《瀚海之巅》2022-2023 第 1 期 · 征解解答

中国科大数学科学学院团委　《瀚海之巅》项目组

日期：2022 年 12 月 23 日

1、设 E 为 n 维向量空间（给定标准基），线性映射 $f \in \mathcal{L}(E)$，向量 $u_1, \cdots, u_n \in E$。求证：

$$
\begin{aligned}
&\det(f(u_1), u_2, \cdots, u_n) + \det(u_1, f(u_2), \cdots, u_n) + \cdots + \det(u_1, \cdots, u_{n-1}, f(u_n)) \\
=&\det(u_1, \cdots, u_n)\operatorname{tr}(f).
\end{aligned}
$$

供题人：徐思懿

证明. (1)（证法一）不妨设 $u_k = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ki}e_i$，则 $f(u_k) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ki}f(e_i)$，设 $f(e_t) = \sum\limits_{k=1}^{n} c_{tk}e_k$，于是有 $f(u_k) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ki}\sum\limits_{t=1}^{n} c_{it}e_t = \sum\limits_{t=1}^{n} e_t\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ki}c_{it}\right)$。记 A_{ij} 为 $(a_{ij})_{n\times n}$ 的第 ij 元的代数余子式，那么

$$
\begin{aligned}
LHS &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(\sum_{i=1}^{n} a_{ji}c_{ik})A_{jk} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n} a_{ji}A_{jk})c_{ik} \\
&= \sum_{k=1}^{n}(\det A \cdot c_{kk}) = \det A \cdot \operatorname{tr}(f) = RHS.
\end{aligned}
$$

(2)（证法二）注意到线性映射的迹与选取的基无关，当 $(u_1, \cdots, u_n)$ 线性无关时，写出 f 在这组基下的矩阵表示，容易得到所证等式成立。因此，只需考虑 $(u_1, \cdots, u_n)$ 线性相关的情形。此时，由于可逆矩阵在 $\mathbb{R}^n$ 中稠密，可以取一列矩阵 $\{A_n\} \to (u_1, \cdots, u_n)$。由于线性映射 f 及行列式函数 (多项式) 都是连续的，取极限就得到想证的结果。

(3)（证法三）设 f 的矩阵表示为 A，则

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{tr}(A)\exp(\operatorname{tr}(At))\det(u_1, \cdots, u_n) \\
=&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\det(\exp(At))\det(u_1, \cdots, u_n) \\
=&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\det(e^{At}u_1, \cdots, e^{At}u_n) \\
=&\det(Ae^{At}u_1, e^{At}u_2, \cdots, e^{At}u_n) + \cdots + \det(e^{At}v_1, \cdots, e^{At}v_{n-1}, Ae^{At}v_n).
\end{aligned}
$$

其中第一个等号因为 $\det(\exp(At)) = \exp(\mathrm{tr}(A))$，这可以由 At 的 Jordan 标准型直接得到。最后一个等号实际上是如下结论：

$f(x) = \det(a_{ij}(x))_{n\times n}$，则 $f'(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} f_i(x)$，其中 $f_i(x)$ 是仅对第 i 列元素求导后的行列式。

证明：对 $f(x)$ 全展开后求导：

$$f'(x) = \sum_{\tau\in S_n} \mathrm{sgn}(\tau)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\prod_{j=1}^{n} a_{j,\tau(j)}(x)\right] = \sum_{\tau\in S_n} \mathrm{sgn}(\tau)\sum_{j=1}^{n}\left(a'_{j,\tau(j)}(x)\prod_{k\neq j} a_{k,\tau(k)}(x)\right).$$

交换求和顺序则得到等式右侧 n 个行列式的全展开。

□

评论. 本身题目并不困难，即使是暴力计算也并不耗费多少功夫（证法一）。不过投稿的同学没有采用暴力计算的，其中杨笛龙同学提供了证法二与证法三，吴凯同学与撸题猫（昵称）同学做法与证法二相似，不过吴凯同学在处理 $u_1, \cdots, u_n$ 线性相关的情况时是对这个向量组的秩是否为 $n-1$ 进行了讨论，并证明等式左边为零（因为等式右边显然为零），其过程略微繁琐，感兴趣的同学可以自行验证。而撸题猫同学采用了摄动法进行求解，内涵与杨笛龙同学是一致的。

2、设 E 为 n 维欧氏空间，$n\geq 2$。取 $n+1$ 个向量 $x_1, \cdots, x_{n+1}$，假设对所有的 $i\neq j$ 都有 $\langle x_i, x_j\rangle < 0$。求证：$x_1, \cdots, x_n$ 构成 E 的一组基。

供题人：罗云杰

证明. 若不然，显然有 $x_1, \cdots, x_{n+1}$ 不为零，不妨设 $x_1 = \sum\limits_{k=2}^{n} a_k x_k$，$a_k$ 不全为零。

记 $A = \{2\leq k\leq n \mid a_k > 0\}$，$B = \{2\leq k\leq n \mid a_k < 0\}$，故 $x_1 - \sum\limits_{k\in B} a_k x_k = \sum\limits_{k\in A} a_k x_k$。则

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle\sum_{k\in A} a_k x_k \mid \sum_{k\in A} a_k x_k\rangle = \langle\sum_{k\in A} a_k x_k, x_1 - \sum_{k\in B} a_k x_k\rangle \\ &= \sum_{k\in A} a_k\langle x_k, x_1\rangle - \sum_{k_1\in A}\sum_{k_2\in B} a_{k_1}a_{k_2}\langle x_{k_1}, x_{k_2}\rangle < 0. \end{aligned}$$

矛盾！

故 $\{x_1, \cdots, x_n\}$ 为 E 的一组基。 □

3、

(1) 矩阵 A, B 满足 $AB - BA = B$, 求证 B 是幂零阵；

(2) 矩阵 A, B, C 满足 $AB - BA = C, AC = CA$, 求证 C 是幂零阵。

供题人：刘景寒

证明. (1) 设 $B=P^{-1}JP$，J 为 B 的 Jordan 标准型。则 $PAP^{-1}J-JPAP^{-1}=J$，PAP^{-1} 与原始的 A 一一对应，不妨简记为 A，则 $AJ-JA=J$。

设 $J=\begin{pmatrix}J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_s\end{pmatrix}$，这其中每个 Jordan 块的特征值为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s$。同样地把 A 分块成 $(A_{ij})_{s\times s}$。

引理：若 $AX=XB$, $(\varphi_A(\lambda),\varphi_B(\lambda))=1$，则 $X=O$。

证明：由 $(\varphi_A(\lambda),\varphi_B(\lambda))=1$，$\exists\, f(\lambda),g(\lambda)\ s.t.\ f(\lambda)\varphi_A(\lambda)+g(\lambda)\varphi_B(\lambda)=1$，于是 $f(B)\varphi_A(B)=I_n$，从而 $\varphi_A(B)$ 可逆。由 $AX=XB$，$\varphi_A(A)X=X\varphi_A(B)=O\Rightarrow X=O$。

回到原题，我们得知 $k\neq l$ 时 $A_{kl}J_l-J_kA_{kl}=0$，

由引理 $k\neq l$ 时 $A_{kl}=0$，只用考虑 $A=\begin{pmatrix}A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_s\end{pmatrix}$。

那么有：$A_iJ_i-J_iA_i=J_i$，从而 $\mathrm{tr}A_iJ_i-\mathrm{tr}J_iA_i=\mathrm{tr}J_i$，所以 J_i 特征值为 0，也即每一个 J_i 特征值均为 0。因此 B 是幂零阵。

(2) 仿照上一问的想法，设 $C=P^{-1}JP$，J 为 C 的 Jordan 标准型。

有 $PAP^{-1}J=JPAP^{-1}$，设 $J=\begin{pmatrix}J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_s\end{pmatrix}$，这其中每个 Jordan 块的特征值为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s$。

相同地，使用引理，可以证明 $PAP^{-1}=\begin{pmatrix}A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_s\end{pmatrix}=A'$

进一步，$P^{-1}A'PB-BP^{-1}A'P=P^{-1}JP$

$\Rightarrow A'PBP^{-1}-PBP^{-1}A'=J=\begin{pmatrix}J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_s\end{pmatrix}$

与上一问几乎一致地，设 $PBP^{-1}=B'$ 则与 $J=\begin{pmatrix}J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_s\end{pmatrix}$ 相对应的每个小块都有

$$\mathrm{tr}(A'B')_i=\mathrm{tr}(B'A')_i.$$

故每个 Jordan 块特征值均为零，所以 C 是幂零阵。

(3) 我们证明 $\mathrm{tr}(C^k)=0$，从而利用 Jordan 阵证明 C 幂零。这个证法比较多地使用到

了交换的性质和操作。

$$\operatorname{tr}(C)=\operatorname{tr}(AB-BA)=0. \tag{1}$$

进而继续考虑 $\operatorname{tr}(C^k)=0$，

$$\operatorname{tr}(C^{k+1})=\operatorname{tr}(ABC^k-BAC^k). \tag{2}$$

因为 A,B 交换，所以

$$\operatorname{tr}(C^{k+1})=\operatorname{tr}(ABC^k-BAC^k)=\operatorname{tr}(A(BC^k)-(BC^k)A)=0, \tag{3}$$

