普通高等学校招生全国统一考试（浙江卷）数学模拟 1（2019.2）

命题人：宗语轩

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1.已知全集 $U=\{1,2,3,4,5,6\}$，$P=\{1,2,4\}$，$Q=\{2,3,4,6\}$.则 $P\cup(C_U Q)$ =（ ▲ ）

A. $\{1,2,4,5\}$　　B. $\{1,2,3,4,6\}$　　C. $\{2,4\}$　　D. $\{1\}$

2.双曲线 C：$\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{4}=1$ 的离心率是（ ▲ ）

A. $\frac{\sqrt{5}}{3}$　　B. $\frac{\sqrt{13}}{3}$　　C. $\frac{13}{9}$　　D. $\frac{\sqrt{13}}{2}$

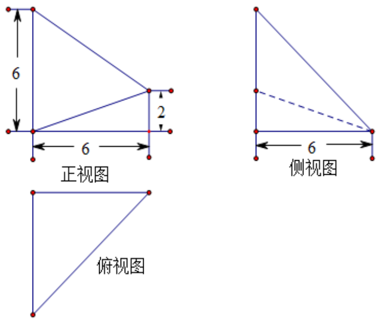
3.复数 $\frac{5}{1-2\mathrm{i}}$（i 为虚数单位）的共轭复数是（ ▲ ）

A. $-1+2\mathrm{i}$　　B. $1+2\mathrm{i}$

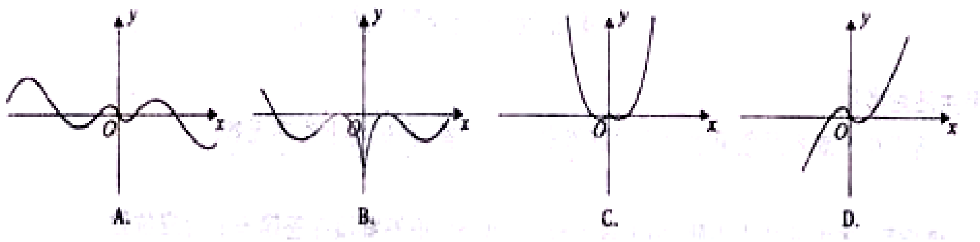
C. $-1-2\mathrm{i}$　　D. $1-2\mathrm{i}$

4.某空间几何体的三视图如图所示，则该几何体的体积是（ ▲ ）

A.16　　B. 32　　C. 48　　D. 144



5.函数 $f(x)=\sin x\cdot\ln|x|$ 的图象大致是（ ▲ ）



6.若 $0<x<\frac{1}{2}$，随机变量 ξ 的分布列是

ξ	0	1	2
P	$\frac{x}{2}$	$\frac{1}{2}-x$	$\frac{1+x}{2}$

则当 x 在 $(0,\frac{1}{2})$ 内增大时，$D(\xi)$（ ▲ ）

A. 减小　　B. 增大　　C. 先减小后增大　　D. 先增大后减小

7.设 $0<x<1$,则“$x^2\sin x<\frac{1}{2}$”是“$x\tan x<\frac{1}{2}$”的（ ▲ ）

A．充要条件　　B．充分不必要条件

C．必要不充分条件　　D．既不充分也不必要条件

8.在△ ABC 中， $A=90°$ ， $B=60°$ ，点 D 满足 $\overrightarrow{AD}=\lambda\overrightarrow{AB}+(2-\lambda)\overrightarrow{AC}$（$\lambda\in R$），点 E 是线段 BC 上的动点。若 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AD}$ 为定值，则 $\lambda=$（ ▲ ）

A．$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{3}{4}$　　C．1　　D．$\frac{3}{2}$

9. 已知数列 $\{a_n\}$ 是公比为 $q(q\neq 0)$ 的等比数列，且对任意 $n\in N^+$，均有 $a_nS_n>0$（其中 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和），则下列命题一定成立的是（ ▲ ）

A．$q>0$

B．数列 $\{|a_n|\}$ 有最小值

C．若 $n\geq 2$，则 $|S_{n+1}|\geq|S_n|$

D．$|S_{n+2}|\geq|S_n|$

10. 已知 α,β 为两个不重合的平面，m,n 为两条不重合的直线，且 $\alpha\cap\beta=m$，$n\subset\beta$. 记直线 m 与直线 n 的夹角和二面角 $\alpha-m-\beta$ 均为 θ_1，直线 n 与平面 α 的夹角为 θ_2，则下列说法正确的是（ ▲ ）

