

**本科生毕业论文（设计）**

**特征函数叠加计算地震波场**

Superposed eigenfunction to calculate the seismic wave field

**学生姓名** 朱俊 **班级** 621601 **学号** 62160137

**学 院** 地球探测科学与技术学院

**专 业** 地球物理学

**指导教师** 孙建国 **职称** 教授

**特征函数叠加计算地震波场**

Superposed eigenfunction to calculate the seismic wave field

**学生姓名：** 朱俊

**班 级：**  621601

**学 号：**  62160137

**学 院：** 地球探测科学与技术学院

**专 业：** 地球物理学

**指导教师：**  孙建国 教授

吉林大学学士学位论文（设计）承诺书

本人郑重承诺：所呈交的学士学位毕业论文（设计），是本人在指导教师的指导下，独立进行实验、设计、调研等工作基础上取得的成果。除文中已经注明引用的内容外，本论文（设计）不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写的作品成果。对本人实验或设计中做出重要贡献的个人或集体，均已在文中以明确的方式注明。本人完全意识到本承诺书的法律结果由本人承担。

 承诺人： 朱俊

 2020 年 5 月 11 日

**目录**

绪论 1

第1章 地震波场特征函数展开理论 2

第1节 地震波场数值模拟的数学物理描述 2

第2节 特征函数展开理论 6

第3节 本章小结 13

第2章 特征函数叠加计算地震波场 13

第1节 全波相移结构的建立 13

第2节 特征函数展开法求解初始层波场 16

第3节 叠加特征函数计算空间频率域波场 22

第4节 本章小结 23

第3章 全波相移算子的傅里叶展开 25

第1节 傅里叶基的的基本性质 25

第2节 相移算子矩阵的傅里叶展开 27

结 论 30

参考文献 31

**摘要**

特征函数展开是一种经典的波动方程解法，本文利用特征函数叠加计算地震波场，具有计算精度高，计算量大的特点。

本文提供一个计算地震波场的全波相移结构，离散化地将地下每一个深度层的空间频率域波场在傅里叶基上展开。首先基于李普曼施温格方程的伏特拉正则化方法定义第一层波场的傅里叶展开，再通过全波相移结构逐层求取下层波场的傅里叶展开，由此可以遍历整个地下计算空间的波场的傅里叶展开，最后以傅里叶系数为权叠加计算各层的地震波场。

本文论述了如何选择全波相移结构使得波场计算简单高效，其中涉及到矩阵指数的计算和速度扰动傅里叶矩阵的计算。

本文第三章使用一个二维各向同性非均匀声波介质模型对特征函数叠加计算地震波场方法进行测试，测试表明，特征函数叠加计算地震波场可以适应任意速度变化的地质模型。

**关键词：**全波相移结构，矩阵指数，特征函数展开

**Abstract**

Eigenfunction expansion is a classic solution of wave equation. In this paper, the superposed eigenfunction is used to calculate the seismic wave field, which is characterized by high calculation accuracy and cost.

This paper provides a full-wave phase-shift structure for calculating the seismic wave field, and expands the spatial frequency domain wave field of each depth layer,discretely, on the Fourier basis. Firstly,based on the Volterra regularization method of Lipman Schwinger equation,the Fourier expansion of the first layer wavefield is defined, and then the Fourier expansion of the deeper wavefield is obtained layer by layer through the full-wave phase-shift structure. The Fourier expansion of the wave field traversing the entire underground computing space, and finally the seismic wave field of each layer is calculated by superimposing the Fourier coefficient as the weight.

This paper discusses how to choose the full-wave phase-shift structure to make the wave field calculation simple and efficient, which involves the calculation of matrix exponential and the Fourier matrix of velocity disturbance.

In the third chapter of this paper, a two-dimensional isotropic non-uniform acoustic wave medium model is used to test the method of superimposing the seismic wave field by the eigenfunction. The test shows that the superposition of the seismic wave field by the characteristic function can be adapted to the geological model of any speed change.