那么 $\operatorname{tr}(C^k)=0$。这是一道经典的 Jordan 标准型题目，考察 Jordan 标准型我们即可得知 C 的所有特征值均为 0。那么 C 是幂零阵。

□

评论. 1. 这两道题目有趣的地方在于不完全地拆开每一个 Jordan 阵，而是仅仅把特征值相同的合并在一起视为一个整体来研究。这本质上还是因为带证命题等价为所有特征值均为零。实际上都在探讨 $AB-BA$ 形式的问题。下面的例题给出了更加细致的刻画，相信会对每一位读者大有脾益。

2.（李炯生《线性代数》Page300 例 9）求出和 n 阶复方阵 $\boldsymbol{A}$ 可交换的所有 n 阶复方阵 $\boldsymbol{B}$。

解：设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_t$ 是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的全部不同的特征值, 并且方阵 $\boldsymbol{A}$ 的初等因子组为

$$\begin{aligned}
&(\lambda-\lambda_1)^{m_{11}},(\lambda-\lambda_1)^{m_{12}},\cdots,(\lambda-\lambda_1)^{m_{1k_1}},\\
&(\lambda-\lambda_2)^{m_{21}},(\lambda-\lambda_2)^{m_{22}},\cdots,(\lambda-\lambda_2)^{m_{2k_2}},\\
&\cdots\\
&(\lambda-\lambda_t)^{m_{t1}},(\lambda-\lambda_t)^{m_{t2}},\cdots,(\lambda-\lambda_t)^{m_{tk_t}},
\end{aligned}$$

则

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=I=\operatorname{diag}(\boldsymbol{J}_{11},\boldsymbol{J}_{12},\cdots,\boldsymbol{J}_{1k_1},\cdots,\boldsymbol{J}_{t1},\boldsymbol{J}_{t2},\cdots,\boldsymbol{J}_{t'k_t})$$

其中 $\boldsymbol{P}$ 是某个 n 阶可逆复方阵，$\boldsymbol{J}_{kt}$ 是属于初等因子 $(\lambda-\lambda_j)^{m_l}$ 的 Jordan 块，$l=1,2,\cdots,k_j$，$j=1,2,\cdots,t$。记

$$\boldsymbol{J}_j=\operatorname{diag}(\boldsymbol{J}_{j1},\boldsymbol{J}_{j2},\cdots,\boldsymbol{J}_{jk}),\quad j=1,2,\cdots,t,$$

则

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\widetilde{\boldsymbol{J}}=\operatorname{diag}(\boldsymbol{J}_1,\boldsymbol{J}_2,\cdots,\boldsymbol{J}_t).$$

记 $\widetilde{\boldsymbol{B}}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}$，并按 $\widetilde{\boldsymbol{J}}=\operatorname{diag}(\boldsymbol{J}_1,\boldsymbol{J}_2,\cdots,\boldsymbol{J}_t)$ 的分块方式将 $\widetilde{\boldsymbol{B}}$ 分块为 $\widetilde{\boldsymbol{B}}=(\boldsymbol{B}_{ij})$,其中 $\boldsymbol{B}_{ij}$ 是 $(m_{i1}+\cdots+m_{ik_i})\times(m_{j1}+\cdots+m_{jk_j})$ 子矩阵。由于 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$，所以 $\widetilde{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{J}=\boldsymbol{J}\widetilde{\boldsymbol{B}}$。于是 $\boldsymbol{B}_{ij}\boldsymbol{J}_j=\boldsymbol{J}_i\boldsymbol{B}_{ij},1\leqslant i,j\leqslant t$。显然，当 $i\neq j$ 时，$\boldsymbol{J}_i$ 和 $\boldsymbol{J}_j$ 没有公共特征值。由例 8, $\boldsymbol{B}_{ij}=\boldsymbol{0}$。于是 $\widetilde{\boldsymbol{B}}=\operatorname{diag}(\boldsymbol{B}_{11},\boldsymbol{B}_{22},\cdots,\boldsymbol{B}_{ut})$，而且 $\boldsymbol{B}_{ii}\boldsymbol{J}_i=\boldsymbol{J}_i\boldsymbol{B}_{ii},i=1,2,\cdots,t$。按方阵 $\boldsymbol{J}_i=\operatorname{diag}(\boldsymbol{J}_{i1},\boldsymbol{J}_{i2},\cdots,\boldsymbol{J}_{ik_i})$ 的分块方式将

方阵 $\boldsymbol{B}_{ii}$ 分块为 $\boldsymbol{B}_{ii}=\left(\boldsymbol{B}_{k1}^{(i)}\right)$, 其中 $\boldsymbol{B}_{kl}^{(i)}$ 是 $m_{ik}\times m_{il}$ 子矩阵。因为 $\boldsymbol{B}_{ii}\boldsymbol{J}_i=\boldsymbol{J}_i\boldsymbol{B}_{ii}$, 所以 $\boldsymbol{B}_{kl}^{(i)}\boldsymbol{J}_{il}=\boldsymbol{J}_{ik}\boldsymbol{B}_{kl}^{(i)}, 1\leqslant k,l\leqslant k_i$。

于是问题就化为: 已知 $\boldsymbol{J}_{(p)}=\lambda_0\boldsymbol{I}_{(p)}+\boldsymbol{N}_{(p)}, \boldsymbol{J}_{(q)}=\lambda_0\boldsymbol{I}_{(q)}+\boldsymbol{N}_{(q)}$, 求 $p\times q$ 矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})$, 使得 $\boldsymbol{C}\boldsymbol{J}_{(p)}=\boldsymbol{J}_{(q)}\boldsymbol{C}$。因为 $\boldsymbol{C}\left(\lambda_0\boldsymbol{I}_{(q)}+\boldsymbol{N}_{(q)}\right)=\left(\lambda_0\boldsymbol{I}_{(p)}+\boldsymbol{N}_{(p)}\right)\boldsymbol{C}$, 所以 $\boldsymbol{C}\boldsymbol{N}_{(q)}=\boldsymbol{N}_{(p)}C$。当 $p=q$ 时, 由 $\boldsymbol{C}\boldsymbol{N}_{(q)}=\boldsymbol{N}_{(p)}C$ 得到

$$\begin{pmatrix} 0 & c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1,p-1} \\ 0 & c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2,p-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & c_{p1} & c_{p2} & \cdots & c_{p,p-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2p} \\ c_{31} & c_{32} & \cdots & c_{3p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{p1} & c_{p2} & \cdots & c_{pp} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

比较两边矩阵的元素，得到

$$C=\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_p \\ 0 & c_1 & \cdots & c_{p-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_1 \end{pmatrix},$$

其中 $c_i=c_{1i}, i=1,2,\cdots,p$。当 $p>q$ 时，由 $\boldsymbol{C}\boldsymbol{N}_{(q)}=\boldsymbol{N}_{(p)}\boldsymbol{C}$ 得到

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_q \\ 0 & c_1 & \cdots & c_{q-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_1 \end{pmatrix};$$

当 $p<q$ 时, 则

$$\left(\mathbf{O}_{p\times(q-p)}, \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_p \\ 0 & c_1 & \cdots & c_{p-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_1 \end{pmatrix}\right).$$

这样一来就可以定出和方阵 $\boldsymbol{J}_i$ 可交换的方阵 $\boldsymbol{B}_i$, $i=1,2,\cdots,t$, 从而定出和方阵 $\boldsymbol{A}$ 可交换的方阵 $\boldsymbol{B}$。

4、设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n\sum\limits_{k=1}^{n}a_k=2022$。

(1) 若 $a_n>0$，证明：数列 $\{a_n\}$ 收敛。并求其极限。

(2) 若 $a_{n+1}a_n<0$，证明:

(2a) 数列 $\{a_n\}$ 发散;

(2b) 数列 $\{|a_n|\}$ 收敛，并求其极限。

供题人：宗语轩

证明. 记 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$.