A．若 $0<\theta_1<\frac{\pi}{6}$，则 $\theta_1>2\theta_2$

B．若 $\frac{\pi}{6}<\theta_1<\frac{\pi}{4}$，则 $\tan\theta_1>2\tan\theta_2$

C．若 $\frac{\pi}{4}<\theta_1<\frac{\pi}{3}$，则 $\sin\theta_1<\sin\theta_2$

D．若 $\frac{\pi}{3}<\theta_1<\frac{\pi}{2}$，则 $\cos\theta_1>\frac{3}{4}\cos\theta_2$

二、填空题：本大题共 7 小题，多空题每题 6 分，单空题每题 4 分，共 36 分。

11.已知多项式 $(x-2)^2(x+3)=x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$，则 $a_1=$___▲___，$a_3=$___▲___.

12．在△ABC 中，角 A、B、C 所对的边分别为 a、b、c，若 $a=\sqrt{7}$，$b=2$，$A=120°$，则 $\sin B=$___▲___，$c=$___▲___.

13.已知函数 $f(x)=\begin{cases}x+\frac{3}{x},x>1\\2^{-x}+1,x\leq 1\end{cases}$ 则 $f(-1)=$___▲___，$f(f(x))$ 的最小值是___▲___.

14.若 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}y+2x-3\leq 0\\x-2y+1\geq 0\\y\geq -1\end{cases}$，该平面区域表示的面积记为 S，则 $S=$___▲___，$z=|x+2|+|y|$ 的取值范围是___▲___.

15.桌面上有分别标有数字 1、2、3、4、5 的 5 张卡片，5 个同学各随机抽取 1 张卡片.若同学甲与同学乙抽取的卡片上数字之和不为 7，且同学乙与同学丙抽取的卡片上数字之和不为 6，则抽取方法种数是___▲___种.

16.已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$, $P(a,0)$为x轴上一动点.若存在以点P为圆心的圆O，使得椭圆C与圆O有四个不同的公共点，则a的取值范围是___▲___.

17.已知$g(x,y)=|y-x|+\dfrac{2}{x}+\dfrac{y^2}{2}$, x,y均为正实数.则$g(x,y)$的最小值是___▲___.

三、解答题：本大题共 5 小题，共 74 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

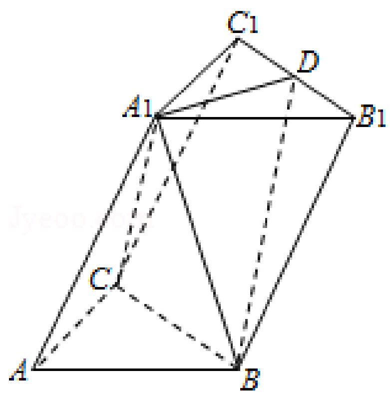
18.（本题满分 14 分）已知函数$f(x)=\cos^2 x+\sqrt{3}\sin x\sin(x+\dfrac{\pi}{2})$ $(x\in R)$.

（I）求$f(x)$的最小正周期和单调递增区间;

（II）若角α满足$f(\dfrac{\alpha}{2})=\dfrac{3}{4}$,求$\cos\alpha$的值.

19. （本题满分 15 分）如图，在三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，

$\angle BAC=90^\circ$, $AB=AC=2$, $A_1A=\sqrt{10}$, D是B_1C_1的中点，A_1在底面ABC的射影为BC的中点.



（I）证明：$A_1D\perp$平面A_1BC；

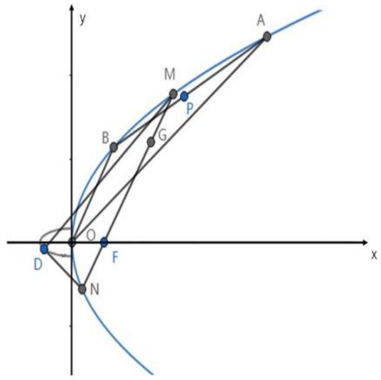
（II）设E是AB的中点，直线DE与平面AB_1C_1所成的角为θ,求$\sin\theta$的值.

