

# 阅读材料: 耦合 (Coupling)

宗语轩

2023 年 10 月 25 日

我们先看下面一个例子:

**例 0.1.** 有两个玩家  $A, B$  投掷两枚两面硬币, 玩家  $A$  投掷到正面的概率是 0.75, 玩家  $B$  投掷到正面的概率是 0.5. 现两个玩家独立投掷硬币各 100 枚, 记  $N_A, N_B$  分别表示玩家  $A, B$  投掷到正面的个数, 证明: 对任意固定的  $k(0 < k < 100)$ , 均有

$$\mathbb{P}(N_A \geq k) \geq \mathbb{P}(N_B \geq k)$$

**问题与思考:** 我们当然可以显示地写出两者的概率表达式:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N_A \geq k) &= \sum_{n=k}^{100} \binom{100}{n} 0.75^n 0.25^{100-n}, \\ \mathbb{P}(N_B \geq k) &= \sum_{n=k}^{100} \binom{100}{n} 0.5^n 0.5^{100-n} = \sum_{n=k}^{100} \binom{100}{n} 0.5^{100}.\end{aligned}$$

但是这样的话我们不能比较直观地得到待证命题 (读者可以进行尝试), 而命题直观上看又是对的, 那么我们需要怎么解决呢? 这里我们要引入一个耦合 (Coupling) 的技巧:

注意到随机变量的定义  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  是 Borel 实值可测函数, 两个随机变量的分布相同并不代表随机变量相同, 也即不代表他们的样本空间相同 (反例请读者自行思考). 换句话说, 同一个的”输出端”对应的”输入端”不一定唯一. 借助这个想法, 我们通过匹配合适的样本空间来达到上述目的:

我们进行如下机制: 考察两个玩家分别掷一次硬币的情形. 先让玩家  $B$  投掷, 若结果为正面, 则令玩家  $A$  结果也为正面; 若结果为反面, 则令玩家  $A$  结果为正面的概率为 0.5.

按照上述机制, 我们可以计算玩家  $A$  投掷到正面的概率亦为 0.75. 我们记  $X_{A,i}$  表示玩家  $A$  在第  $i$  次投掷硬币正面的个数 (结果只可能为 1 或 0),  $X_{B,i}$  表示玩家  $B$  在第  $i$  次投掷硬币正面的个数. 由上述机制可知: 对任意  $1 \leq i \leq 100$ , 均有  $X_{A,i} \geq X_{B,i}$ , 因此

$$\sum_{i=1}^{100} X_{A,i} \geq \sum_{i=1}^{100} X_{B,i} \Rightarrow \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{100} X_{A,i} \geq k\right) \geq \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{100} X_{B,i} \geq k\right).$$

而  $N_A$  和  $\sum_{i=1}^{100} X_{A,i}$  两者分布相同,  $N_B$  和  $\sum_{i=1}^{100} X_{B,i}$  两者分布相同. 因此

$$\mathbb{P}(N_A \geq k) \geq \mathbb{P}(N_B \geq k).$$

更一般的证明见下:

---

<sup>0</sup>个人主页: <http://home.ustc.edu.cn/~zyx240014/>.

发现错误欢迎联系: [zyx240014@mail.ustc.edu.cn](mailto:zyx240014@mail.ustc.edu.cn).

**证明.** 设随机变量  $Z \sim U[0, 1]$ , 即  $[0, 1]$  上的均匀分布, 对任意  $1 \leq i \leq 100$  引入随机变量  $Y_{A,i}, Y_{B,i}$ , 使其相互独立且满足

$$Y_{A,i} = \begin{cases} 1, & 0 \leq Z \leq 0.75, \\ 0, & 0.75 < Z \leq 1. \end{cases}, \quad Y_{B,i} = \begin{cases} 1, & 0 \leq Z \leq 0.5, \\ 0, & 0.5 < Z \leq 1. \end{cases}$$