**Keywords:**full-wave phase-shift,matrix exponential,eigenfunction expansion

绪论

随着地震勘探领域全波形反演方法的不断发展，波场正演方法的优劣对反演效果的影响也日渐凸显。地震波数值模拟方法（Numerical Simulation Method）是一种高效且经济的地震波场正演方法。一些经典的地震波数值模拟方法都有各自的优点与缺点，如有限差分（Finite Difference）能很好适应起伏地表和各向异性介质等复杂条件，但面临着数值频散（Numerical Dispersion）的问题。因此，寻找新的地震波场数值模拟方法成为地球物理学界一个研究目标。

地震波场正演模拟分为物理模拟和数值模拟两大类。物理模拟是建立实际的地质模型，采用人工震源（陆上炸药或海上气枪）来模拟，通过实体检波器接受地震波的过程。因此物理模型操作难度大且成本高，一般不考虑；地震波场数值模拟是对特定的地质，地球物理问题进行适当简化，形成简化的数学模型，采取数值计算的方法获取地震响应的过程。相比传统的物理模拟：地震数值模拟适应性更强，模拟成本低，模拟速度快，可操作性强，模拟精度亦可根据生产需要人为调整。有必要强调地震波场数值模拟的意义。首先，正演为地震勘探新技术的提出，可行性分析和应用实验提供高质量的模拟数据；其次，数值模拟可以直接指导实际地震数据的采集、处理与解释，还可以直接根据生产进行模拟，以获得直接应用于生产的重要地震信息；最后，数值模拟有助于科学家更深入地认识地震波的传播规律，帮助与解决目前地震勘探中的新难题。

经典的地震波数值模拟方法根据使用原理分为三类：网格法、积分方程方法和射线追踪方法。下面将依次介绍这三类方法：

网格法，如有限差分，伪谱法（Pseudospectral），有限元（Finite Element）法等，这些方法都需要将空间变量和时间变量离散化。为了直接解波动方程，将地质模型近似成数值网格，换言之，模型被离散成有限个点。这类方法亦称为全波场方程法，因为它隐式给出了全波场的解。需要指出的一点是，网格方法对介质的空间变化没有限制，而且足够精细的网格能得到较为准确的解。同时网格法可以很方便地生成波场快照。劣势是其计算时间花销比解析类方法或射线类方法更大。

积分方程方法（Integral Equation）以惠更斯原理（Huygens Principle）为出发点，基于点源波场的积分描述。惠更斯原理的两种形式——体积点源的波场叠加以及边界面点源的波场叠加，至今仍在使用。我们既解体积分方程也解边界积分方程，二者都有各自的应用。虽然积分方程方法相比于网格方法多了一些限制条件。然而，对于特定的地质构造，如均匀覆盖的有界目标，井眼或者包含大量小尺度缝隙的地质构造，积分方程法都能高效得出准确解。

射线追踪方法（Ray Tracing）讨论波动方程的高频近似情况，其研究对象是地震波走时和射线路径。其理论基础是地震波传播满足的费马原理，惠更斯原理以及程函方程（Eikonal Equation）。

本文讨论的特征函数叠加计算地震波场，是基于经典数学物理方法——分离变量法和本征函数法的一种计算地震波场的方法。本文旨在针对地震声波方程利用特征函数叠加计算方法进行地震波场正演模拟。

本文主要介绍了利用特征函数叠加计算地震波场的原理与方法，整体研究思路及框架如下：

第1章主要介绍了地震波场特征函数展开理论。推导了描述地震波的动力学方程——声波方程，并详细论述了求解地震波场的边界条件，震源加载等问题。

第2章主要介绍了地震波场特征函数展开以及特征函数叠加方法，并给出了相移方法求解亥姆霍兹方程（Helmholtz Equation）的算法流程图。

第1章 地震波场特征函数展开理论

波动方程类的地震波数值模拟的本质是求解波动方程，而特征函数展开是一种求解波动方程的经典数学物理方法。因此有必要回顾描述地震波场的波动方程是如何推导的以及数学物理问题的一般定解条件。

第1节 地震波场数值模拟的数学物理描述

数学物理问题的提出与求解一般分三步：第一步，对系统的运动规律建立泛定方程（Pan-set Equation）；第二步，找到相关物理量满足的定解条件；第三步，结合泛定方程与定解条件，构成一个定解问题，最后求解。

1.1 地震波基本数学物理方程的建立

笔者讨论各向同性声波介质，即地震介质中只有速度随空间变化，密度及其它弹性参数是一个常数。对于均匀各向同性介质，拉梅（Lame）方程

  （1. 1）

其中：和为拉梅常数，由弹性介质的杨氏模量（Young’s Modulus）和泊松比（Posssion’s Ratio）定义。表示介质空间中某一点的位移矢量，它是位置和时间的函数，表示震源激励。

