《瀚海之巅》2022-2023 第 1 期 · 征解

中国科大数学科学学院团委　《瀚海之巅》项目组

日期：2022 年 11 月 1 日

1. 设 E 为 n 维向量空间（给定标准基），线性映射 $f \in \mathcal{L}(E)$，向量 $u_1, \cdots, u_n \in E$。求证：

$$\det(f(u_1), u_2, \cdots, u_n) + \det(u_1, f(u_2), \cdots, u_n) + \cdots + \det(u_1, \cdots, u_{n-1}, f(u_n))$$
$$= \det(u_1, \cdots, u_n)\operatorname{tr}(f).$$

供题人：徐思懿

2. 设 E 为 n 维欧氏空间，$n \geq 2$。取 $n+1$ 个向量 $x_1, \cdots, x_{n+1}$，假设对所有的 $i \neq j$ 都有 $\langle x_i, x_j \rangle < 0$。求证：$x_1, \cdots, x_n$ 构成 E 的一组基。

供题人：罗云杰

3. (1) 矩阵 A, B 满足 $AB - BA = B$, 求证 B 是幂零阵；

   (2) 矩阵 A, B, C 满足 $AB - BA = C, AC = CA$, 求证 C 是幂零阵。

供题人：刘景寒

4. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n \sum_{k=1}^{n} a_k = 2022$。

   (1) 若 $a_n > 0$，证明：数列 $\{a_n\}$ 收敛。并求其极限。

   (2) 若 $a_{n+1}a_n < 0$，证明：

      (2a) 数列 $\{a_n\}$ 发散；

      (2b) 数列 $\{|a_n|\}$ 收敛，并求其极限。

供题人：宗语轩

5. 设 $\{a_n\}$ 为实数数列，定义算术平均值数列 (**Cesàro 求和**):

$$\sigma_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}, n \in \mathbb{N}^*.$$

一般地，数学分析课堂上已证明如下命题：设 $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$，则有 $\lim_{n\to+\infty} \sigma_n = a$。同时举了逆命题不成立的反例。现在继续探究 Cesàro 求和极限：

   (1) 是否存在数列 $\{a_n\}$，使得对 $\forall n \in \mathbb{N}^*$，均有 $a_n > 0$ 且 $\limsup_{n\to+\infty} a_n = \infty$ 但 $\lim_{n\to+\infty} \sigma_n = 0$?

(2) 对 $k \in \mathbb{N}^*$，记 $b_k = a_{k+1} - a_k$。证明：对 $\forall n \geqslant 2$，均有 $a_n - \sigma_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n-1} kb_k$。

(3) 设 $\lim\limits_{n\to+\infty} nb_n = 0$，并且 $\{\sigma_n\}$ 收敛。证明：$\{a_n\}$ 亦收敛。

(4) 设数列 $\{nb_n\}$ 有界，并且 $\lim\limits_{n\to+\infty} \sigma_n = \sigma$。证明：$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \sigma$。

供题人：宗语轩

6.（这道题会向你展示如何优雅地证明实数的完备性的梗概）假设我们尚且不知道实数的存在，但我们已经构建了有序域 $(\mathbb{Q}, +, \times)$，现在我们介绍一种由此定义实数的方式：有理数的 Dedekind 分割。

设 $X \subset \mathbb{Q}$，令 $X' = \mathbb{Q} - X$。如果下面三条性质都成立：

- $X \neq \varnothing$, $X' \neq \varnothing$;
- 对任意 $x \in X$, $x' \in X'$，都有 $x < x'$;
- X 中没有最大元，

我们就称 X 是 $\mathbb{Q}$ 的一个 Dedekind 分割。记 $\mathcal{R}$ 为 $\mathbb{Q}$ 的所有 Dedekind 分割组成的集合。

(1) 验证
$$X_{\sqrt{2}} := \{x \in \mathbb{Q} \mid (x < 0) \vee (x^2 < 2)\}$$
构成 $\mathbb{Q}$ 的一个 Dedekind 分割。这对应于我们熟悉的 $\sqrt{2}$。

(2) 接着我们可以在 $\mathcal{R}$ 上定义序结构。对任意 $X, Y \in \mathcal{R}$，如果 $X = Y$(作为集合)，则称 $X = Y$(作为 Dedekind 分割)；$X \subset Y$ 且 $X \neq Y$，称 $X < Y$。

试验证 $<$ 构成 $\mathcal{R}$ 上的严格全序关系，即满足以下三条：

- $\forall\, X \in \mathcal{R}$, $X \not< X$;
- $\forall\, X, Y, Z \in \mathcal{R}$, $(X < Y) \wedge (Y < Z) \Rightarrow (X < Z)$;
- $\forall\, X, Y \in \mathcal{R}$, $X < Y, X = Y, Y < X$ 有且仅有一条成立。

(3) 证明 $\mathcal{R}$ 满足最小上界原理，即 $\varnothing \neq \mathcal{X} \subset \mathcal{R}$ 有上界，那么它有最小上界。

这样我们就证明了 $\mathcal{R}$ 的完备性，但注意，这里并不能简单地说是实数的完备性，因为我们尚且没有说明 $\mathcal{R}$ 是我们想要的实数域，我们还没有定义它上面的代数结构。