(1) $\{a_n\}$ 单调递减。利用单调有界原理即得数列 $\{a_n\}$ 收敛，反证得 $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$。

(2) (2a) 反证：设 $\lim_{n\to+\infty} a_n = x$，由 $a_{n+1}a_n < 0$ 知 $x = 0$。因为 S_{n+1} 与 S_n 异号，且 $a_nS_n = 2022$。由 $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ 知，存在 $N \in \mathbb{N}^*$，当 $n > N$ 时，有 $|S_{n+1} - S_n| > 2022^{2022}$。

而 $\lim_{n\to+\infty}(S_{n+1} - S_n) = \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$，矛盾。所以数列 $\{a_n\}$ 发散；

(2b) **引理**：对 $\forall c \in \mathbb{R}$，方程 $x(x+c) = 2022$ 有一个正根和一个负根。

引理的证明：记 $f(x) = x(x+c)$，注意到 $f(0) = 0, f(+\infty) = f(-\infty) = +\infty$，分别利用介值定理并结合代数学基本定理即得；

回到原题。不妨 $a_1 > 0$，利用 $a_nS_n = 2022$，得

$$a_2 < -a_1, a_1 < a_3 < -a_2.$$

下用数学归纳法证明：a_{n+2} 在 a_n 和 $-a_{n+1}$ 之间。

当 $n = 1$ 时命题成立，假设 $n = k$ $(k \geqslant 1)$ 时命题成立，构造函数 $f(x) = x(S_k + a_{k+1} + x) - 2022$。由归纳假设知，$a_kS_k = 2022$。若 $a_k > 0$，

- 若 $a_k > -a_{k+1} > 0$，则

$$f(a_k) = a_k(S_k + a_{k+1} + a_k) - 2022 > a_kS_k - 2022 = 0,$$
$$f(-a_{k+1}) = -a_{k+1}S_k - 2022 < a_kS_k - 2022 = 0.$$

  由零点存在定理知，$\exists x_0 \in (-a_{k+1}, a_k)$, 使得 $f(x_0) = 0$。由引理及 a_{k+2} 与 a_k 同号知，$a_{k+2} = x_0$。

- 若 $-a_{k+1} > a_k > 0$，则

$$f(a_k) = a_k(S_k + a_{k+1} + a_k) - 2022 < a_kS_k - 2022 = 0,$$
$$f(-a_{k+1}) = -a_{k+1}S_k - 2022 > a_kS_k - 2022 = 0.$$

  由零点存在定理知，$\exists x_0 \in (a_k, -a_{k+1})$，使得 $f(x_0) = 0$。由引理及 a_{k+2} 与 a_k 同号知，$a_{k+2} = x_0$。

对 $a_k < 0$ 同理可证。故 $n = k+1$ 时命题成立，数学归纳法得证。

又因为 $a_1 < a_3 < -a_2$，可用数学归纳法证明正项数列 $\{a_{2k-1}\}_{k=1}^{+\infty}$ 单调递增，负项数列 $\{a_{2k}\}_{k=1}^{+\infty}$ 单调递增。而 $\{a_{2k-1}\}_{k=1}^{+\infty}$ 有上界 $-a_2$，$\{a_{2k}\}_{k=1}^{+\infty}$ 有上界 $-a_3$。由单调有界原理知，数列 $\{a_{2k-1}\}_{k=1}^{+\infty}$，$\{a_{2k}\}_{k=1}^{+\infty}$ 均收敛。设 $\lim_{k\to+\infty} a_{2k-1} = x$，$\lim_{k\to+\infty} a_{2k} = y$。因为 $-a_3 < 0, a_{2k-1} \geqslant a_1 > 0$，故 $x > 0, y < 0$。由 $a_nS_n = 2022$ 知，数列 $\{S_{2k-1}\}_{k=1}^{+\infty}$，$\{S_{2k}\}_{k=1}^{+\infty}$ 均收敛。设 $\lim_{k\to+\infty} S_{2k-1} = a$，$\lim_{k\to+\infty} S_{2k} = b$。则有

$$ax = by = 2022, \qquad b = a + y, \qquad a = b + x.$$

而 $x, a > 0$, $y, b < 0$, 解得 $a = -b = \sqrt{1011}$，$x = -y = 2\sqrt{1011}$。

$a_1 < 0$ 同理可证。故数列 $\{|a_n|\}$ 收敛，且 $\lim_{n\to+\infty} |a_n| = 2\sqrt{1011}$。

□

5、设 $\{a_n\}$ 为实数数列，定义算术平均值数列 (**Cesàro 求和**):

$$\sigma_n=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}, n\in\mathbb{N}^*.$$

一般地，数学分析课堂上已证明如下命题：设 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a$，则有 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sigma_n=a$。同时举了逆命题不成立的反例。现在继续探究 Cesàro 求和极限：

(1) 是否存在数列 $\{a_n\}$，使得对 $\forall n\in\mathbb{N}^*$，均有 $a_n>0$ 且 $\limsup\limits_{n\to+\infty}a_n=\infty$ 但 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sigma_n=0$?

(2) 对 $k\in\mathbb{N}^*$，记 $b_k=a_{k+1}-a_k$。证明：对 $\forall n\geqslant 2$，均有 $a_n-\sigma_n=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n-1}kb_k$。

(3) 设 $\lim\limits_{n\to+\infty}nb_n=0$，并且 $\{\sigma_n\}$ 收敛。证明：$\{a_n\}$ 亦收敛。

(4) 设数列 $\{nb_n\}$ 有界，并且 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sigma_n=\sigma$。证明：$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\sigma$。

供题人：宗语轩

证明. (1) 存在，构造

$$a_n=\begin{cases}\ln n & \exists t\in\mathbb{N}^*, s.t.\ n=t^3,\\ \dfrac{1}{n^2} & \text{else.}\end{cases}$$

则有 $\limsup\limits_{n\to+\infty}a_n=\infty$。同时，对 $\forall n\in N^*$, 记 $k\in\mathbb{N}^*$ 满足 $k^3\leq n<(k+1)^3$，则有

$$0<\sigma_n\leq\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2}+\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{k}3\ln t<\frac{2}{n}+\frac{3}{k^3}\sum_{t=1}^{k}\ln t<\frac{2}{k^3}+\frac{3\ln k}{k^2}\xrightarrow{n\to+\infty}0.$$

由夹逼原理知，$\lim\limits_{n\to+\infty}\sigma_n=0$。

(2) 我们有

$$\begin{aligned}a_n-\sigma_n&=a_n-\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\\&=(a_1+b_1+\cdots+b_{n-1})-\frac{na_1+(n-1)b_1+(n-2)b_2+\cdots+b_{n-1}}{n}\\&=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}kb_k.\end{aligned}$$

(3) $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n-1}kb_k$ 趋于 0，由 (2) 知 $\{a_n\}$ 收敛。

(4) 对正整数 $m<n$，有

$$\begin{aligned}\sigma_n-\sigma_m&=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-\frac{a_1+a_2+\cdots+a_m}{m}\\&=(a_1+a_2+\cdots+a_n)\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)+\sum_{i=m+1}^{n}\frac{a_i}{m}\\&=\frac{m-n}{m}\sigma_n+\frac{1}{m}\sum_{i=m+1}^{n}a_i.\end{aligned}$$

两边同乘 $\dfrac{m}{m-n}$，移项得

$$-\sigma_n = \frac{m}{n-m}(\sigma_n - \sigma_m) - \frac{1}{n-m}\sum_{i=m+1}^{n} a_i.$$

故有

$$a_n - \sigma_n = \frac{m}{n-m}(\sigma_n - \sigma_m) + \frac{1}{n-m}\sum_{i=m+1}^{n}(a_n - a_i).$$

记正数 M 满足 $|nb_n| \leq M$。注意到，对 $m+1 \leq i \leq n$，有

$$|a_n - a_i| = |b_{i+1} + \cdots + b_n| \leq M\left(\frac{1}{i+1} + \cdots + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{(n-i)M}{i+1} \leq \frac{(n-m-1)M}{m+2}.$$

对 $\forall\varepsilon > 0$，不妨 $n, m > \varepsilon$。$\exists N \in \mathbb{N}^*(N > \varepsilon)$，使得对 $\forall n > N, \exists m \in (0, n)$，满足

$$m \leq \frac{n-\varepsilon}{1+\varepsilon} < m+1.$$

由此推出

$$\frac{m}{n-m} < \frac{1}{\varepsilon}, \quad \frac{n-m-1}{m+2} < \varepsilon.$$

再利用 $\lim\limits_{n\to+\infty} \sigma_n = \sigma$ 可知，存在 $N' \in \mathbb{N}^*(N' > N)$，当 $n_1, n_2 > N'$ 时，有

$$|\sigma_{n_1} - \sigma_{n_2}| < \varepsilon^2.$$

设正整数 N_0 满足 $\dfrac{N_0 - \varepsilon}{1+\varepsilon} > N'$。则对 $\forall n > N_0$, $\exists m \in (N', n)$ 且满足 $m \leq \dfrac{n-\varepsilon}{1+\varepsilon} < m+1$，有

$$|a_n - \sigma_n| < \frac{1}{\varepsilon}|\sigma_n - \sigma_m| + M\varepsilon < (M+1)\varepsilon.$$