20.（本题满分 15 分）已知等比数列$\{a_n\}$的公比$q>1$,且$a_1+a_2+a_3=39$,a_3+2a_2是a_2，a_4的等差中项。

（I）求$\{a_n\}$的通项公式及数列$\{n\cdot a_n\}$的前n项和S_n；

（II）设$b_n=\dfrac{a_{n-1}}{(a_{n-1}+1)(a_n+1)}(n\geq 2)$,$T_n$是数列$\{b_n\}$的前$n$项和,若$T_k\geq\dfrac{31}{125}$,求正整数$k$的最小值.

21.（本题满分 15 分）已知直线l：$y=kx+b$与抛物线$C:y^2=4x$交于不同的两点A，B.F为抛物线C的焦点，O 为坐标原点，G是$\triangle OAB$的重心，直线l恒过点P $(\dfrac{7}{2},\dfrac{7}{2})$.



（I）若$k\geq 1$，求直线OG斜率的取值范围；

（II）若D是半椭圆$x^2+9y^2=1(x\leq 0)$上的动点，直线GF与抛物线C交于不同的两点M,N. 当$\dfrac{1}{2}\leq k\leq 2$时，求$\triangle DMN$面积的取值范围.

22.（本题满分 15 分）已知函数$f(x)=x\ln x-ax^2+x\ (a\in R)$.

（I）若$f(x)$恰有两个极值点$x_1,x_2(x_1<x_2)$,求$f(x_1)$的取值范围.

（II）若$\sqrt{e}\leq a\leq e^2$, $f(x)$在$x=x_1,x_2(x_1<x_2)$处导数相等，证明：$f(x_1+x_2)<-\dfrac{2}{e^2}$.

（e为自然对数的底数且$e=2.71\cdots\cdots$）

参考答案及评分标准

一、选择题:本题考查基本知识和基本运算。每小题 4 分，满分 40 分。

1. A　**2.** B　**3.** D　**4.** C　**5.** A

6. B　**7.** C　**8.** D　**9.** D　**10.** A

二、填空题:本题考查基本知识和基本运算。多空题每题 6 分，单空题每题 4 分，满分 36 分。

11. $-1;12$　**12.** $\frac{\sqrt{21}}{7}$；1　**13.** 3；$2\sqrt{3}$　**14.** 5；$[\frac{1}{2},5]$

15. 78　**16.** $(-\frac{3}{2},\frac{3}{2})$　**17.** $2\sqrt{2}-\frac{1}{2}$　（区间开闭不作要求）

三、解答题:本大题共 5 小题，共 74 分。

18. 本题主要考查三角函数及其恒等变换等知识，同时考查运算求解能力。满分 14 分。

（I）由 $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ 与 $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ 得

$$f(x) = \sin(2x+\frac{\pi}{6})+\frac{1}{2}.$$ **3 分**

所以 $f(x)$ 的最小正周期是 π.　**5 分**

由正弦函数的性质得

$$-\frac{\pi}{2}+2k\pi \le 2x+\frac{\pi}{6} \le \frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in Z,$$

解得

$$-\frac{\pi}{3}+k\pi \le x \le \frac{\pi}{6}+k\pi, k\in Z,$$

所以 $f(x)$ 的单调递增区间是 $[k\pi-\frac{\pi}{3},k\pi+\frac{\pi}{6}](k\in Z)$.　**7 分**

（II）由 $f(\frac{\alpha}{2})=\frac{3}{4}$ 得

$$\sin(\alpha+\frac{\pi}{6})=\frac{1}{4}$$

由 $\alpha=(\alpha+\frac{\pi}{6})-\frac{\pi}{6}$ 得

$$\cos\alpha=\cos(\alpha+\frac{\pi}{6})\cos\frac{\pi}{6}+\sin(\alpha+\frac{\pi}{6})\sin\frac{\pi}{6}$$ **10 分**

因为

$$\cos(\alpha+\frac{\pi}{6})=\pm\frac{\sqrt{15}}{4}$$

所以

$$\cos\alpha=\frac{1+3\sqrt{5}}{8} \text{ 或 } \cos\alpha=\frac{1-3\sqrt{5}}{8}$$ **14 分（每个答案 2 分）**