亥姆霍兹分解定理表明，任意一个矢量场均可分解成一个无旋场与一个无散场之和，即

  （1. 2）

其中：为无旋场，为无散场。记为的标量位，为的矢量位，则

  （1. 3）

声压与体变系数满足

  （1. 4）

其中：为体变模量（Bulk Modulus）。

 位移场的体变系数可表示为

  （1. 5）

对式1. 1取散度，结合式1. 5，整理可得

  （1. 6）

将式1. 6整理成波动方程的一般形式，得

  （1. 7）

其中：，为纵波波速，为拉普拉斯算符，。

当外力作用停止后或在没有外力作用的介质部分，介质振动则符合齐次波动方程

  （1. 8）

结合式1. 4中声压的定义，得到齐次声波方程

  （1. 9）

到这里就推导出了地震波满传播满足的声波方程。

1.2 定解条件

式1. 9明显有无穷多个解，为确定波场的唯一解，必须给出合适的补充条件，即初值条件和边界条件。

首先求声波方程的通解，其通解往往有若干个待定系数，必须根据给定的初值条件和边值条件来确定其待定系数，数学物理方程中的一般定解条件包括

1.初值条件

一般形如

  （1. 10）

描述场在零时刻的分布。

2.边值条件

1)边界条件

给定边界条件的方法一般有三种，分别是狄利克雷边界条件、诺伊曼边界条件以及混合边界条件。

Ⅰ 在波场求解区域的边界S上给定待求解的波场值

  （1. 11）

这样的边界条件称为位移边界条件或狄利克雷（Dirichlet）边界条件。

Ⅱ 在波场求解区域的边界S上给定时待求解的波场对边界外法线的导数值

  （1. 12）

这样的边界条件称为应力边界条件或诺伊曼（Neumamn）边界条件。

Ⅲ 在部分边界上给定位移边界条件，在另一部分边界上给定应力边界条件

  （1. 13）

这样的边界条件称为混合边界条件。

2)分界面连续性条件

分界面连续性条件由波函数在弹性介质分界面上的性质决定。常见的有应力连续条件和位移连续条件。

3.辅助条件

在解决某些问题时，往往还需结合问题实际，给出一些附加的辅助条件。例如求解波动方程时经常遇到所谓外部问题，就是波函数求解区域延伸到无限远处。这时，除了给定有限边界条件外，还应给定在无限远处的求解条件。通常认为无限远处的波场值为零，这也称为辐射条件。

前面给出了一般数学物理方程的定解条件，这里引入地震波场数值模拟中常常使用的定解条件。

1.自由边界条件

自由边界上，一般指地表，地震波传播应满足应力为零的边界条件。

2.无穷远边界条件

在无穷远处，波场的各个分量趋于零，对应前述的辐射条件。

3.边界连续条件

地震波在具有不同弹性的两种固体介质的耦合界面上传播时，满足水平位移连续，垂直位移连续，切应变连续，正应力连续的边界条件。

4.人工边界条件（Artificial Boundary Condition）

用网格法进行地震波场数值模拟时，计算地下某位置任意时刻的波场值理论上应考虑地下全部空间。但由于计算机计算的有穷性，不可能模拟全部的地震介质空间，因此在保证波场近似精度的前提下，必须对计算空间加以限制，因此引入人工计算边界。人工计算边界的引入使得地震波在传播过程中会遇到人为制造的波阻抗界面，形成虚反射，而非真实的物理反射。若不去除虚反射，则会在波场快照中发现：当地震波到达人工计算边界后产生的虚反射会干扰真实的地震响应。为了使地震波到达人工计算边界后仍有一个真实的响应，必须引入某种能有效去除虚反射的机制。一种思想是在边界处设置阻尼介质，使波大量吸收衰减而少量反射甚至不反射，这就是人工边界条件，又称为吸收边界条件（Absorbing Boundary Condition）。

1.3 震源加载

式1. 9是齐次波动方程，物理上表示震源作用停止后或在没有震源作用的介质部分。但是实际的地震波场有震源，因此要引入非齐次项——震源项。震源项包含两个重要特征：震源时间特性和震源空间特性。

震源时间特性又称为震源子波函数，震源子波函数应尽可能还原实际地震勘探中使用的震源处幅值随时间的变化。一般使用雷克子波（Ricker Wavelet），最大振幅为1的标准雷克子波函数为

  （1. 14）

其中：是中心频率，是达到峰值的时间。

震源空间特性是模拟实际地震勘探中震源分布。由于在一个给定模型空间大小的区域中，与模型空间大小相比，震源体积大小完全可以忽略，这时将这种震源称为空间点震源，可以用函数表示，即

  （1. 15）

其中：是点震源的坐标。是狄拉克函数。

  （1. 16）

第2节 特征函数展开理论

2.1 从特征向量到特征函数

在讨论特征函数展开理论之前，先讨论线性代数中的特征值（Eigenvalue）和特征向量（Eigenvector）理论。对于一个矩阵，其特征值满足：

  （1. 17）

其中：为对应于特征值的n维特征向量。一般来说矩阵有个特征值，其特征值可能互不相同，也可能部分相同，可能是实数也可能是复数。这里设为矩阵的某一个特征值，为相应的特征向量，即，现定义由特征向量组成的矩阵及其对应的特征值组成的三角阵如下：