因此对任意  $1 \leq i \leq 100$ , 均有  $Y_{A,i} \geq Y_{B,i}$ , 故

$$\sum_{i=1}^{100} Y_{A,i} \geq \sum_{i=1}^{100} Y_{B,i} \Rightarrow \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{100} Y_{A,i} \geq k\right) \geq \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{100} Y_{B,i} \geq k\right).$$

而  $N_A$  和  $\sum_{i=1}^{100} Y_{A,i}$  两者分布相同,  $N_B$  和  $\sum_{i=1}^{100} Y_{B,i}$  两者分布相同. 因此

$$\mathbb{P}(N_A \geq k) \geq \mathbb{P}(N_B \geq k).$$

□

上述例子帮助我们对耦合这个概念有了一个直观地了解, 现在我们给出它的严格定义:

**定义 0.1.** 概率空间  $\mathcal{X}$  上两个概率测度  $\mu, \nu$  的**耦合 (coupling)**, 是指  $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$  上的联合分布  $\pi$ . 离散性下若随机向量  $(X, Y) \sim \pi$ , 则对任意  $x, y$ , 满足

$$\mathbb{P}(X = x) = \mu(x), \quad \mathbb{P}(Y = y) = \nu(y)$$

**注.** 联合分布可推出边缘分布, 反之不成立.

考虑有限离散型的情形,  $\mu, \nu$  的耦合可被矩阵  $q \in \mathbb{R}^{|\mu| \times |\nu|}$  刻画, 其中  $q(x, y) = \mathbb{P}(X = x, Y = y)$  满足

$$\sum_y q(x, y) = \mu(x), \quad \sum_x q(x, y) = \nu(y).$$

**注.** 耦合的存在性: 对任意  $\mu, \nu$ , 均存在耦合  $q(x, y) = \mu(x)\nu(y)$ , 此时  $X$  和  $Y$  独立.

**例 0.2.** 耦合伯努利分布  $B(0.75)$  和  $B(0.5)$ .

**解.** 记耦合的矩阵

$$q = \begin{pmatrix} q(0,0) & q(0,1) \\ q(1,0) & q(1,1) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

由定义知,

$$\begin{cases} a + b = 0.25, \\ c + d = 0.75, \\ a + c = 0.5, \\ b + d = 0.5, \end{cases} \Rightarrow q = \begin{pmatrix} a & 0.25 - a \\ 0.5 - a & 0.25 + a \end{pmatrix}, 0 \leq a \leq 0.25.$$

□

**注.** 例 0.1 中用到的耦合方法即为上述取  $a = 0.25$  的情形.

例 0.3. 耦合伯努利分布  $B(0.5)$  和  $B(0.5)$ .

解. 由定义知,

$$q = \begin{pmatrix} a & 0.5 - a \\ 0.5 - a & a \end{pmatrix}, 0 \leq a \leq 0.5.$$

- **Case 1:**  $a = 0.5$ ,  $q = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}$ , identical coupling.
- **Case 2:**  $a = 0$ ,  $q = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 \end{pmatrix}$ , negative coupling.
- **Case 3:**  $a = 0.25$ ,  $q = \begin{pmatrix} 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 \end{pmatrix}$ , independent coupling.

□

习题. 对  $0 < p \leq q < 1$ , 耦合伯努利分布  $B(p)$  和  $B(q)$ , 并给出当矩阵  $q$  存在元素 0 时的耦合方法.

提示. 参考例 0.1 中的证明方法.

### 参考资料

- [1] 王冠扬, 马尔科夫链里的耦合方法, 中科大研究生创新计划高水平和华罗庚科技英才班前沿短课程.

[https://wvpn.ustc.edu.cn/http/77726476706e69737468656265737421e7fb4a8869257b447d468ca88d1video/detail\\_5722\\_30386.htm](https://wvpn.ustc.edu.cn/http/77726476706e69737468656265737421e7fb4a8869257b447d468ca88d1video/detail_5722_30386.htm)

- [2] Markov chains and mixing times, David A. Levin and Yuval Peres, American Mathematical Society, 2017.