因此 $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n - \sigma_n) = 0$。再由 $\lim\limits_{n\to+\infty} \sigma_n = \sigma$ 知 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \sigma$。

□

6、(这道题会向你展示如何优雅地证明实数的完备性的梗概) 假设我们尚且不知道实数的存在，但我们已经构建了有序域 $(\mathbb{Q}, +, \times)$，现在我们介绍一种由此定义实数的方式：有理数的 Dedekind 分割。

设 $X \subset \mathbb{Q}$，令 $X' = \mathbb{Q} - X$。如果下面三条性质都成立：

- $X \neq \varnothing$, $X' \neq \varnothing$;
- 对任意 $x \in X$, $x' \in X'$，都有 $x < x'$;
- X 中没有最大元，

我们就称 X 是 $\mathbb{Q}$ 的一个 Dedekind 分割。记 $\mathcal{R}$ 为 $\mathbb{Q}$ 的所有 Dedekind 分割组成的集合。

(1) 验证

$$X_{\sqrt{2}} := \{x \in \mathbb{Q} \mid (x < 0) \vee (x^2 < 2)\}$$

构成 $\mathbb{Q}$ 的一个 Dedekind 分割。这对应于我们熟悉的 $\sqrt{2}$。

(2) 接着我们可以在 $\mathcal{R}$ 上定义序结构。对任意 $X, Y \in \mathcal{R}$，如果 $X = Y$(作为集合)，则称 $X = Y$(作为 Dedekind 分割)；$X \subset Y$ 且 $X \neq Y$，称 $X < Y$。

试验证 $<$ 构成 $\mathcal{R}$ 上的严格全序关系，即满足以下三条：

- $\forall X \in \mathcal{R},\ X \nless X$；
- $\forall X,Y,Z \in \mathcal{R},\ (X<Y)\wedge(Y<Z) \Rightarrow (X<Z)$；
- $\forall X,Y \in \mathcal{R},\ X<Y, X=Y, Y<X$ 有且仅有一条成立。

(3) 证明 $\mathcal{R}$ 满足最小上界原理，即 $\varnothing \neq \mathcal{X} \subset \mathcal{R}$ 有上界，那么它有最小上界。

这样我们就证明了 $\mathcal{R}$ 的完备性，但注意，这里并不能简单地说是实数的完备性，因为我们尚且没有说明 $\mathcal{R}$ 是我们想要的实数域，我们还没有定义它上面的代数结构。

供题人：徐思懿

证明. (1) 由题，$X'_{\sqrt{2}} = \{x \in \mathbb{Q} \mid (x \geq 0) \wedge (x^2 \geq 2)\}$。

- 显然 $X_{\sqrt{2}} \neq \varnothing, X'_{\sqrt{2}} \neq \varnothing$。
- 对任意 $x \in X_{\sqrt{2}}$，$x' \in X'_{\sqrt{2}}$，由有理数序的完全性，若 $x<0$，则 $x<0\leq x'$，若 $x \geq 0$，则 $x^2 < 2 \leq x'^2$，即 $x^2 < x'^2$，于是容易得到 $x<x'$，这依赖于有理数的代数结构与序结构相容。
- $X_{\sqrt{2}} \ni x < 0$ 显然不是 $X_{\sqrt{2}}$ 中的最大元，而对 $x \geq 0, x^2 < 2$，取 $y = \frac{x^2+2x+2}{2x+2}$，容易验证 $x^2 < y^2 < 2$，故 X 无最大元。

故 $X_{\sqrt{2}}$ 为 $\mathbb{Q}$ 的一个 Dedekind 分割。

(2)
- 对 $X \in \mathcal{R}$，显然 $X = X$，故 $X \nless X$；
- 对 $\forall X,Y,Z \in \mathcal{R}$，若 $X<Y, Y<Z$，由定义，$X \subset Y \subset Z$，且 $X \neq Y, Y \neq Z$，那么 $X \neq Z$，否则与 $X \subset Y \subset Z$ 矛盾，于是由定义，$X < Z$；
- 对 $\forall X,Y \in \mathcal{R}$，若 $X \nless Y, X \neq Y$，下证 $Y<X$。由 $X \nless Y$，存在 $x \in X, x \notin Y$，于是 $x \in \mathbb{Q} - Y$，所以 $y<x$，$\forall y \in Y \Rightarrow y \in X$，那么 $Y \subset X$，而 $Y \neq X$，所以 $Y < X$。

(3) 记 $\bar{X} := \bigcup\limits_{X \in \mathcal{X}} X$，下证 $\bar{X}$ 为 $\mathcal{X}$ 的上确界。

首先我们需要证明 $\bar{X}$ 是个 Dedekind 分割。

- $\bar{X} \neq \varnothing$ 显然，而 $\mathcal{X}$ 有上界，不妨记为 X'，那么 $\bar{X} \subset X' \Rightarrow \mathbb{Q} - \bar{X} \supset \mathbb{Q} - X'$，$\mathbb{Q} - X'$ 非空，故 $\mathbb{Q} - \bar{X}$ 非空。
- 对任意 $x \in \bar{X}$，$x' \in \mathbb{Q} - \bar{X}$，存在 $X \in \mathcal{X}$ 使得 $x \in X$，而 $\mathbb{Q} - \bar{X} \subset \mathbb{Q} - X$，所以 $x < x'$。
- 如果 $\bar{X}$ 中有最大元，不妨设为 $\bar{x}$，那么存在 X 使得 $\bar{x} \in X$，显然 $\bar{x}$ 也是 X 的最大元，矛盾。故 $\bar{X}$ 无最大元。

于是 $\bar{X}$ 为 Dedekind 分割。

然后我们要证明 $\bar{X}$ 为 $\mathcal{X}$ 上确界，这个过程分为两步，第一步是证明 $\bar{X}$ 为上界，第二步是证明 $\bar{X}$ 是最小的上界。

注意到 $\forall X \in \mathcal{X}$，$X \subset \bigcup\limits_{X \in \mathcal{X}} X = \bar{X}$，于是自然由非严格偏序的定义，$X \subset \bar{X} \Leftrightarrow X \leq \bar{X}$，因此 $\bar{X}$ 是 $\mathcal{X}$ 的上界。

再设 X' 为 $\mathcal{X}$ 上界，则对 $\forall\, X \in \mathcal{X}$，$X \le X' \Rightarrow X \subset X' \Rightarrow\ \bar{X} \subset X' \Rightarrow \bar{X} \le X'$，所以 $\bar{X}$ 是最小上界。

所以 $\bar{X}$ 是 $\mathcal{X}$ 的上确界。

□

评论. 大部分教材在讲授实数的定义时会以有理数的 Cauchy 列引入，这的确是一般性的方法。不过利用 Dedekind 分割定义实数也别有一番优美。这方面的资料可以参考于品的数学分析讲义。

7、证明任一酉矩阵是一个实正交矩阵和一个复对称矩阵的乘积。

供题人：王乐达

证明. 引理：对于任何酉矩阵 U 和正整数 k，都存在多项式 $p(x)$，使得矩阵 $V = p(U)$ 也是酉方阵，且其满足方程 $V^k = U$。

引理证明：由酉相似的性质，存在一个酉方阵 S 使得 $U = SDS^{-1}$，其中 D 为对角阵，设 $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$。由 U 为酉矩阵，故 $|\lambda_i| = 1$ 对 $\forall i$ 成立。任取一些 λ_i 的 k 次方根，记为 μ_i，则 $\mu_i = \lambda_i^{1/k}$。由 Lagrange 插值公式，存在多项式 $p(x)$ 使得 $p(\lambda_i) = \mu_i, \forall i$。这样，$p(U)^k = Sp(D)^k S^{-1} = S\mathrm{diag}(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)^k S^{-1} = SDS^{-1} = U$。由于仍有 $|\mu_i| = 1$，容易验证此时的 $p(U)$ 仍为酉方阵。