  （1. 18）

  （1. 19）

则

  （1. 20）

式1. 20等号两边同时右乘的逆，得

  （1. 21）

于是对于非齐次线性方程

  （1. 22）

的解有如下表示

  （1. 23）

式1. 23不直接求的逆，而是先用的特征值组成的三角阵与特征向量组成的矩阵来表示，即式1. 21，进而表示的逆，最后左乘求解。这种方法的数学内核是：

（1）特征向量集合是一个线性无关的正交完备向量集合，即任意一个n维向量可以由其线性组合唯一表示。而任意特征向量右乘矩阵后得到的新向量都是原特征向量的常数倍，这一常数即对应的特征值。

（2）反过来，若从一开始就将列向量用的特征向量的线性组合唯一表示，即

  （1. 24）

则由式1. 17，可将式1. 24改写为

  （1. 25）

由此可以看出方程1. 22的解仍是特征向量的线性组合，且与特征向量展开各项对应系数之商恰好是对应的特征值，即。

 现在可以总结利用特征值理论求解线性方程的一般步骤：（1）求线性算子的全部特征值及其特征向量（或特征函数）；（2）特征展开——将待求解和方程中的所有已知量都表示成特征向量（或特征函数）的线性组合；（4）求展开系数——合并同一特征向量（或特征函数）的系数，并使合并后的系数为零，得到待求解特征向量（或特征函数）的展开系数；（5）叠加计算——以展开系数为权叠加对应的特征向量（或特征函数）计算待求解。

2.2 分离变量法求本征函数集

特征函数，数学物理方法中又称为本征函数或固有函数。这里回顾求解本征函数集的方法——分离变量法。

考虑弦振动（一维波动方程）问题：

  （1. 26）

  （1. 27）

  （1. 28）

分离变量法目的是把关于的偏微分方程转化为两个耦合的关于空间和时间的方程，即

  （1. 29）

按照分离变量的思想，设方程1. 26-1. 28有变量分离的形式解，即

  （1. 30）

将式1. 30代入式1. 26，得

  （1. 31）

对式1. 31等号两边同时关于求导，因为等号右边不含，故

  （1. 32）

因此

  （1. 33）

设这一常数为，它被称为分离常数。由此式1. 31化为两个耦合常微分方程

  （1. 34）

  （1. 35）

进一步考察式1. 30，必须满足边界条件，即式1. 28

  （1. 36）

  （1. 37）

由于（否则将导致），故由式1. 36-1. 37得

  （1. 38）

由此空间函数构成下列常微分方程的边值问题

  （1. 39）

解这个边值问题就可以得到。

 注意到式1. 39是一个本征值问题。下面求解这个本征值问题，这意味着既要求出本征函数，也要求出本征值。并不是任意的都能给出非零解，分三种情况讨论。

（1），这时方程的解为，其中A和B为任意常数。满足式1. 38的唯一结果是，它导致平庸解，因此不考虑。

（2），这时方程的通解为

  （1. 40）

其中：。这时要求，于是。而要求。但由于一般情况下，所以。满足式1. 38的唯一结果是，它导致平庸解，因此不考虑。

（3），这时方程的通解为

  （1. 41）

其中：，。这时要求，于是，而要求。但是（否则），所以，故

  （1. 42）

不取零与负值是由于。综上所述，式1. 39的本征值为

  （1. 43）

对应的本征函数为

  （1. 44）

因此式1. 43-1. 44就是本征值问题1. 39的结果。它们是一系列离散的本征值和相应的本征函数。求出本征值后，式1. 35变为

  （1. 45）

其通解是

  （1. 46）

其中：和是任意常数。由式1. 44和式1. 46得到泛定方程1. 26解的本征函数

  （1. 47）

其中：和是任意常数。由于式1. 47中的空间函数是本征方程1. 39的解，故称式1. 47为泛定方程的本征解。

至此没有涉及初始条件1. 27，但显然式1. 47不能表征任意的初始位移，因为当n固定时

  （1. 48）

是一个特定的正弦函数。注意到泛定方程是一个线性齐次方程，因此可以按照叠加原理将本征解叠加起来，构成

  （1. 49）

若该无穷级数收敛并且对和二次可微，且满足边界条件。则将式1. 49称为定解问题1. 26-1. 28的一般解（General Solution）。

 现在确定式1. 49中的展开系数和，首先由初始条件计算出任意时刻的速度

  （1. 50）

利用初始条件，得

  （1. 51）

  （1. 52）

可以看出，和正是和的半幅傅里叶级数的展开系数，它们的定义式为

  （1. 53）

  （1. 54）

到这里就完成了利用分离变量法求解泛定方程的全部过程。可以发现分离变量法的使用条件有三点：（1）泛定方程必须是线性的；（2）泛定方程必须是齐次的；（3）边界条件必须是齐次的。

