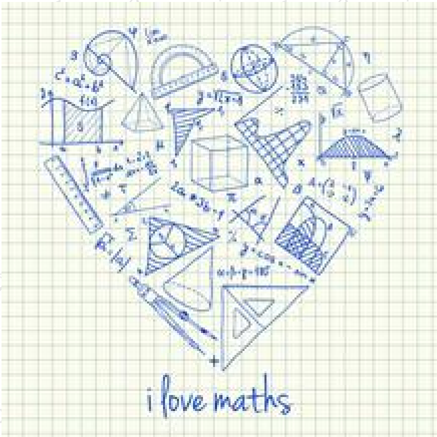
Taylor's prove Collection

泰勒证明专题



Math equals equal.

整理：南航大数学竞赛

整理时间：November 16, 2016

Email: 1013752817@qq.com

目　　录

第 1 章 引言

在专题的开头，我们有必要重温一遍泰勒中值定理的数学定义，关注到其中一些细节，这些细节正是做证明中易忽略掉却不易察觉的东西。在回顾的同时，大家应注意关键字。

首先回顾在 $x = x_0$ 点展开的 $f(x)$ 的泰勒公式。

Theorem 1.1 泰勒公式

泰勒公式的数学表达为

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x)$$

其中，$R_n(x)$ 代表余项，依据推导过程的不同，余项的写法和成立条件有所差异。

Note: 理论上，泰勒公式余项一共有 5 种表达形式，分别是佩亚诺 (*Peano*）余项、拉格朗日（*Lagrange*）余项、柯西（*Cauchy*）余项、施勒米尔希-罗什 (*Schlomilch-Roche*）余项和积分余项。后三项并不需要掌握，了解即可。极限求解中我们常用佩亚诺余项，反观证明题，则是拉格朗日余项应用颇多。

严格来说，函数 $f(x)$ 能否展开成泰勒公式的取决条件，也因余项的不同存在微小差异。由此，正确地选择余项对证明题的求解至关重要。

在这里顺带一提的是，后面涉及到泰勒级数的内容中，一个函数是否能展开成泰勒级数，取决于其余项条件是否成立，即 $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$。所以不仅是公式本身，余项同样也是我们所关注的重点。

我们来看一看两种常见余项的形式及成立条件。

Definition 1.1 拉格朗日余项

若 $f(x)$ 在含 x_0 的某个开区间 (a, b) 内 $n+1$ 阶可导，则

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \ (\xi介于x和x_0之间)$$

Note: 值得注意的是，拉格朗日余项常常被用作误差控制/误差估计。

Definition 1.2 佩亚诺余项

若 $f(x)$ 在点 $x = x_0$ 上 n 阶可导，则

$$R_n(x) = O((x - x_0)^n)$$

对比下来，可以发现，佩亚诺余项的成立条件比起拉格朗日来有所弱化，因此适用条件也相应地放宽了不少。

接下来，我们通过对精选的几种题型几道题的归纳讲解，仔细体会证明题中，如何正确地使用泰勒公式。使用时一些思路的由来、发散以及需要处理的细节，我们均会一一讲解。

第 2 章 特殊点展开及应用

2.1 已知点（端点）展开

Example 2.1: 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有二阶导数，$f'(a)=f'(b)=0$。求证：$\exists\xi\in(a,b)$，使 $|f''(\xi)|\geq\dfrac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$。

分析：题目中“二阶导数”“ξ”等字眼已经明确提示我们，应运用泰勒公式去证明。但，展开式中的 x 和 x_0 应该怎么选择呢？在证明题中，这个选择往往依据题中条件。

读过一遍题后，我们注意到，条件中给了 $f'(a)=f'(b)=0$，其实这里已经提示得很明显了，只有 x_0 才能出现在导数中，于是我们选择函数在 a,b 两点分别展开到含拉格朗日余项的二阶。

☞ **Proof:** 将 $f(x)$ 分别在 a,b 两点泰勒展开到二阶，

$$
\begin{aligned}
f(x)=&f(a)+\frac{f''(\xi_1)}{2}(x-a)^2,\xi_1\in(a,x)\\
f(x)=&f(b)+\frac{f''(\xi_2)}{2}(b-x)^2,\xi_2\in(x,b)
\end{aligned}
$$

作差，得 $|f(a)-f(b)|=\left|\dfrac{f''(\xi_1)}{2}(x-a)^2-\dfrac{f''(\xi_2)}{2}(b-x)^2\right|$。