供题人：徐思懿

7. 证明任一酉矩阵是一个实正交矩阵和一个复对称矩阵的乘积。

供题人：王乐达

8. 从单位正方形中均匀地随机独立选取四个点，试求它们构成的四边形为凸四边形的概率。

供题人：王乐达

9. 设 $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为递增有界的 C^1- 函数，证明：微分方程

$$(E): y''+y=g$$

在 $\mathbb{R}$ 上所有解都是有界的。

供题人：罗云杰

10. 证明下列命题:
   (1) $\mathbb{C}[x,y]/(x^2+y^2-1)$ 是 UFD，
   (2) $\mathbb{R}[x,y]/(x^2+y^2-1)$ 不是 UFD。

供题人：曾相如

11. 设 $\{A_\alpha\}$ 是一族可数集，集族的基数为 $\mathfrak{m}$，其中 $\mathfrak{m}$ 无限。证明 $\bigcup_\alpha A_\alpha$ 的基数至多为 $\mathfrak{m}$。

供题人：曾相如

12. 利用四元数可以证明“四平方和定理”，即任意正整数可以表为 4 个整数的平方和。试按下列步骤给出完整证明:
   (1) 设 Q 为四元数环 (实数域上)，$R=\mathbb{Z}[i,j,k,\ \frac{1+i+j+k}{2}]\subset Q$。证明 R 的任意左理想都是由一个元生成，且生成元可以取在 $\mathbb{Z}[i,j,k]$ 中。
   (2) 证明对任意素数 p，在 $\mathbb{F}_p$ 中方程 $x^2+y^2+1=0$ 有解。
   (3) 证明对任意素数 p，存在 $\alpha\in\mathbb{Z}[i,j,k]$ 使得 $|\alpha|^2=p$。($|\alpha|^2=\alpha\overline{\alpha}$ 其中若 $\alpha=a+bi+cj+dk,\ \overline{\alpha}=a-bi-cj-dk$)
   (4) 证明对任意正整数 n，存在 $\alpha\in\mathbb{Z}[i,j,k]$ 使得 $|\alpha|^2=n$，故 n 可以表为 4 个整数的平方和。

供题人：葛霖

13. 已知复数 u_1,u_2,u_3 满足 $u_1^2+u_2^2+u_3^2=0$，$u_1^3+u_2^3+u_3^3=14$，$u_1^4+u_2^4+u_3^4=40$ 且 $|u_1|\le|u_2|\le|u_3|$，若在单位开圆盘 $\mathbb{D}=\{z:|z|<1\}$ 上的全纯函数 $f(z)$ 满足

$$|\frac{f(z)}{z}|\ge\frac{|u_1f'(0)|}{(1-|z|)^2}+|\frac{u_2f(0)}{z}|,\ \forall\,|u_3z|=1.$$

试证明 $\exists z_1,z_2\in\mathbb{D}$ 使得 $z_1\ne z_2, f(z_1)=f(z_2)$。

供题人：葛霖

14. 在机器学习的许多算法中，常常会遇见如下的迭代方式:

$$Q_{n+1}=Q_n+\alpha_n(R_n-Q_n),\ n\in\mathbb{N}.$$

其中，$Q_0=R_0$，$\alpha_n\in(0,1]$ 称为步长，$\{R_n,n\in\mathbb{N}\}$ 是一列 i.i.d. 的随机变量，满足 $\mathbb{E}R_n=0$，其二阶矩存在且不为 0。为方便起见，设 $\alpha_0=1$。

此外，下列关于步长的条件称为**“好”条件**:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n=\infty \quad 且 \quad \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n^2<\infty.$$

(1) 请用 $R_k(0 \le k \le n)$ 表示出 Q_{n+1}。

(2) 若步长恒为常数 $c \in (0,1)$，当 n 趋于无穷时，$Q_n \xrightarrow{P} 0$ 是否一定成立，并给出证明或反例。

(3) 证明：若步长满足“好”条件，当 n 趋于无穷时，$Q_n \xrightarrow{P} 0$。

(4) 证明：若步长满足“好”条件，当 n 趋于无穷时，$Q_n \xrightarrow{a.s.} 0$。

(5) (本问征解不作要求) 你能否找出更好的条件，使得当 n 趋于无穷时，$Q_n \xrightarrow{a.s.} 0$?（此处“更好”的含义是：它不能是“好”条件的充分条件，并且尽可能简洁，最好是“好”条件的必要条件。）

注: $Q_n \xrightarrow{P} 0$ 表示 Q_n 依概率收敛于 0，$Q_n \xrightarrow{a.s.} 0$ 表示 Q_n 几乎必然收敛于 0。

供题人：罗迟

15. 已知数列 $\{x_n\}$，$x_1 > 0$。

(1) 若 $x_{n+1} = \ln(1 + x_n)$。一般地，数学分析课堂上已求得 $\lim\limits_{n\to+\infty} nx_n = 2$。求极限

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n(nx_n - 2)}{\ln n}.$$

(2) 若 $x_{n+1} = \sin x_n$。一般地，数学分析课堂上已求得 $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{n}{3}}x_n = 1$。试找出一个仅与 n 有关的单调递增函数 $g(n)$，使得极限

$$\lim_{n\to+\infty} g(n)\left(\sqrt{\frac{n}{3}}x_n - 1\right)$$

存在且不为 0。并求其极限。

(3) (本问征解不作要求) 试将 (1)(2) 问的结果总结为一般性结论。

供题人：吴天

注：第 2 期供题与第 1 期征解的截止日期是 2022 年 11 月 30 日，欢迎大家踊跃投稿，有关投稿事宜请参见“项目组介绍 + 投稿须知”