2.3 本征函数法解一维非齐次波动方程

 现在考虑一维非齐次波动方程的定解问题：

  （1. 55）

分离变量法只适用线性齐次方程，因此这里不能使用。但是联系特征向量解线性方程组的观点，若能获得线性算子在齐次边界条件下正交完备的本征函数集，然后将待求解与已知函数分别在本征函数集上展开，便可求得二者展开系数满足的关系，进而用本征函数的线性组合表示待求解。这就是本征函数法的思想。

由此可以归纳本征函数法的解法步骤：根据泛定方程与对应的边界条件求取本征函数集，写出定解问题的级数形式解；将其代入泛定方程得到展开系数所满足的常微分方程；求出展开系数后，将其代入级数形式解，并利用初始条件确定其中的系数。

该方法思路简洁、运算简便。更重要的一个优点是它可以用来求解非齐次方程的定解问题。下面给出式1. 55的计算具体过程：

 第一步：由齐次方程和对应的齐次边界条件可以确定本征函数集，其中是时间依赖的展开系数。再写出的形式解

  （1. 56）

可以看出是函数半幅傅里叶级数的展开系数，满足

  （1. 57）

将式1. 56代入式1. 55，得

  （1. 58）

其中：已知，可按本征函数展开

  （1. 59）

是函数的半幅傅里叶级数，满足

  （1. 60）

将式1. 60代入式1. 58，整理得

  （1. 61）

由于是定义在区间上的正交完备基函数，所以其合并后的任意一项系数都是零，即

  （1. 62）

由初始条件，得

  （1. 63）

结合式1. 63式1. 62，并应用拉普拉斯变换（Laplacian Transform）求解，得

  （1. 64）

将式1. 64代入式1. 56，最终得到

  （1. 65）

第3节 本章小结

本章主要介绍了特征函数叠加计算地震波场方法的必要准备知识。包括两个方面：

首先介绍地震波场数值模拟的数学物理描述：从声波方程的推导出发，进而研究地震波场模拟的定解条件以及震源加载的问题。

然后介绍特征值问题：从线性代数矩阵特征值理论出发，进而研究数学物理方程中本征函数集的求解方法——分离变量法，最后以一维非齐次声波方程为例，详细介绍了本征函数法求解的各个步骤。

第2章 特征函数叠加计算地震波场

第1节 全波相移结构的建立

 将声波方程关于时间做傅里叶变换，得到空间频率域的亥姆霍兹方程，即

  （2. 1）

假设介质速度在分向上无变化，即，整理式2. 1，得二维亥姆霍兹方程：

  （2. 2）

其中：和分别表示笛卡尔坐标系的水平分量和垂直分量，表示空间频率域的压力场，是角频率，是速度场。可将这个二阶偏微分方程转化成关于深度的耦合一阶微分方程组

  （2. 3）

定义一个局部参考层速度常数，将算子先后加减。并表示成算子与算子之和，这一步称为算子分裂。定义为波场关于方向的偏导，即，式2. 3改写为

  （2. 4）

写成矩阵形式

  （2. 5）

其中

  （2. 6）

很明显算子无数种“分裂”选择。能否获取一个高效准确的计算方案则是最终算子分裂的标准。式2. 5是一阶线性偏微分方程，将其等号两边同时左乘算子，整理得

  （2. 7）

注意到因为中微分算子是的二阶导，换言之没有任何对的操作，因此算子和满足交换律：。据此再次整理式2. 7得

  （2. 8）

这是一个关于变量的一元微分方程，对等号两边同时在区间上进行积分，整理可得

  （2. 9）

其中：是深度的相移步长。等号右边的积分中也出现了，因此式2. 9是全波方程的解析解。推导到这里还没有做任何的近似，同时也没有做关于速度随空间变化的任何假设。并且参考层速度常数的选择也是任意的。为了计算，轴积分可以通过梯形近似（也可以使用更高阶的积分近似方法，这里不再赘述）得到，进而得到的显式表达式