此时为了最快得到答案，我们取 $x=\dfrac{a+b}{2}$。

$$
\begin{aligned}
|f(a)-f(b)|=&\frac{(b-a)^2}{4}\left|\frac{f''(\xi_1)-f''(\xi_2)}{2}\right|\\
\leq&\frac{(b-a)^2}{4}\frac{|f''(\xi_1)|+|f''(\xi_2)|}{2}\\
=&\frac{(b-a)^2}{4}|f''(\xi)|\,(\text{这一步使用了介值定理})
\end{aligned}
$$

进一步得证原命题。 □

Example 2.2: 设 $f(x)$ 在 [-1,1] 上有三阶连续导数，且 $f(-1)=0,f(1)=1,f'(0)=0$，证明：$\exists\xi\in(-1,1),s.t\,f'''(\xi)=3$。

分析：思路同上一题，突破口在导数条件 $f'(0)=0$，我们尝试将 $x_0=0$ 代入。

☞ **Proof:**

$$
f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+\frac{f'''(\xi)}{6}x^3
$$

代入 $x=-1,1$

$$f(1)=f(0)+f'(0)+\frac{f''(0)}{2}+\frac{f'''(\xi_1)}{6}$$
$$f(-1)=f(0)-f'(0)+\frac{f''(0)}{2}-\frac{f'''(\xi_2)}{6}$$

作差，$1=\dfrac{f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)}{6}=\dfrac{f'''(\xi_3)}{3}$

进一步命题得证。 □

Note: *不知道大家注意到没有，此类题往往有很强的提示性，提示往往有两点，一是所证结论简单，一是导数条件。*

2.2 中点展开

我们现先将 (a,b) 上可导的函数 $f(x)$ 泰勒展开成二阶，并把关注点放在一阶导数上。

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2}(x-x_0)^2$$

取 $x_0=\dfrac{a_k+b_k}{2}(a\le a_k<b_k\le b)$，代入两点 a_k,b_k，两式相加

$$f(a_k)+f(b_k)=2f\left(\frac{a_k+b_k}{2}\right)+\frac{f''(\xi')}{4}(b_k-a_k)^2$$

不难发现，处理后的式子中不再含一阶导数，可以很方便地得出 $f(x)$ 与 $f''(x)$ 的不等式关系。因此中点展开常用于越过一阶导数的证明问题。

Note: *由此出发，我们可以思考，是不是通过类似方法也可以越过其他阶，得到 $f(x)$ 和某一阶导数的不等式关系呢？实际上，应用这个方法，两式相加可以得到越过奇数阶的式子，两式相减得到的是越过偶数阶的式子。*

Example 2.3: 设非负函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有 $|f''(x)|\le M$，$f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)=0$，$b-a\le 1$，证明：$\max\limits_{a\le x\le b}\min f(x)\le\dfrac{M}{8}$

Proof: 如本节开头所讲，为了越过一阶导数，将 $f(x)$ 在区间 (a,b) 中点展开，将 a,b 分别代入 x，相加得

$$|f(a)+f(b)|\le\left|\frac{f''(\xi')}{4}\right|(b-a)^2\le\frac{M}{4}$$

又

$$|f(a)+f(b)|=f(a)+f(b)\ge 2\sqrt{f(a)f(b)}\ge 2\min_{a\le x\le b}f(x)$$

进一步原命题得证。 □

Example 2.4: 设 f 在 $[0,1]$ 上具有三阶导数，$f(0)=1,f(1)=2$，$f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$。证明：至少存在一点 $\xi\in(0,1),s.t\ |f'''(x)|\ge 24$。

Proof: 所证结论是 $f'''(x)$ 与 $f(x)$ 的直接关系，又由 $f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$，我们可以通过作差的方式消除偶阶导。

取 $x_0=\dfrac{1}{2}$，分别将 $x=0$，$x=1$ 代入，作差

$$f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)=48$$

所以，必然存在存在一点 $\xi\in(0,1)$,$s.t\ |f'''(x)|\geq 24$ □

Note: 以上举例的题目都比较直观，即便用一一尝试各种思路的方法也能很快做出。但我建议同学们理解到每一种用法的意义、适用范围，这样才能理解到思路的由来，减少尝试的次数，增加难题的成功率。