19. 本题主要考查空间点、线、面位置关系，直线与平面所成的角等基础知识，同时考查空间想象能力和运算求解能力。满分 15 分。

（I）设 F 为 BC 的中点，由题意得 $A_1F \perp$ 平面 ABC，所以 $A_1F \perp AF$

因为 $AB = AC$，所以 $AF \perp BC$. 故 $AF \perp$ 平面 ABC.　**3 分**

由 D, F 分别为 B_1C_1, BC 的中点，得 $DF // B_1B$ 且 $DF = B_1B$，从而 $DF // A_1A$ 且 $DF = A_1A$，

所以 A_1AFD 为平行四边形.故 $A_1D // AF$.　**5 分**

又因为 $AF \perp$ 平面 ABC，所以 $A_1D \perp$ 平面 ABC　**6 分**

（II）连结 AF，FD, AD，作 $EE_1 \perp AF$ 且 $EE_1 \cap AF = E_1$，设 D_1 为 CD_1 的中点，连结 D_1E_1.
得 $DD_1 // EE_1$ 且 $DD_1 = EE_1$.所以 DD_1E_1E 为平行四边形.故 $D_1E_1 // DE$ 且 $D_1E_1 = DE$.
所以直线 D_1E_1 与平面 AB_1C_1 所成的角为 θ **8 分**
设 D 在平面 ABC 的射影是 H，由 $AB = AC = 2$，$A_1A = \sqrt{10}$ 得 $DH = 2\sqrt{2}$，$HE = \sqrt{5}$.
因为 $DH \perp$ 平面 ABC，$HE \subset$ 平面 ABC，所以 $DH \perp HE$.故 $D_1E_1 = DE = \sqrt{13}$. **10 分**
因为 $B_1C_1 \perp DF$，$B_1C_1 \perp AF$，$DF, AF \subset$ 平面 ADF，所以 $B_1C_1 \perp$ 平面 ADF.
又因为 $B_1C_1 \subset$ 平面 AB_1C_1，故平面 $ADF \perp$ 平面 AB_1C_1. **12 分**
所以 E_1 在平面 AB_1C_1 的射影 H_1 在 AD 上.在 ΔAFD 中，F 到 AD 的距离 $h = 1$，
故 $EH_1 = \dfrac{h}{2} = \dfrac{1}{2}$. **14 分** 所以 $\sin\theta = \dfrac{EH_1}{D_1E_1} = \dfrac{\sqrt{13}}{26}$. **15 分**

（建系等其他方法皆可，酌情给分）

20. 本题主要考查等差数列、等比数列、数列求和等基础知识，同时考查运算求解能力和综合应用能力。满分 15 分。

（I）由 $a_3 + 2a_2$ 是 a_2，a_4 的等差中项得

$$a_2 + a_4 = 2a_3 + 4a_2.$$

因为 $a_2 > 0$，所以

$$q^2 - 2q - 3 = 0.$$

解得

$$q = 3 \text{ 或 } q = -1.$$

因为 $q > 1$，所以

$$q = 3.$$ **2 分**

由 $a_1 + a_2 + a_3 = 39$ 得

$$a_1 = 3.$$

解得

$$a_n = 3^n.$$ **4 分**

故

$$S_n = 1\cdot 3 + 2\cdot 9 + 3\cdot 27 + \cdots + n\cdot 3^n,$$
$$3S_n = 1\cdot 9 + 2\cdot 27 + \cdots + n\cdot 3^{n+1},$$ **6 分**

所以

$$2S_n = n\cdot 3^{n+1} - (3 + 9 + 27 + \cdots + 3^n)$$

因此

$$S_n = \frac{(2n-1)\cdot 3^{n+1} + 3}{4}$$ **8 分**

（II）由（I）可知

$$b_n = \frac{3^{n-1}}{(3^{n-1}+1)(3^n+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3^{n-1}+1} - \frac{1}{3^n+1}\right)$$ **10 分**

所以

$$T_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{10}\right) + \cdots + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3^{n-1}+1} - \frac{1}{3^n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{3^n+1})$$ **12 分**

由 $T_k\ge\frac{31}{125}$ 得

$$\frac{1}{3^k+1}\le\frac{1}{250}$$

因为 k 是正整数，解得

$$k\ge 6$$ **15 分**

所以正整数 k 的最小值是 6.