  （2. 10）

其中：是一个的单位矩阵，该式必须求算子的逆才能计算。因此正是这个解析逆的计算使得的结构很重要。线性算子的级数表示为

  （2. 11）

由式2. 6，是下三角矩阵，也是幂零矩阵，即

  （2. 12）

所以算子的解析逆的计算可简化为

  （2. 13）

将其代入式2. 10，得到最终的递推表达式

  （2. 14）

此即全波相移结构，观察其结构可以很容易地看出其应用意义：试分析，当某一深度上各点处压力及其偏导已知时，则深度上各点处压力及其偏导可以通过该相移结构计算出来。换言之，只需得到地下某一深度的空间频率域波场及其偏导的初始解，就可以利用该相移结构遍历整个地下空间的空间频率域波场。

还有一点需要注意，式2. 6中如何分裂算子在理论上没有限制，但是为了获取一个高效的计算方案，必须巧妙地选择和以保证矩阵指数的计算花销不大并且有足够高的精度。此外，通过式2. 6中出现的和就能看出相移结构的计算必须考虑速度随深度的变化。将速度层常数以及速度的侧向变化以的形式嵌入扰动项，极大提高了矩阵指数的计算效率。

得到相移结构后，接下来的问题是如何计算某一初始层空间频率域波场及其偏导，即的计算。

第2节 特征函数展开法求解初始层波场

空间频率域二维Helmholtz方程为

  （2. 15）

其中：随空间变化的波速可由一个常数速度与空间内微小扰动表示

  （2. 16）

将其代入亥姆霍兹方程，整理可得

  （2. 17）

其中：为波数，。

 如此转化的意义是对于一个非齐次常系数线性微分方程（相当于均匀介质），很容易通过求取其格林函数（刻画空间中点源对场的影响），并用格林函数与非齐次项相乘并积分即可得到非齐次方程的解。其格林函数记为，则

  （2. 18）

这里不加证明地给出因果自由空间格林函数的表达式

  （2. 19）

其中：是速度剖面的延拓周期长度，是方向上的波数。由色散关系定义，即

  （2. 20）

由格林函数理论，波场可以用Fredholm-Ⅱ型积分方程的形式表示为

  （2. 21）

其中：是齐次声波方程的解，满足

  （2. 22）

解的级数表示为

  （2. 23）

  （2. 24）

其中是任意常数，此解将测线剖分成个区间。是测点序号，。测距满足。实际上式2. 22更一般形式的通解是

  （2. 25）

式2. 24是将待测剖面在空间上做横向延拓的解析解，满足周期性边界条件

  （2. 26）

所以这个解不是全空间的波场解，而只是待测剖面的波场解，因此它具有实际勘探意义。假设非均匀声速介质的波场亦有相似的级数解

  （2. 27）

注意到这里人为定义二者展开系数相等，都是，那么这两个级数满足的关系应该形式不变，即

  （2. 28）

原则上深度轴的积分区间是，由于实际勘探不可能计算整个地下空间的波场，所以在保证计算精度的前提下，假设速度扰动位在区间上紧支持（Compact Support），即该区间以外的速度扰动均为零。

由齐次波动方程的解级数可知，为区间上的一个正交完备本征函数集，即对于任意有

  （2. 29）

其中：是的共轭。易证时

  （2. 30）

由于其值恰为1，这就证明了为区间的归一化的正交完备函数集合，称之为傅里叶基（Fourier Basis），也就是本文要使用的特征函数。这里记，为克罗内克（Kronecker）符号

  （2. 31）

将波场分量在傅里叶基上展开，得

  （2. 32）

则展开系数可由下式计算

  （2. 33）

将式2. 32代入式2. 28，得

  （2. 34）

按式2. 33的方法求展开系数，得

  （2. 35）

注意到此式中花括号内的部分是一个只与变量和序列有关的量。现定义一个的层速度平均扰动矩阵，其矩阵元素为

  （2. 36）

将代入式2. 35得

  （2. 37）

此式本质上是一个以为自变量的Fredholm-Ⅱ型积分方程组，其计算相当复杂。但计算目标不是求解整个深度区间上的波场，而只是某一初始层的波场。若能将此Fredholm-Ⅱ型积分方程转化为Volterra-Ⅱ型积分方程，则计算可以很容易的将积分核忽略，如下