2.3 极点展开

极点展开是非任意点展开证明中最常考，也是出题较有隐蔽性的一个版块，且极点展开与任意点展开也有交互，所以本节采用难度梯度的例题列举来对用法加以说明，且会针对如何与前两种方法区分开加以说明。

2.3.1 极值点条件（显）

以下题目中，题中直接给出了含极值点的条件，处理方法较容易，思想和上一节相似，同样是越过一阶导数。

Example 2.5: 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有二阶导数，$f(0)=f(1)=1$，$\min_{x\in[0,1]}f(x)=-1$。证明：存在 $\xi\in(0,1)$，$s.t\ f''(\xi)\geq 16$。

Proof: 设 $f(x)$ 在点 x_0 处取得最小值-1，不妨设 $x_0\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$，由泰勒公式

$$f(0)=f(x_0)+f'(x_0)(0-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2}(0-x_0)^2=-1+\frac{x_0^2}{2}f''(\xi)$$

由 $x_0\leq\dfrac{1}{2}$ 可进一步得出结论。 □

Note: 有同学可能会疑惑为什么会有“不妨设”，这就要主要两段对于结果是对称的，若 $x_0\in\left[\dfrac{1}{2},1\right]$，只需要把 $x=0$ 改为 $x=1$，结论仍相同。

下面这道相似例题，同学们可自行尝试一下。

Exercise 2.1: 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二次可导，$f(0)=f(1)=0$，在该区间上 $f(x)$ 的最小值为-1。证明：$\exists\xi\in(0,1)$ 满足 $f''(\xi)\geq 8$。

2.3.2 极值点条件（隐）

此类题题中不会给出极值条件，突破口相对隐秘，且存在干扰项（初值条件 $f(0)=\cdots$，$f'(0)=\cdots$），会让你误以为是前面所讲的已知点展开类型。

先看一道例题。

Example 2.6: 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有二阶导数，$f(a)=f(b)=f'(a)=f'(b)=0$，又存在常数 M，使得在 $[a,b]$ 上恒有 $|f''(x)|\leq M$。证明：在 $[a,b]$ 上恒有 $|f(x)|\leq\dfrac{M}{16}(b-a)^2$。

分析：不熟悉的同学可能一眼看上去，并没有发现极值条件，于是开始了端点展开或者各种尝试。实际上，极值点条件隐藏在这句话里：$f(a) = f(b) = f'(a) = f'(b) = 0$。为什么这么说呢，记不记得 *Rolle* 定理呢，由 *Rolle* 定理和这个条件，你能不能得到一个极值点条件？

Proof: 设 $|f(c)|$ 是 $|f(x)|$ 的最大值 $(a < c < b)$，则 $f'(c) = 0$。$f(x)$ 在 c, a 点分别展开成泰勒公式，

$$f(x) = f(c) + \frac{f''(\xi_1)}{2}(x-c)^2$$
$$f(x) = \frac{f''(\xi_2)}{2}(x-a)^2$$

由上两式得出

$$|f(x)| \le \frac{M}{2}(x-a)^2$$
$$|f(x) - f(c)| \le \frac{M}{2}(x-c)^2$$

两式相加，

$$|f(c)| \le \frac{M}{2}\left[(x-a)^2 + (x-c)^2\right]$$

因为 $\min\limits_{a<x<c} (x-a)^2 + (x-c)^2 = \dfrac{(c-a)^2}{2}$，所以

$$|f(c)| \le \frac{M}{4}(c-a)^2$$

同理有 $|f(c)| \le \dfrac{M}{4}(b-c)^2$，所以

$$|f(x)| \le \min\left\{\frac{M}{4}(c-a)^2,\ \frac{M}{4}(b-c)^2\right\} \le \frac{M}{16}(b-a)^2$$

原命题得证。 □

Note: 此题难点在于题目条件的解读，读到隐藏的信息后，问题就简化为了从三点展开的泰勒公式之间的不等式关系找结论。那么，如何区分其与端点展开法呢？其实，如果端点展开得到的条件不足以让你得出结论，你就可以考虑多挖掘题中条件，看能不能用中点或极点增加不等式数目。

第 3 章 任意点展开及应用

本章节的题型与前面章节有一个很大的不同之处，前面章节的题大多是求证存在性，即存在 ξ 满足某个式子。而本章节的结论大多是围绕着任意二字，区间内的任意值均满足。极点展开有交叉性，属例外。

