}{2}\right)\right| + \left|f\left(\frac{x+1}{2}\right)\right| \geq \left|f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right)\right| \geq 4|f(x)|.$$

于是左边两个绝对值中必有一个不小于 $2|f(x)|$。因此得到一个序列 $x_1, x_2, \cdots$ 满足

$$2|f(x_i)| \leq |f(x_{i+1})|.$$

如果存在 $f(x_1)$ 不等于 0，这样取出来的序列就与 f 有界矛盾。故 $f \equiv 0$。直接移项得到

$$\forall x \notin \mathbb{Z}, \quad \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(x-k)^2}.$$

把 $x+1/2$ 代入 x 中，得到

$$\forall x\notin\mathbb{Z}+\frac{1}{2},\quad \pi^2(\tan\pi x)'=\frac{\pi^2}{\cos^2(\pi x)}=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(x-k-1/2)^2}=4\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(2x-2k-1)^2}.$$

(4) 在 (2) 式中令 $x=0$，

$$\pi^2=4\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(2k+1)^2}=8\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}$$

同时

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^2}=\frac{3}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}.$$

(5) 在 (2) 式两端，求 $(2n-2)$ 阶导数 (或者归纳)，得到

$$\forall x\notin\mathbb{Z}+\frac{1}{2},\quad \pi^{2n}\frac{\tan^{(2n-1)}(\pi x)}{(2n-1)!}=2^{2n}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(2x-2k-1)^{2n}}.$$

带入 $x=0$，

$$\pi^{2n}\frac{\tan^{(2n-1)}(0)}{(2n-1)!}=2^{2n}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(2k+1)^{2n}}=2^{2n+1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^{2n}}.$$

利用第 (4) 问中相同的技巧，

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^{2n}}=\frac{2^{2n}-1}{2^{2n}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2n}}.$$

(6) 注意到 $\tan x$ 在原点处的偶数阶导数均为 0，幂级数收敛半径为 $\frac{\pi}{2}$，由第 (5) 问即得。

(7) 在 (2) 式两端分别积分即得。

(8) 因为 $\cot x=-\tan(x+\pi/2)$，在式 (3) 中带入 $(x+1/2)$，得到

$$\pi\cot(\pi x)=\frac{1}{x}+2x\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{x^2-k^2}=\frac{1}{x}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{x-k}+\frac{1}{x+k}\right),\quad x\notin\mathbb{Z}.$$

利用利用 $2\pi/\sin(\pi x)=\pi\cot(\pi x/2)-\pi\cot(\pi(x+1)/2)$，得到

$$\frac{\pi}{\sin(\pi x)}=\frac{1}{x}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^k}{x-k}+\frac{(-1)^k}{x+k}\right)=\frac{1}{x}+2x\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{x^2-k^2}.$$

(9)

$$\int\left(\pi\cot(\pi x)-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=\ln\sin(\pi x)-\ln\pi x+C.$$

由 (8) 得

$$\ln\sin(\pi x)-\ln(\pi x)+C=\sum_{k=1}^{\infty}\ln\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right).$$

令 $x=0$，则 $C=0$。于是

$$\sin(\pi x)=\pi x\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right).$$

(10) 在 (4) 式中令 $x=1/2$ 得到第一个所求式，同时

$$\prod_{n=1}^{k}\left(1-\frac{1}{4n^2}\right)=\frac{(2k-1)!!(2k-1)!!(2k+1)}{2^{2k}k!k!}=\frac{(2k)!(2k)!(2k+1)}{2^{4k}(k!)^4}.$$

两边取 $1/2$ 次幂，对 $k\to\infty$ 取极限即得到第二个式子。

(11) 利用 (1) 式，有

$$1=\frac{1}{\pi^2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{\sin^2(\pi x)}{(x-k)^2}=\frac{1}{\pi^2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{\sin^2(\pi x+k\pi)}{(x+k)^2}=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{\sin^2(\pi x+k\pi)}{(\pi x+k\pi)^2}.$$

再用 πx 代入，上述级数一致收敛，可以逐项积分，

$$\pi=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_0^{\pi}\frac{\sin^2(x+k\pi)}{(x+k\pi^2)}\mathrm{d}x=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{\sin^2 x}{x^2}\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}}\frac{\sin^2 x}{x^2}\mathrm{d}x.$$

分部积分

$$\int_0^a\frac{\sin^2 x}{x^2}\mathrm{d}x=-\frac{\sin^2 a}{a}+\int_0^{2a}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x.$$

令 $a\to\infty$，

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}.$$

(12) 因为 $|x|<1-\delta$，

$$\limsup_{k\to\infty}\sqrt[k]{x^{p+k-1}}=x<1$$

原级数一致收敛。

(13) 由第 (12) 问，一致收敛函数列级数可以逐项积分，

$$\int_0^1\frac{x^{p-1}}{1+x}\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{p+k}.$$

做换元 $y=1/x$，

$$\int_0^1\frac{x^{p-1}}{1+x}\mathrm{d}x=\int_{\infty}^0\frac{y^{1-p}}{1+1/y}\left(-\frac{1}{y^2}\right)\mathrm{d}y=\int_0^1\frac{y^{(1-p)-1}}{1+y}\mathrm{d}y=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{1-p+k}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{p-k}.$$

利用第 (8) 问，相加得到

$$\int_0^{\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x}\mathrm{d}x=\frac{1}{x}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^k}{p+k}+\frac{(-1)^k}{p-k}\right)=\frac{\pi}{\sin(p\pi)}.$$

(14) 级数

$$\frac{x^{p-1}\ln x}{x-1}=\sum_{k=0}^{\infty}-x^{p+k-1}\ln x$$

是一致收敛的。并且对于 $n>-1$，都有

$$\int_0^1 x^n\ln x\mathrm{d}x=-\frac{1}{(n+1)^2}.$$

于是

$$\int_0^1\frac{x^{p-1}\ln x}{x-1}\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(p+k)^2}.$$

换元 $y=1/x$，

$$\int_1^{\infty}\frac{x^{p-1}\ln x}{x-1}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{y^{(1-p)-1}}{y-1}\mathrm{d}y=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(p-k)^2}.$$

两式相加，利用 (1) 式得

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{p-1}\ln x}{x-1}\mathrm{d}x = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(p-k)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2(p\pi)}.$$

□