回到原问题。对于任何酉矩阵 U，注意到 UU^T 仍为酉矩阵。由引理可知，存在一个酉矩阵 X 和多项式 $p(x)$ 使得 $X^2 = UU^T$ 且 $X = p(UU^T)$。注意到 X 本身是对称阵，且 X 与 X^{-1} 均可与 UU^T 交换。注意到 $U = X \cdot (X^{-1}U)$，下面只要证明 $X^{-1}U$ 是实正交矩阵。我们有

$$(X^{-1}U)(X^{-1}U)^T = X^{-1}UU^T X^{-T} = X^{-1}X^2(X^T)^{-1} = XX^{-1} = I.$$

同理，$(X^{-1}U)^T(X^{-1}U) = I$。注意到 $X^{-1}U$ 也是酉矩阵，因此

$$(X^{-1}U)(X^{-1}U)^H = I.$$

这说明 $(X^{-1}U)^H = (X^{-1}U)^T$，即 $X^{-1}U$ 是实矩阵。综上，原命题成立。 □

8、从单位正方形中均匀地随机独立选取四个点，试求它们构成的四边形为凸四边形的概率。

供题人：王乐达

证明. 引理：从单位正方形中均匀地随机选取三个点，它们构成的三角形面积的期望是 11/144。

引理证明：令 $A = (a_1, a_2)\,, B = (b_1, b_2)\,, C = (c_1, c_2)$ 是随机三角形 T 的三个顶点。不失一般性只要考虑 $a_2 < b_2 < c_2$ 的情况，它占所有情况的 $\frac{1}{6}$。暂时固定 a_2, b_2, c_2，设

$$b_2 = (1-t)a_2 + tc_2, \quad 0 \le t \le 1,$$

AC 与 $y=b_2$ 交于一点 $S=(s,b_2)$，其中

$$s=s(a_1,c_1,t)=(1-t)a_1+tc_1.$$

T 的面积 X 被下式给出：

$$X=\frac{1}{2}|b_1-s|(c_2-a_2).$$

我们现在开始对六个变量进行积分。

$$\begin{aligned}X_1&:=\int_0^1 X\mathrm{d}b_1\\&=\frac{1}{2}(c_2-a_2)\left(\int_0^s(s-b_1)\mathrm{d}b_1+\int_s^1(b_1-s)\mathrm{d}b_1\right)\\&=\frac{1}{4}(c_2-a_2)\left(1-2s+2s^2\right),\end{aligned}$$

再对 b_2 积分：

$$X_2:=\int_{a_2}^{c_2}X_1\mathrm{d}b_2=\frac{1}{4}(c_2-a_2)^2\int_0^1\left(1-2s+2s^2\right)\mathrm{d}t,$$

这里 $s=s(a_1,c_1,t)$ 不依赖于 a_2 和 c_2，且由上面给出。最后

$$X_3:=\frac{1}{4}\int_0^1\int_{a_2}^1(c_2-a_2)^2\mathrm{d}c_2\mathrm{d}a_2\times\int_0^1\int_0^1\int_0^1\left(1-2s+2s^2\right)\mathrm{d}t\mathrm{d}c_1\mathrm{d}a_1$$

简单计算得到 $X_3=\frac{11}{6\cdot144}$，再由我们刚开始的假设，可知这样的三角形面积的期望是 11/144。

回到原问题。对于随机选定的四个点，当没有任何一点位于其他三个点形成的三角形内时，这些点构成一个凸四边形。而由引理，任意一点落在其他三个点形成的三角形内的概率是 11/144。因此，所需的概率就是 $1-4\cdot\frac{11}{144}=\frac{25}{36}$。 □

9、设 $g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为递增有界的 C^1- 函数，证明：微分方程

$$(E):y''+y=g$$

在 $\mathbb{R}$ 上所有解都是有界的。

供题人：罗云杰

证明. 设 $z=y+iy'$，则 $z'=y'+iy''$，$z-iz'=g$，故 $z'=iz=ig$。于是

$$\begin{aligned}z&=e^{-\int i\,\mathrm{d}x}\left(\int ige^{ix}\,\mathrm{d}x+a+bi\right),\ (a,b)\in\mathbb{R}^2\\&=e^{-ix}\left(\int ig(\cos x+i\sin x)\,\mathrm{d}x+a+bi\right)\\&=(\cos x-i\sin x)\left(-\int g\sin x\,\mathrm{d}x+i\int g\cos x\,\mathrm{d}x+a+bi\right),\end{aligned}$$

$$y=\mathrm{Re}(z)=-\cos x\int g\sin x\,\mathrm{d}x+a\cos x+\sin x\int g\cos x\,\mathrm{d}x+b\sin x,\ (a,b)\in\mathbb{R}^2.$$

记 $\varphi_1(x)=\int g\sin x\,\mathrm{d}x$, $\varphi_2(x)=\int g\cos x\,\mathrm{d}x$, 且 $\varphi_1(0)=\varphi_2(0)=0$, 则 $y=\varphi_2(x)\sin x-$

$\varphi_1(x)\cos x + a\cos x + b\sin x$。且

$$\varphi_1(x) = \int_0^x g(t)\sin t\,\mathrm{d}\,t = -g(t)\cos t\Big|_0^x + \int_0^x g'(t)\cos t\,\mathrm{d}\,t,$$

$$\varphi_2(x) = \int_0^x g(t)\cos t\,\mathrm{d}\,t = g(t)\sin t\Big|_0^x - \int_0^x g'(t)\sin t\,\mathrm{d}\,t.$$

不妨设 $|g(t)| \le M, \forall\, t \in \mathbb{R}$，$M$ 为常数。则

$$\begin{aligned}|\varphi_1(x)| &\le |-g(x)\cos x + g(0)| + \left|\int_0^x g'(t)\cos t\,\mathrm{d}\,t\right| \\ &\le 2M + \int_0^x g'(t)|\cos t|\,\mathrm{d}\,t \le 2M + \int_0^x g'(t)\,\mathrm{d}\,x \\ &\le 4M,\end{aligned}$$

这是因为 g 是单调递增的。

同理，$|\varphi_2(x)| \le 3M$。

故 $|y| \le |a| + |b| + 3M + 4M = |a| + |b| + 7M$，即 y 在 $\mathbb{R}$ 上有界。 □

10、证明下列命题:

(1) $\mathbb{C}[x,y]/(x^2+y^2-1)$ 是 UFD,

(2) $\mathbb{R}[x,y]/(x^2+y^2-1)$ 不是 UFD。

供题人：曾相如

证明. (1) 利用换元 $u = x + iy,\ v = x - iy$ 得

$$\begin{aligned}\mathbb{C}[x,y]/(x^2+y^2-1) \cong& \mathbb{C}[u,v]/(uv-1) \\ \cong& \mathbb{C}[u,\frac{1}{u}],\end{aligned}$$

其中容易证明 $\mathbb{C}[u,\frac{1}{u}]$ 是 UFD (如果你了解局部化, 那么一般来说 UFD 的局部化都是 UFD)。

(2) 考虑典范嵌入 $\phi: \mathbb{R}[x,y] \to \mathbb{C}[x,y]$。下面证明 $\phi^{-1}((x^2+y^2-1)) = (x^2+y^2-1)$。显然 $\phi^{-1}((x^2+y^2-1)) \supset (x^2+y^2-1)$。另一方面，如果对 $f \in \mathbb{C}[x,y]$ 有 $f\cdot(x^2+y^2-1) \in \mathbb{R}[x,y]$，则可以通过对 f 的系数建立实系数线性方程组得知 f 必为实系数 (或者使用 Lagrange 插值)。如此，ϕ 便可诱导嵌入 $\tilde{\phi}: \mathbb{R}[x,y]/(x^2+y^2-1) \to \mathbb{C}[x,y]/(x^2+y^2-1)$。我们先研究 $\mathbb{R}[x,y]/(x^2+y^2-1)$ 中的单位。通过 (1) 中给出的同构 $\mathbb{C}[x,y]/(x^2+y^2-1) \cong \mathbb{C}[u,\frac{1}{u}]$，我们可以得到 $\mathbb{R}[x,y]/(x^2+y^2-1) \cong \mathbb{R}[u+\frac{1}{u}, iu-\frac{i}{u}]$。若 $f(u+\frac{1}{u}, iu-\frac{i}{u})$ 为其单位，那么在 $\mathbb{C}[u,\frac{1}{u}]$ 中有

$$f(u+\frac{1}{u}, iu-\frac{i}{u}) = \alpha\cdot u^n,$$

其中 $\alpha \in \mathbb{C}$，$n \in \mathbb{Z}$。我们对 u 进行赋值，如果 $|u| = 1$，那么 $u+\frac{1}{u}, iu-\frac{i}{u} \in \mathbb{R}$，从而上式左侧为实数，则易知 $\alpha \in \mathbb{R}$，$n = 0$。从而 $\mathbb{R}[x,y]/(x^2+y^2-1)$ 中单位为 $R^\times$。在 $\mathbb{R}[x,y]/(x^2+y^2-1)$ 中，$x\cdot x = x^2 = (1-y)(1+y)$，故我们只需证明 $1-y$

在 $\mathbb{R}[x,y]/(x^2+y^2-1)$ 中不可约，且 x 不是 $1-y$ 的倍数。而在 $\mathbb{C}[u,\frac{1}{u}]$ 中有

$$\begin{aligned} x =& \frac{1}{2}\left(u+\frac{1}{u}\right) \\ =& \frac{(u+i)(u-i)}{2u}, \\ 1-y =& 1-\frac{1}{2i}\left(u-\frac{1}{u}\right) \\ =& \frac{(iu+1)^2}{2iu}, \end{aligned}$$