注：若写出 k 的最小值是 6，但无裂项这一过程，只给 2 分答案分.

21. 本题主要考查椭圆、抛物线的几何性质，直线与抛物线的位置关系等基础知识，同时考查运算求解能力和综合应用能力。满分 15 分。

（I）设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),G(x_0,y_0)$.

直线 AB 与抛物线 C 联立：$\frac{k}{4}y^2-y+b=0$.

所以

$$y_1+y_2=\frac{4}{k},x_1+x_2=\frac{y_1+y_2-2b}{k}=\frac{4}{k^2}-\frac{7}{k}+7.$$ **2 分**

由 $x_0=\frac{x_1+x_2}{3},y_0=\frac{y_1+y_2}{3}$ 得

直线 OG 斜率 $k'=\frac{y_0}{x_0}=\frac{4}{7k+\frac{4}{k}-7}$. **3 分**

因为 $k\ge1$，所以 $0<k'\le1$. **5 分**

（II）直线 MN 斜率 $k_0=\frac{y_0}{x_0-1}=\frac{4}{4k+\frac{4}{k}-7}$.

由 $\frac{1}{2}\le k\le 2$ 得

$$\frac{4}{3}\le k_0\le 4.$$ **7 分**

设直线 $MN:x=my+1$(其中$m=\frac{1}{k_0}\in[\frac{1}{4},\frac{3}{4}]$)，$D(x_D,y_D)$，$M(x_{\mathrm{M}},y_{\mathrm{M}})$，$N(x_N,y_N)$.

直线 MN 与抛物线 C 联立：$y^2-4my-4=0$.

所以

$$|y_M-y_N|=4\sqrt{m^2+1}.$$

设 d 为点 D 到直线 MN 的距离，$\triangle DMN$ 的面积记为 S.

$$S=\frac{1}{2}|MN|\cdot d=\frac{1}{2}\sqrt{m^2+1}\cdot|y_M-y_N|\cdot\frac{|my_D+1-x_D|}{\sqrt{m^2+1}}=2\sqrt{m^2+1}\cdot|my_D+1-x_D|.$$ **9 分**

由题知 $x_D{}^2+9y_D{}^2=1(x_D\le 0)$，故令 $x_D=\sin\theta\le 0, y_D=\dfrac{1}{3}\cos\theta.$

$$S\le 2\sqrt{m^2+1}\cdot(1+\sqrt{1+\frac{m^2}{9}}).\qquad \textbf{10 分}$$

当 $m=\dfrac{3}{4}$ 时，S 取最大值 $\dfrac{5\sqrt{17}}{8}+\dfrac{5}{2}$. **12 分**

$$S\ge 2(1-\frac{m}{3})\sqrt{m^2+1}.\qquad \textbf{13 分}$$

设

$$f(m)=2(1-\frac{m}{3})\sqrt{m^2+1}, \frac{1}{4}\le m\le\frac{3}{4},$$

则

$$f'(m)=-\frac{2\sqrt{m^2+1}}{3}+\frac{2m(3-m)}{3\sqrt{m^2+1}}=\frac{-2(2m-1)(m-1)}{3\sqrt{m^2+1}}.$$

$\dfrac{1}{4}\le m\le\dfrac{1}{2}$ 时, $f'(m)<0$, $f(m)$ 单调递减； $\dfrac{1}{2}\le m\le\dfrac{3}{4}$ 时, $f'(m)>0$, $f(m)$ 单调递增。

所以

$$f(m)\ge f(\frac{1}{2})=\frac{5\sqrt{5}}{6}, \text{即 } m=\frac{1}{2} \text{ 时，} S \text{ 取最小值 } \frac{5\sqrt{5}}{6}.\qquad \textbf{15 分}$$

所以△DMN 面积的取值范围是$[\dfrac{5\sqrt{5}}{6},\dfrac{5\sqrt{17}}{8}+\dfrac{5}{2}]$. **（两端求解过程各 3 分，独立给分）**

注：开闭区间不作要求，如果设直线 $MN: y=k(x-1)$, 则同样按上述类似标准给分

22. 本题主要函数的单调性，导数的运算及其应用，同时考查逻辑思维能力和综合应用能力。满分 15 分。

（I）函数 $f(x)$ 的导函数

$$f'(x)=2+\ln x-2ax.\qquad \textbf{2 分}$$

设

$$g(x)=\frac{2+\ln x}{2x}.$$

则 $g(x)=a$ 存在不同的两个实根 x_1, x_2.