Note: 实际上，任意点展开对应的两种思路单任意点展开和双任意点展开，前者本质上是对换 x和x_0 的取值方式（常数和变量），后者是用变量构成特殊的形式。

3.1 单任意点展开

Example 3.1: $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶连续导数，$f(0) = f(1) = 0$，且当 $x \in (0,1)$ 时，$|f''(x)| \leq A$。证明：$\forall x \in (0,1)$，$|f'(x)| \leq \dfrac{A}{2}$。

Proof:

$$f(0) = f(x) + f'(x)(0-x) + \frac{f''(\xi_1)}{2}(0-x)^2$$
$$f(1) = f(x) + f'(x)(1-x) + \frac{f''(\xi_2)}{2}(1-x)^2$$

作差

$$f'(x) = \frac{f''(\xi_1)}{2}x^2 - \frac{f''(\xi_2)}{2}(1-x)^2$$

进一步有

$$|f'(x)| \leq \frac{A}{2}(x^2 + (1-x)^2) \leq \frac{A}{2}$$

□

相似的例题有很多，不一一列举，留两道作为同学们自行检测的练习。

Exercise 3.1: 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有二阶导数，且满足条件 $|f(x)| \leq a$，$|f''(x)| \leq b$，其中 a,b 都是非负常数，c 是 $(0,1)$ 内任一点。证明：$|f'(c)| \leq 2a + \dfrac{b}{2}$

Exercise 3.2: 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 二阶可微，$f(0) = f(1)$，$|f''(x)| \leq 1$。证明：$\max\limits_{0\leq x\leq 1} |f'(x)| \leq \dfrac{1}{2}$。

3.2 双任意点展开

所谓“双任意点”，就是没有将任何点代入泰勒公式中，x和x_0 均取变量，为了达成特殊形式。相比其他题型难度较大。

Note: 其实，大部分此类题都有一个明显的特征：题干中不含端点和特殊点信息。

Example 3.2: 设 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上具有二阶导数，且

$$|f(x)| \leq M_0，0 < |f''(x)| \leq M_2，a \leq x < +\infty$$

证明：$|f'(x)| \leq 2\sqrt{M_0M_2}$。

分析：面对双任意点展开问题，常常使用如下替换：

$$x = x + h，x_0 = x$$

这样做有两个好处，一是，当只做一次展开时，能最直观地得出各阶数导数的关系，因为h 取的是任意值，方便做进一步证明。二是，h 取不同形式（正负，倍数），式子之间的线性运算可以消去一些不必要的阶数。

Proof: 对任意的 $x \in [a,+\infty)$ 及任意的 $h > 0$，由泰勒公式

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2!}f''(\xi)h^2 \qquad (\xi \in (x,x+h))$$

所以

$$f'(x) = \frac{1}{h}[f(x+h) - f(x)] - \frac{h}{2}f''(\xi) \leq \frac{2M_0}{h} + \frac{h}{2}M_2$$

易知，$\min\left\{\frac{2M_0}{h} + \frac{h}{2}M_2\right\} = 2\sqrt{M_0M_2}$

进一步原命题得证。 □

Note: *这是单式的双任意点展开，对于这种题型，我们首先可以从题干中辨认出其特征，再作分析中提到的双代换，往往就能顺利地证出命题。*

我们再来看一道多式的双任意点展开问题。

Example 3.3: 设 $f(x)$ 有三阶导数，$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$，$\lim\limits_{x\to\infty} f'''(x) = 0$。证明：$\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to\infty} f''(x) = 0$

Proof: 由泰勒公式

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2}f''(x)h^2 + \frac{1}{6}f'''(\xi_1)h^3$$
$$f(x-h) = f(x) - f'(x)h + \frac{1}{2}f''(x)h^2 - \frac{1}{6}f'''(\xi_2)h^3$$

把 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 看作未知数，其余看作已知数。在此，为了方便计算，取 $h=1$，则此方程组的解为

$$f'(x) = \frac{1}{2}[f(x+1) - f(x-1)] - \frac{1}{12}[f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)]$$
$$f''(x) = f(x+1) + f(x-1) - 2f(x) - \frac{1}{6}[f'''(\xi_2) - f'''(\xi_1)]$$