于是 x 不为 $1-y$ 的倍数。如果 $1-y$ 在 $\mathbb{R}[x,y]/(x^2+y^2-1)$ 中不是素元，那么存在 $f,g\in\mathbb{R}[x,y]/(x^2+y^2-1)$，使 $fg=1-y$，且它们在 $\mathbb{C}[x,y]/(x^2+y^2-1)$ 中均为 $iu+1$ 的相伴元。则有

$$\frac{f(u+1/u,iu-i/u)}{g(u+1/u,iu-i/u)}=\alpha\cdot u^n$$

同样通过赋值可以知道 $\frac{f}{g}=c\in\mathbb{R}$，从而有

$$\begin{aligned} c\cdot g^2 =& 1-y \\ =& \frac{(iu+1)^2}{2iu}. \end{aligned}$$

上式中，左侧是完全平方，而右侧不是，矛盾。综上，x^2 无唯一分解，从而 $\mathbb{R}[x,y]/(x^2+y^2-1)$ 不是 UFD。

$\square$

11、设 $\{A_\alpha\}$ 是一族可数集，集族的基数为 $\mathfrak{m}$，其中 $\mathfrak{m}$ 无限。证明 $\bigcup_\alpha A_\alpha$ 的基数至多为 $\mathfrak{m}$。

供题人：曾相如

证明. 不妨假设 A_α 两两不交。设指标集为 M，则 $|M|=\mathfrak{m}$，则我们可以用初始序数 $\mu=\omega_{\mathfrak{m}}$ 赋予其良序。对每个 $\alpha\in M$ 我们构造一个可数集 $B_\alpha=\{b_{\alpha1}=\alpha,b_{\alpha2},b_{\alpha3},\cdots\}$，依照 ω 赋予良序。令这些 B_α 两两不交，并设 $\tilde{M}=\bigcup_\alpha B_\alpha$。我们规定，当 $\alpha<\beta$ 时 $b_{\alpha i}<b_{\beta j}$，当 $i<j$ 时 $b_{\alpha i}<b_{\alpha j}$，从而 $\tilde{M}$ 也为良序集，并设 $\tilde{\mu}$ 为其序数。因为 $M\subset\tilde{M}$，所以 $\mu\le\tilde{\mu}$。如果 $\mu=\tilde{\mu}$，则 M 和 $\tilde{M}$ 序同构，如果 $\mu<\tilde{\mu}$ 则 M 和 $\tilde{M}$ 的某个下部集合同构。因为 M 的序数 μ 并没有最大元，在两种情形下 M 都序同构于一些 B_β 的并，即 $M\cong\bigcup_{\beta\in N}B_\beta$。下设 φ: $\bigcup_{\beta\in N}B_\beta\to M$ 为双射。对任一 $\beta\in N$，设 $\varphi(B_\beta)=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\cdots\}$。因为 $\bigcup_{i\in\mathbb{N}^*}A_{\alpha_i}$ 是可数个可数集的并，我们知道 B_β 和 $\bigcup_{i\in\mathbb{N}^*}A_{\alpha_i}$ 等势，即存在从 B_β 到 $\bigcup_{i\in\mathbb{N}^*}A_{\alpha_i}$ 的双射。于是，存在一个从 $\bigcup_{\beta\in N}B_\beta$ 到 $\bigcup_{\alpha\in M}A_\alpha$ 的双射 ψ。因此，$\psi\circ\phi^{-1}$ 给出了从 M 到 $\bigcup_{\alpha\in M}A_\alpha$ 的双射，故 $\left|\bigcup_{\alpha\in M}A_\alpha\right|=\mathfrak{m}$。 $\square$

12、利用四元数可以证明“四平方和定理”，即任意正整数可以表为 4 个整数的平方和。试按下列步骤给出完整证明：

(1) 设 Q 为四元数环 (实数域上)，$R=\mathbb{Z}[i,j,k,\ \frac{1+i+j+k}{2}]\subset Q$。证明 R 的任意左理想都是由一个元生成，且生成元可以取在 $\mathbb{Z}[i,j,k]$ 中。

(2) 证明对任意素数 p，在 $\mathbb{F}_p$ 中方程 $x^2+y^2+1=0$ 有解。

(3) 证明对任意素数 p，存在 $\alpha\in\mathbb{Z}[i,j,k]$ 使得 $|\alpha|^2=p$。($|\alpha|^2=\alpha\overline{\alpha}$ 其中若 $\alpha=a+bi+cj+dk$, $\overline{\alpha}=a-bi-cj-dk$。)

(4) 证明对任意正整数 n，存在 $\alpha\in\mathbb{Z}[i,j,k]$ 使得 $|\alpha|^2=n$，故 n 可以表为 4 个整数的平方和。

供题人：葛霖

证明. (1) 设 I 是 R 的左理想，对 $\alpha\in Q$，都有对应的 $\gamma\in R$, $|\alpha-\gamma|^2<1$，(每个分量取每个分量最近的整数或者整体就取 α 本身)，这里范数平方就是 $1,i,j,k$ 的系数的平方和。取 I 中范数最小的元 θ，对任意 $\beta\in I$，取 $\gamma\in R$ 使得 $|\beta\theta^{-1}-\gamma|^2<1$，则 $|\beta-\gamma\theta|<|\theta|$，由 θ 范数最小性知 $\beta=\gamma\theta$。从而 θ 是生成元。

如果 θ 不在 $\mathbb{Z}[i,j,k]$ 中，不妨设 $\theta=2p_1+(2p_2)i+(2p_3)j+(2p_4)k+\theta_0$，其中 p_i 是整数，$2\theta_0$ 的每个 $1,i,j,k$ 的系数是 1 或者 -1。则 $\theta_0\in R$ 且是 R 中可逆的。从而可以不妨设 θ 是 $\mathbb{Z}[i,j,k]$ 中的。

(2) 当 $p=4k+1$ 时我们熟知 -1 是二次剩余，故我们不妨设 $p=4k+3$，此时 -1 以及 $-y^2$ 都是 p 的二次非余，那么存在 y，满足 $-1-y^2$ 是二次剩余，因为 $s\mapsto -1+s$ 是单射, 且 $-1+0$ 是二次非余。从而结论成立。

(3) 不妨设 p 是奇素数。设 $p|x^2+y^2+1$，考虑 R 中左理想 $(1+xi+yj,p)$，这是主理想，且不是整个环 R (这是因为若 $1=s(1+xi+yj)+tp,s,t\in R$，则 $(1-xi-yj)=snp+t(1-xi-yj)p$, 则有 $p|2$, 矛盾)。于是 $p=t\alpha$, 其中 $\alpha\in\mathbb{Z}[i,j,k]$ 是理想的生成元，t,α 都不是 R 中单位。因此，$p^2=|t\alpha|^2=t\alpha\overline{\alpha}\overline{t}=|t|^2|\alpha|^2$，其中 $|t|^2,|\alpha|^2$ 均为大于 1 的整数。由于 p 是素数，从而 $p=|\alpha|^2$。

(4) 对任意 $\alpha\in\mathbb{Z}[i,j,k]$，$|\alpha|^2$ 给出了一个四平方和，于是由 (3) 得知任意奇素数都是四平方和。由 (3) 的证明可知 $|\alpha\beta|^2=|\alpha|^2|\beta|^2$，即两个四平方和的乘积仍然是四平方和，由此知四平方问题的结论正确。

□

13、已知复数 u_1,u_2,u_3 满足 $u_1^2+u_2^2+u_3^2=0$，$u_1^3+u_2^3+u_3^3=14$，$u_1^4+u_2^4+u_3^4=40$ 且 $|u_1|\le|u_2|\le|u_3|$，若在单位开圆盘 $\mathbb{D}=\{z:|z|<1\}$ 上的全纯函数 $f(z)$ 满足

$$|\frac{f(z)}{z}|\ge\frac{|u_1f'(0)|}{(1-|z|)^2}+|\frac{u_2f(0)}{z}|,\ \forall\,|u_3z|=1.$$

试证明 $\exists z_1,z_2\in\mathbb{D}$ 使得 $z_1\ne z_2, f(z_1)=f(z_2)$。

供题人：葛霖

证明. 利用对称多项式的知识 (类似李尚志线代教材习题 5.6.4), 可得 u_1 满足方程 $z^3-2z^2+2z-6=0$，由儒歇定理，从而 $|u_1|>1$。

不妨设 $f(0)=0, f'(0)=1$。下面用反证法证明：设 $f(z)$ 并不如此。

(接下来是增长不等式的证明) 固定 z, 设

$$f_1(\zeta)=\frac{f\left(\frac{\zeta+z}{1+\bar{z}\zeta}\right)-f(z)}{\left(1-|z|^2\right)f'(z)}.$$