函数 $g(x)$ 的导函数

$$g'(x)=-\frac{1+\ln x}{2x^2}.$$

$x\in(0,\dfrac{1}{e})$ 时， $g'(x)>0$, $g(x)$ 单调递增； $x\in(\dfrac{1}{e},+\infty)$ 时， $g'(x)<0$, $g(x)$ 单调递减.

因为 $x\in(\dfrac{1}{e^2},\dfrac{1}{e})$ 时， $g(x)\in(0,\dfrac{e}{2})$ ； $x\in(\dfrac{1}{e},+\infty)$ 时， $g(x)\in(0,\dfrac{e}{2})$.

所以 $x_1\in(\dfrac{1}{e^2},\dfrac{1}{e}), x_2\in(\dfrac{1}{e},+\infty)$. **4 分（写出 x_1 的范围即可）**

因为 $f'(x_1)=0$,所以

$$f(x_1)=\frac{x_1\ln x_1}{2}. \qquad \textbf{5 分}$$

而 $f(x_1)$ 的导函数 $f'(x_1)=\frac{1+\ln x_1}{2}\le 0$,即 $f(x_1)$ 在 $(\frac{1}{e^2},\frac{1}{e})$ 上单调递减。

所以 $f(x_1)$ 的取值范围是 $(-\frac{1}{2e},-\frac{1}{e^2})$. **7 分**

（II）函数 $f(x)$ 的导函数

$$f'(x)=2+\ln x-2ax.$$

由 $f'(x_1)=f'(x_2)$ 得

$$\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}=2a.$$

而

$$x_1+x_2=\frac{1}{2a}(x_1+x_2)\frac{\ln x_2-\ln x_1}{x_2-x_1}=\frac{\ln t(t+1)}{2a(t-1)}.\text{其中 } t=\frac{x_2}{x_1}\in(1,+\infty).$$

设

$$g(t)=\ln t-\frac{2(t-1)}{t+1},t\in(1,+\infty),$$

函数 $g(t)$ 的导函数

$$g'(t)=\frac{1}{t}-\frac{4}{(t+1)^2}=\frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}>0.\text{即 } g(t) \text{ 在 } (1,+\infty) \text{ 上单调递增}$$

所以

$$g(t)>g(1)=0.$$

$$\text{即}\ \frac{\ln t(t+1)}{t-1}>2.$$

因此

$$x_1+x_2>\frac{1}{a}. \qquad \textbf{11 分}$$

函数 $f'(x)$ 的导函数

$$f''(x)=\frac{1}{x}-2a.$$

故

$$f''(x_1+x_2)<-a<0.\text{即 } f'(x_1+x_2) \text{ 在 } (\frac{1}{a},+\infty) \text{ 上单调递减.}$$

则

$$f'(x_1+x_2)<f'(\frac{1}{a})=-\ln a<0.\text{即 } f(x_1+x_2) \text{ 在 } (\frac{1}{a},+\infty) \text{ 上单调递减.}$$

$$\text{所以 } f(x_1+x_2)<f(\frac{1}{a})=-\frac{\ln a}{a}. \qquad \textbf{13 分}$$

设

$$h(x)=-\frac{\ln x}{x}.$$

函数 $h(x)$ 的导函数

$$h'(x)=\frac{\ln x-1}{x^2}.$$

$x\in(\sqrt{e},e)$ 时 $h'(x)<0$, $h(x)$ 单调递减； $x\in(e,e^2)$ 时 $h'(x)>0$, $h(x)$ 单调递增.

所以 $h(x)\le \max\{h(\sqrt{e}),h(e^2)\}\le h(e^2)=-\frac{2}{e^2}$.

又 $\sqrt{e}\le a\le e^2$，故

$$f(x_1+x_2)<-\frac{2}{e^2}.$$ **15 分**