两边同时取极限，可得

$$\lim_{x\to\infty} f'(x) = \lim_{x\to\infty} f''(x) = 0$$

原命题得证。 □

Note: 归根结底，双任意点替换法是单任意点的拓展，题中给了什么，我们就用什么，题中什么都不给，我们就自己加变量。最核心的仍是x和x_0 的取法，单式和多式的判断，这样慢慢分析做下来，比一一尝试效率更高，也对解难题思维的养成有帮助，希望同学们好好体会。

第 4 章 综合应用

这个版块里，我们挑一些有代表性和难度系数稍大的题目作为讲解，开拓思路。处于基础阶段的同学可在有一些体会和进阶后再转回看这个版块。

Example 4.1: 设 $f(x)$ 在点 x_0 的邻域中有 $n+1$ 阶导数且 $f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$。证明：

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}h^{n-1} + \frac{f^{(n)}(x_0+\theta h)}{n!}h^n$$

式中，必有 $\lim\limits_{h\to 0}\theta = \dfrac{1}{n+1}$。

分析：此题入手较难，且几乎没有什么可以直接使用的条件，我们把关注点放在结论身上。

$$\lim_{h\to 0}\theta = f^{(n+1)}(x_0)\lim_{h\to 0}\theta\frac{\theta h}{f^{(n)}(x_0+\theta h) - f^{(n)}(x_0)}$$

由此，我们可以猜想，是要通过 $f^{(n)}(x_0)$ 和 $f^{(n+1)}(x_0)$ 之间的某种等式来求解。

☞ **Proof:** 写两个等式，一个是将 $f(x)$ 展开到 n 阶，余项为拉格朗日余项，另一个则展开到 $n+1$ 阶，保留佩亚诺余项 $O(h^{n+1})$。

作差

$$\frac{f^{(n)}(x_0+\theta h) - f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n = \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}h^{n+1} + O(h^{n+1})$$

进一步有

$$\frac{f^{(n)}(x_0+\theta h) - f^{(n)}(x_0)}{\theta h} = \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{\theta(n+1)} + O(1)$$

两边同时取极限

$$\lim_{h\to 0}\theta(n+1) = 1$$

进一步命题得证。 □

Example 4.2: f 是一实函数，具有三阶连续导数，并且对所有的 x，$f(x)$，$f'(x)$，$f''(x)$，$f'''(x)$ 为正值，假设对任意 x，$f'''(x) \leq f(x)$。证明：对一切 x 有 $f'(x) < 2f(x)$。

☞ **Proof:** 对于任意固定的 c 值，令

$$g(x) = f(x) + f'(x)(c-x) + \frac{f''(x)}{2}(c-x)^2$$

对 x 求导

$$g'(x) = \frac{f'''(x)}{2}(c-x)^2 \geq 0$$

当且仅当 $x = c$ 时等号成立。

对于任意的 $y>0$，

$$
\begin{aligned}
f(c+y)-f'(c+y)y+\frac{f''(c+y)}{2}y^2&=g(c+y)>g(c-y)\\
=f(c-y)+f'(c-y)y+\frac{f''(c-y)}{2}y^2&>\frac{f''(c-y)}{2}y^2
\end{aligned}
$$

由中值定理存在 $\theta\in(c-y,c+y)$，满足

$$
f''(c+y)-f''(c-y)=2yf'''(\theta)\le 2yf(\theta)<2yf(c+y)
$$

从以上两个不等式得到

$$
f(c+y)-f'(c+y)y+f(c+y)y^3>0
$$

进一步有

$$
\frac{1+y^3}{y}f(c+y)>f'(c+y)
$$

当 $y=1$ 时，分式值为 2，由 c 的任意性，原命题得证。 □

Note: 此题难度较大，通过余项和导数正负考虑到了构造单调函数来证明，是双任意点的难题。

第 5 章 相关拓展

在泰勒的一些证明题中，有的思路弯弯绕绕，有的所用技巧较多，下面我们介绍微分里的三种其他方法，在一些时候用它们代替泰勒解题会产生奇效（尤其是 K 值法）。相关使用方法就 K 值法详细一说，其余只讲个例，请同学们自行探索。

5.1 K 值法

K 值法常用来简化系数证明问题，步骤如下:

- 将结论中不含 ξ 的因子分离出来作为一个整体，并令其为常数 K，构造一个含 K 的等式
- 对含常数 K 的等式进行适当变形，并且使等式右端为零
- 再将等式左端中出现区间 (a, b) 的端点 a（或 b）全部换成 x，并令左端为 $F(x)$
- 再结合 $Rolle$ 定理可进一步证