  （2. 38）

 由于积分方程组式2. 37的核函数表达式中有绝对值项，试将积分区间分解成两部分：和，以消去绝对值，即

  （2. 39）

 为避免符号混乱，在此将此式用矩阵描述。定义三个矩阵

  （2. 40）

  （2. 41）

  （2. 42）

以矩阵形式重写式2. 39，得

  （2. 43）

时，由于速度扰动为零，因此式2. 43等号右边第一个积分为零，方程退化为

  （2. 44）

其中：是人为定义的一个反射幅度矩阵，是频率的单值函数，其定义为

  （2. 45）

将式2. 43等号右边先加上，再减去下式：

  （2. 46）

整理可将原Fredholm-Ⅱ型积分方程转化为Voltera-Ⅱ型积分方程，即

  （2. 47）

其中：函数矩阵定义为

  （2. 48）

假设全波场解有和远场近似解——式2. 44相同的形式，即

  （2. 49）

将之代入式2. 47，可以将和解耦，它们分别满足

  （2. 50）

  （2. 51）

容易看出和互为共轭。且初始层的波场解为

  （2. 52）

有必要指出新定义的波场仍然满足本章第1节推导的相移结构，即

  （2. 53）

其中：表示傅里叶展开，表示波场按式2. 49分解得到的两个分量。

 现在和已知，可利用相移结构求取整个空间波场的离散解，以及相应的。然而要得到波场解，必须求出反射矩阵。联立式2. 45和式2. 49，整理可得反射矩阵的表达式

  （2. 54）

其中：为的单位矩阵。

 到这里可以总结出特征函数展开计算地震波场的步骤：（1）确定待测剖面深度区间，由式2. 52定义；（2）确定合适的相移步长来离散深度区间，，并利用和相移结构遍历；（3）抽取出中的，相应，由式2. 54计算反射矩阵；（4）由式2. 49计算地震波场展开系数。

第3节 叠加特征函数计算空间频率域波场

得到全波场的特征函数展开系数后，叠加对应的特征函数便可求得空间频率域波场。由定义式2. 32可以直接求解波分量的表达式，接下来的工作是根据边界条件确定波分量的叠加系数，即的大小。

引入震源项作为声波方程的非齐次项

  （2. 55）

其中：是震源时间特性，是点震源坐标。对其作关于时间的傅里叶变换得到空间频率域方程

  （2. 56）

根据格林函数理论，满足

  （2. 57）

  （2. 58）

其中：是因果自由空间格林函数（Causal Free Space Green’s Function）。对比分析与的表达式（式2. 19和式2. 24），可以发现前者本质上是后者的线性叠加，且叠加系数由方向波数和点震源坐标共同决定，即

  （2. 59）

  （2. 60）

 线性算符的迭加原理Ⅲ表明，若是非齐次线性方程的解，则是非齐次线性方程的解。由于式2. 58中非齐次项是式2. 28中非齐次项的线性叠加，因此它们的解也满足迭加原理，即

  （2. 61）

 这里总结特征函数叠加的步骤：（1）将本征函数集按式2. 32叠加展开系数，求解波分量表达式；（2）将波分量叠加得到最终解。

第4节 本章小结

本章针对声波方程，论述了一种计算地震波场的特征函数叠加计算方法。第1节引入了一种高效率的相移结构，该方法的必要准备是某一初始层的波场已知；第2节分析了初始层波场的特征函数展开解法；第3节针对基于特征函数展开的地震波场求解方法，推导了相移结构的特征函数展开，具体包括矩阵指数的计算和速度扰动的傅里叶展开；第4节讨论了如何叠加特征函数来求解非齐次声波方程，即加载震源的地震波场。

这里给出特征函数叠加计算地震波场的算法流程图：

开始

计算该频率下相移结构

震源子波函数傅里叶变换

模型参数化

初始频率

遍历整个波场

生成该频率下的初始层波场解

求反射矩阵，以及原始波场

叠加特征函数，计算该频率下的波场

傅里叶逆变换，生成波场快照

结束

稳定性条件



N

N



修改参数

第3章 全波相移算子的傅里叶展开

第1节 傅里叶基的的基本性质

1.1 傅里叶基的基本性质

任意一个满足狄利克雷定理分段连续的周期函数，都可以展开成傅里叶级数，即，其中是的周期。对于不具周期性条件的函数，这一定理看似不再适用，但如果该函数的定义域是有界的，可利用周期延拓将其转化为成周期函数，使其满足狄利克雷定理，然后进行傅里叶展开。实际上这也是我们在求解齐次波动方程解时引入周期边界条件的思想。由于归一化的傅里叶基的正交完备性，可以确定的展开系数

  （3. 1）

2.1 线性算子的傅里叶展开

在已知浅层波场及其纵向偏导的展开系数的前提下，求解深层波场有两种可能的思路：（1）先利用展开系数叠加特征函数得到浅层波场解析解，然后直接使用相移结构递推深层波场；（2）对深层波场做同样的傅里叶展开，并设法求得深层波场展开系数与浅层波场展开系数满足的某种相移关系，根据展开系数满足的相移关系遍历整个地下空间的波场展开系数，最后叠加特征函数得到解析解。