显然，f_1 是 $\zeta\in\mathbb{D}$ 的单叶函数，且 $f_1(0)=0, f_1'(0)=1$，由计算得

$$f_1''(0)=\left(1-|z|^2\right)\frac{f''(z)}{f'(z)}-2\bar{z}.$$

(接下来是彼贝尔巴赫定理的证明) 设 $f_1(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$,

令 $h(z)=f_1\left(z^2\right)/z^2$，则

$$h(z)=1+a_2z^2+a_3z^4+\cdots+a_nz^{2n-2}+\cdots,$$

在 $\mathbb{D}$ 内不取零值且为偶函数。因此，$\sqrt{h(z)}$ 可在 $\mathbb{D}$ 内取到一个单值分支 $\psi(z)$，使其在 $z=0$ 的值为 1，这时 $\psi(z)$ 也是偶函数。又令 $f_2(z)=z\psi(z)$，那么 f_2 是奇函数，且在单位圆盘内单叶。事实上，若有两点 $z_1,z_2\in\mathbb{D}$ 使得 $f_2\left(z_1\right)=f_2\left(z_2\right)$，则 $f_1\left(z_1^2\right)=f_1\left(z_2^2\right)$。由 f_1 的单叶性推出 $z_1^2=z_2^2$，也即 $z_1=\pm z_2$。再注意到 f_2 是奇函数，即又推得 $z_1=z_2$。利用 h 的展开式可算得

$$f_2(z)=z+\frac{a_2}{2}z^3+\cdots,$$

设 $f_2\left(\dfrac{1}{z}\right)^{-1}=g(z),\ z\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{D}$。

则单射 $g(z)=z+\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nz^{-n}$。

设 $R>1$ 为任意一个实数。那么，$w=g(z)$ 将 $\{z:|z|=R\}$ 变成一条 Jordan 闭曲线 γ，且 γ 的内部的面积为正的。记 γ 的内部的面积为 A，则

$$A=\int_0^{2\pi}u(\theta)v'(\theta)\mathrm{d}\theta,$$

其中

$$u(\theta)=\operatorname{Re}g\left(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right),\quad v(\theta)=\operatorname{Im}g\left(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right).$$

将 g 的展式代入后即有

$$\begin{aligned}A=&\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\left\{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+R\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{R^n}\left(b_n\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}+\bar{b}_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\right)\right\}\\&\times\left\{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+R\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{R^n}\left(nb_n\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}+n\bar{b}_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\right)\right\}\mathrm{d}\theta.\end{aligned}$$

利用公式

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\theta}\mathrm{d}\theta=\begin{cases}0, & m\neq 0,\\ 2\pi, & m=0,\end{cases}$$

由上述关于 A 的等式立即推出

$$A=\pi R^2-\pi\sum_{n=1}^{\infty} n\left|b_n\right|^2 R^{-2n}.$$

由 $A>0$ 又得

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\left|b_n\right|^2 R^{-2n}<R^2.$$

这样，对于任意固定的自然数 N，都有

$$\sum_{n=1}^{N} n\left|b_n\right|^2 R^{-2n}<R^2.$$

从而 $b_1=-\dfrac{a_2}{2},|a_2|\leqslant 2$。(彼贝尔巴赫定理证毕。)

有 $|f_1''(0)/2|\leqslant 2$，也即

$$\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)}-\frac{2r^2}{1-r^2}\right|\leqslant\frac{4r}{1-r^2},\quad |z|=r.$$

注意到

$$\operatorname{Re}\frac{zf''(z)}{f'(z)}=r\frac{\partial}{\partial r}\ln|f'(z)|,$$

我们有

$$\frac{-4+2r}{1-r^2}\leqslant\frac{\partial}{\partial r}\ln|f'(z)|\leqslant\frac{4+2r}{1-r^2}.$$

对 r 积分即得

$$\frac{1-r}{(1+r)^3}\leqslant|f'(z)|\leqslant\frac{1+r}{(1-r)^3}.$$

再由长大不等式有

$$|f(z)|\leqslant\frac{|z|}{(1-|z|)^2}.$$

(增长不等式证毕。)

与

$$|f(z)|\geqslant\frac{|u_1 z|}{(1-|z|)^2}$$

矛盾，所以 $f(z)$ 不是单射，即有 $\exists z_1,z_2\in\mathbf{D}$ 使得 $z_1\neq z_2, f(z_1)=f(z_2)$ □

14、在机器学习的许多算法中，常常会遇见如下的迭代方式：

$$Q_{n+1}=Q_n+\alpha_n(R_n-Q_n),\ n\in\mathbb{N}.$$

其中，$Q_0=R_0$，$\alpha_n\in(0,1]$ 称为步长，$\{R_n,n\in\mathbb{N}\}$ 是一列 i.i.d. 的随机变量，满足 $\mathbb{E}R_n=0$，其二阶矩存在且不为 0。为方便起见，设 $\alpha_0=1$。

此外，下列关于步长的条件称为 **“好”条件**：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n=\infty\quad \text{且}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n^2<\infty.$$

(1) 请用 $R_k(0\leq k\leq n)$ 表示出 Q_{n+1}。

(2) 若步长恒为常数 $c\in(0,1)$，当 n 趋于无穷时，$Q_n\xrightarrow{P}0$ 是否一定成立，并给出证明或反例。

(3) 证明：若步长满足“好”条件，当 n 趋于无穷时，$Q_n \xrightarrow{P} 0$。

(4) 证明：若步长满足“好”条件，当 n 趋于无穷时，$Q_n \xrightarrow{a.s.} 0$。

(5) (本问征解不作要求) 你能否找出更好的条件，使得当 n 趋于无穷时，$Q_n \xrightarrow{a.s.} 0$? (此处“更好”的含义是：它不能是“好”条件的充分条件，并且尽可能简洁，最好是“好”条件的必要条件。)

注: $Q_n \xrightarrow{P} 0$ 表示 Q_n 依概率收敛于 0，$Q_n \xrightarrow{a.s.} 0$ 表示 Q_n 几乎必然收敛于 0。

供题人：罗迟

证明. 不妨设 $\mathbb{E}R_n^2 = 1.$。

(1)

$$
\begin{aligned}
Q_{n+1} &= Q_n + \alpha_n \left[R_n - Q_n\right] \\
&= \alpha_n R_n + (1-\alpha_n) Q_n \\
&= \alpha_n R_n + (1-\alpha_n)\left[\alpha_{n-1} R_{n-1} + (1-\alpha_{n-1}) Q_{n-1}\right] \\
&= \alpha_n R_n + (1-\alpha_n)\alpha_{n-1} R_{n-1} + (1-\alpha_n)(1-\alpha_{n-1}) Q_{n-1} \\
&\vdots \\
&= \sum_{i=0}^{n} \prod_{k=i+1}^{n} (1-\alpha_k)\alpha_i R_i,
\end{aligned}
$$

其中 $\prod\limits_{k=n+1}^{n} (1-\alpha_k) = 1$。

(2) 不一定成立，只要能给出一个正确的反例即可。例如取 $c = 1$，则有 $Q_{n+1} = R_n$，Q_n 不依概率收敛于 0。

(3) 考虑 $\forall \varepsilon > 0$，由 Chëbyshev 不等式，我们有：

$$
\mathbb{P}(|Q_n| > \varepsilon) \le \frac{\mathbb{E}Q_n^2}{\varepsilon^2} = \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{i=0}^{n} \prod_{k=i+1}^{n} (1-\alpha_k)^2 \alpha_i^2.
$$

由 Taylor 展开可知下列不等式成立

$\forall x \in (0,1), \ln\left(1/(1-x)\right) \ge x.$

因此，

$$
\prod_{k=i+1}^{n} (1-\alpha_k)^2 \le \exp\left(-2\sum_{k=i+1}^{n} \alpha_k\right).
$$

所以，

$$
\mathbb{P}(|Q_n| > \varepsilon) \le \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{i=0}^{n} \alpha_i^2 \exp\left(-2\sum_{k=i+1}^{n} \alpha_k\right).
$$

由“好”条件的第二项：$\forall \delta > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}$ s.t. $\sum_{i>N_1} \alpha_i^2 < \delta/2$。

由“好”条件的第一项：$\exists N_2 \in \mathbb{N}$, s.t. $\forall n > N_2$ 及 $i \le N_1$，$\exp\left(-2\sum_{k=i+1}^{n} \alpha_k\right) < \delta/2M$，其中 $M = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i^2 < \infty$。

所以，当 $n > N_2$ 时，我们有：

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i^2 \exp\left(-2\sum_{k=i+1}^{n}\alpha_k\right) < \frac{\delta}{2M}\sum_{i=0}^{N_1}\alpha_i^2 + \sum_{i>N_1}^{N_2}\alpha_i^2 < \delta/2 + \delta/2 = \delta.$$

所以当 $n \to \infty$ 时, $P(|Q_n| > \varepsilon) \to 0$ 。

(4) **引理**：假设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$，$\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ 且 $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是三列满足下列条件的实数：

(1) $\alpha_n \in (0,1]$, $\forall n$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n = \infty$ 但是当 $n \to \infty$ 时,$\alpha_n \to 0$；

(2) $x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n\varepsilon_{n+1}$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\varepsilon_{n+1}$ 收敛。

那么，当 $n \to \infty$ 时，$x_n \to 0$。

引理证明：本引理通过反证法证明。首先，容易观察到：

$x_n \le 0 \implies x_{n+1} \le x_n(1-\alpha_n) + \alpha_n|\varepsilon_{n+1}|$,

$x_n \ge 0 \implies x_{n+1} \ge x_n(1-\alpha_n) - \alpha_n|\varepsilon_{n+1}|$.