通过下面的例题，大家应该会有更直观的感受。

Example 5.1: 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上三阶可导，证明至少存在一点 $\xi \in (a, b)$，使得

$$f(b) = f(a) + \frac{1}{2}(b-a)(f(a)+f(b)) - \frac{1}{12}(b-a)^3 f'''(\xi)$$

☞ **Proof:** 令

$$K = \frac{12}{(b-a)^3}\left(f(a) - f(b) + \frac{1}{2}(b-a)(f(a)+f(b))\right)$$

整理即

$$f(b) - f(a) - \frac{1}{2}(b-a)(f(a)+f(b)) + \frac{1}{12}(b-a)^3 K = 0$$

将上式左端出现的 b 全部换成 x，构造辅助函数

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{1}{2}(x-a)(f(x)+f(a)) + \frac{1}{12}K(x-a)^3$$

显然 $F(a) = F(b) = 0$，根据 $Rolle$ 定理，存在 $\xi \in (a, b)$，使 $F'(\xi) = 0$
同时，根据 $F'(x)$ 的表达式可知 $F'(a) = 0$
所以 $F'(a) = F'(\xi) = 0$，再由 $Rolle$ 定理得 $F''(\xi') = 0$
即

$$K = f'''(\xi')$$

命题得证。 □

Note: 不知道同学们有没有认真观察第二个式子？其实，那就是设 K 的由来。没错，第一步其实是第二步推出来的，第二步其实就是把题干中含 ξ 的部分换成了 K。用此法可以证明很多泰勒和微分不易证的结论，望大家好好体会。

留练习题一道：

Exercise 5.1: 设 $f''(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在，$a<c<b$，试证：$\exists\xi\in(a,b)$，使得

$$\frac{f(a)}{(a-b)(b-c)}+\frac{f(c)}{(c-a)(c-b)}+\frac{f(b)}{(b-a)(b-c)}=\frac{f''(\xi)}{2}$$

5.2 达布定理

达布定理又称为导数的介值定理，其描述如下

Theorem 5.1 达布定理

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导且 $f'(a)\neq f'(b)$。则对介于 $f'(a)$，$f'(b)$ 之间的任何值 r 都存在 $\bar{x}$，使得 $r=f'(\bar{x})$

Note: 有同学会说这不是显然吗？实际上并不是那样想当然，因为原先的介值定理要求是连续，而函数可导并不能保证导函数连续，仍可能存在第二类间断点，这个定理的成立是经过严格的数学证明的。证明过程不在此列出了，有兴趣的同学自行查找相关资料。

达布定理的简单应用：

Example 5.2: 若 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 在区间 I 上不恒为零，则 $f(x)$ 在区间 I 上是单调的。

Proof: 如果 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 在区间 I 上的取值可正可负，那么由导数的达布定理可以知道至少有一点导数为零，与条件矛盾。

原命题得证。 □

Note: 实际上，达布定理就是导数的介值定理，但一般使用时需要声明。

5.3 无穷区间罗尔定理

无穷区间的罗尔定理存在三种形态，左无穷，右无穷，全界。

下面只列出右无穷的定义和证明，其余类似。

Note: 若要使用无穷区间罗尔定理，最好要有说明，不宜直接当成定理，建议选择作为引理或中间证明命题。

定义：

Definition 5.1 右无穷

若 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续，在 $(a,+\infty)$ 上可导且

$$f(a)=\lim_{x\to+\infty} f(x)$$

则存在 $\xi\in(a,+\infty)$ 使得 $f'(\xi)=0$

☞ **Proof:** 在区间 $\left[\arctan a,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上定义函数

$$F(x)=\begin{cases} f(\tan x), & x\in\left[\arctan a,\dfrac{\pi}{2}\right) \\ f(a), & x=\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

由条件可以得到 $F(x)$ 在 $\left[\arctan a,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上连续，在 $\left(\arctan a,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内可导，且

$$F(\arctan a)=F\left(\frac{\pi}{2}\right)=f(a)$$

由 *Rolle* 定理，至少存在一点 $\eta\in\left(\arctan a,\dfrac{\pi}{2}\right)$，使得 $F'(\eta)=f'(\tan\eta)\sec^2\eta=0$。
由 $\sec\eta\neq0$，因此 $f'(\tan\eta)=0$，取 $\xi=\tan\eta$，则 $f'(\xi)=0$。
原命题得证。 □