为方便书写，记 $\underline{x} = \liminf x_n$ 以及 $\bar{x} = \limsup x_n$。

情形 1. 数列 $\{x_n\}$ 中有无穷项为负数且 $\bar{x} > 0$。

取实数 h 满足 $0 < h < \bar{x}$。记 $\tau_0 = 1$，则对于 $n \ge 1$：

$$\tau_{2n-1} = \inf\{j; j > \tau_{2n-2}, x_j \le 0\},$$

$$\tau_{2n} = \inf\{j; j > \tau_{2n-1}, x_j \ge h\},$$

$$\hat{\tau}_{2n} = \sup\{j; \tau_{2n-1} \le j < \tau_{2n}, x_j \le 0\}.$$

对充分大的 n，$\alpha_n|\varepsilon_{n+1}| \le h/2$，因此由 $x_{\hat{\tau}_{2n}} \le 0$ 可以推出 $x_{\hat{\tau}_{2n}+1} \le h/2$ 以及 $\hat{\tau}_{2n}+1 < \tau_{2n}$；因此

$$h/2 \le x_{\tau_{2n}} - x_{\hat{\tau}_{2n}+1} = \sum_{k=\hat{\tau}_{2n}+1}^{\tau_{2n}-1}\alpha_k(\varepsilon_{k+1} - x_k) \le \sum_{k=\hat{\tau}_{2n}+1}^{\tau_{2n}-1}\alpha_k\varepsilon_{k+1}.$$

但是上界趋于 0 (级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\varepsilon_{n+1}$ 收敛)，因此，我们推出了矛盾。

情形 2. 数列 $\{x_n\}$ 除有限项外非负，且 $0 \le \underline{x} < \bar{x} \le \infty$。

取实数 a 与 b 满足 $\underline{x} < a < b < \bar{x}$ 以及 $\tau_1 = n_0$，

$$\tau_{2n} = \inf\{j; j > \tau_{2n-1}, x_j < a\},$$

$$\tau_{2n+1} = \inf\{j; j > \tau_{2n}, x_j > b\};$$

因此

$$b - a \le x_{\tau_{2m+1}} - x_{\tau_{2n}} = \sum_{k=\tau_{2n}}^{\tau_{2m+1}-1}\alpha_k(\varepsilon_{k+1} - x_k) \le \sum_{k=\tau_{2n}}^{\tau_{2m+1}-1}\alpha_k\varepsilon_{k+1}.$$

与情形 1 类似，我们再次推出了矛盾。

情形 3. $x_n \to y, 0 < y < \infty$。

对 $n \ge n_0, x_n > 0$；并且 $x_n - x_{n_0} = \sum_{k=n_0}^{n-1}\alpha_k(\varepsilon_{k+1} - x_k)$。

但是 $\sum_{k=1}^{\infty} -y\alpha_k = -\infty \implies \sum_{k=1}^{\infty} -\alpha_k x_k = -\infty$。前式的左边趋于 $y - x_{n_0}$ 而右边趋于 $-\infty$，这是一个矛盾。

情形 4. 当 $n \to \infty$ 时，$x_n \to +\infty$。

于是，当 $n \geq n_0, x_n > 0 \implies x_n - x_{n_0} \leq \sum\limits_{k=n_0}^{n-1} \alpha_k \varepsilon_{k+1}$。前式左边趋于 $+\infty$ 而右边收敛于一个实数，矛盾。

再对 $\{-x_n\}$ 考虑上述 4 种情形仍然是矛盾。

最后，唯一剩下的情形就是：当 $n \to \infty$ 时，$x_n \to 0$。

注：尽管上述证明所用到的知识只有基础的数学分析，但它的核心思想与随机过程中的鞅论有密切联系。

回到原题：记 $\mathcal{F}_n = \sigma(R_1, \ldots, R_n), M_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k R_k$，则 M_n 是关于 $\mathcal{F}_n$ 的一列鞅，且

$$\sup \mathbb{E} M_n^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 < \infty.$$

所以 M_n 以 L^2 以及 a.s. 的方式收敛于 0。

最后，对于样本空间中满足 M_n 趋于的 0 的样本点 ω，令 $\varepsilon_{n+1} = R_n(\omega)$，再应用上述引理可知命题成立。

(5) 开放性问题，言之有理即可，但最好要满足题目中的那几个要求。

□

15、已知数列 $\{x_n\}$，$x_1 > 0$。

(1) 若 $x_{n+1} = \ln(1 + x_n)$。一般地，数学分析课堂上已求得 $\lim\limits_{n\to+\infty} nx_n = 2$。求极限

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n(nx_n - 2)}{\ln n}.$$

(2) 若 $x_{n+1} = \sin x_n$。一般地，数学分析课堂上已求得 $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{n}{3}} x_n = 1$。试找出一个仅与 n 有关的单调递增函数 $g(n)$，使得极限

$$\lim_{n\to+\infty} g(n) \left(\sqrt{\frac{n}{3}} x_n - 1 \right)$$

存在且不为 0。并求其极限。

(3) (本问征解不作要求) 试将 (1)(2) 问的结果总结为一般性结论。

供题人：吴天

证明. (1) 利用 Stolz 公式，我们有

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\frac{n(nx_n-2)}{\ln n} &= \lim_{n\to+\infty}\frac{nx_n\left(n-\frac{2}{x_n}\right)}{\ln n} = 2\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(n-\frac{2}{x_n}\right)}{\ln n} \\
&= 2\lim_{n\to+\infty}\frac{1-\frac{2}{x_{n+1}}+\frac{2}{x_n}}{\frac{1}{n}} = 2\lim_{n\to+\infty}\frac{1-\frac{2}{x_{n+1}}+\frac{2}{x_n}}{\frac{x_n}{2}} \\
&= 4\lim_{n\to+\infty}\frac{x_nx_{n+1}+2x_{n+1}-2x_n}{x_n^2x_{n+1}} \\
&= 4\lim_{n\to+\infty}\frac{x_n\left(x_n-\frac{x_n^2}{2}\right)+2\left(x_n-\frac{x_n^2}{2}+\frac{x_n^3}{3}\right)-2x_n+o(x_n^3)}{x_n^3} \\
&= 4\lim_{x\to0}\frac{x\left(x-\frac{x^2}{2}\right)+2\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right)-2x+o(x^3)}{x^3} \\
&= \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

(2) 例如取 $g(n)=\dfrac{n}{\ln n}$。利用 Stolz 公式，我们有

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\ln n}\left(\frac{n}{3}x_n^2-1\right) &= \lim_{n\to+\infty}\frac{3}{\ln n}\left(\frac{n}{3}-\frac{1}{x_n^2}\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1-\frac{3}{x_{n+1}^2}+\frac{3}{x_n^2}}{\frac{1}{n}} \\
&= \lim_{x\to0}\frac{3}{x^2}\left(1-\frac{3}{\sin^2 x}+\frac{3}{x^2}\right) \\
&= \lim_{x\to0}\frac{3}{x^6}(x^2\sin^2 x-3x^2+3\sin^2 x) \\
&= \lim_{x\to0}\frac{3}{x^6}\left[(x^2+3)\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)\right)^2-3x^2\right] \\
&= -\frac{3}{5}.
\end{aligned}$$

因此

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\ln n}\left(\sqrt{\frac{n}{3}}x_n-1\right)=-\frac{3}{10}.$$

(3) 对 (1) 有如下推广：设 $a>0$，$f(x)$ 在 $[0,a)$ 上有三阶导数，$f(0)=0, f'(0)=1, f''(0)\neq 0$ 且 $0<f(x)<x, x\in(0,a)$。令 $x_1\in(0,a), x_{n+1}=f(x_n), \forall n\in\mathbb{N}^*$。证明：

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n\left(n\ln n+\frac{2}{f''(0)}\right)}{\ln n}=\frac{4}{(f''(0))^3}\left(\frac{(f''(0))^2}{2}-\frac{f'''(0)}{3}\right).$$

而 (2) 的情形下，$f''(0)=0$，不满足上述推广。

□