相移结构的解析性质会使上述第1种思路异常困难，因此采用第2种思路。这样的情况下就需要计算深层和浅层波场展开系数满足的相移结构。

对于线性变换，其中：是线性算子。若先使用傅里叶级数表示，则的展开系数为

  （3. 2）

整理可得

  （3. 3）

此式得到了展开系数与满足的关系式，很明显等号右边的积分式由算子和基函数直接决定，这就是算子的傅里叶展开，记为。下面给出三种常见线性算子的傅里叶展开

1. 时，

  （3. 4）

1. 时，先定义的展开系数，即，然后使用傅里叶级数表示，得

  （3. 5）

（3）时，

  （3. 6）

第2节 相移算子矩阵的傅里叶展开

2.1 矩阵指数的计算

回顾式2. 6算子矩阵，其傅里叶展开为

  （3. 7）

根据线性算子的傅里叶展开理论，全波相移结构提供了一种自由选择参考速度的解法，因此简化了矩阵指数计算。

  （3. 8）

其中：是参考层速度常数。由于是对角阵，其特征值为

  （3. 9）

  （3. 10）

 的对角阵结构使得的特征值和特征向量可以解析地计算出来，是，共个。相应的特征向量为

  （3. 11）

由式1. 21，可以使用特征值三角阵和特征向量表示，将的特征向量按列组合成一个的矩阵

  （3. 12）

其中：是一个的单位矩阵。由Moler和Van Loan关于矩阵指数的结论，得

  （3. 13）

其中

  （3. 14）

2.2 速度扰动的傅里叶展开

 由式3. 5的结论，先将傅里叶傅里叶展开，注意到此时的展开系数不是一个常数，而是一个依赖于的函数

  （3. 15）

展开系数的定义式为

  （3. 16）

再进行傅里叶展开，得

  （3. 17）

最后求速度扰动的傅里叶展开。

  （3. 18）

1. 本章小结

结 论

特征函数展开作为一种经典的数学物理方法，求解地震波动方程理论上完全可行。对地震速度剖面做侧向周期延拓，则周期性边界条件下波动方程的特征函数为傅里叶函数。本文主要有两点结论：

 （1）通过定义一个随频率和深度变化的全波相移结构，可以在已知任意浅层波场及其纵向偏导的情况下递推求解深层波场及其纵向偏导。

（2）通过伏特拉正则化方法，可将非均匀介质波场满足的李普曼施温格积分方程转化为第Ⅱ类伏特拉型积分方程。由于伏特拉型方程积分区间的特殊性，可以很容易求解初始层波场。

参考文献

1. Lesage A,Yao J,Wijesinghe N,Hussain F,Kouri D.Multi-dimensional inverse acoustic scattering series using the Volterra renormalization of the Lippmann-Schwinger equation.SEG Annual Meeting,2014,3188-3122
2. Lesage A,Yao J.Inverse acoustic scattering seriesusing the Volterra renormalization of the Lippmann-Schwinger equation
3. Maji K,Gao F,Abeykoon S K,Kouri D.New full-wave phase-shift approach to solve the Helmoholtz acoustic wave equation for modeling.Geophysics,2012,77(1):T11-T21
4. Topical review:Inverse scattering series and seismic exploration.
5. Inverse scattering theory:Inverse scattering series method for one dimensional non-compact support potential.
6. Nelka Chithrani Wijesinghe.Seismic modeling and imaging of realistic earth models using new full-wave phase-shift approach.
7. Carcione M.Seismic modeling
8. Gazdag.Modeling of the acoustic wave equation with transform methods
9. Z.S.Alterman.Finite difference solution to geophysical problems.
10. R.G. Keys.Absorbing boundary condition dor acoustic media
11. Gazdag.Wave equation with the phase-shift method
12. Cleve Moler,Charles Van Loan.Nineteen Dubious Ways to Compute the Exponential of a matrix.
13. Arthur Weglein.An inverse scattering series for attenuating multipes in seismic reflection data.
14. Kosloff,Baysal.Forward modeling by a Fourier method
15. Accuracy of finite-difference modeling of the acoustic wave equation.
16. Sheldon Axler.Linear Algebra Done Right.
17. 朱多林、白超英.基于波动方程理论的地震波场数值模拟方法综述
18. 张睿璇、廉西猛.波动方程法地震波正演数值模拟研究综述
19. 章婷.复杂介质地震波波场正演模拟方法研究
20. 谢宝林、刘东晓、瞿雅文.基于地震波正演模拟的边界算法研究
21. 皮红梅、蒋先艺、刘财.波动方程数值模拟的三种方法对比
22. 孙建国.声波散射数值模拟的两种新方案
23. 徐建.二维第二类Fredholm积分方程数值解的算法研究
24. 杨林.非均匀介质弹性波场正演模拟与逆时偏移
25. 王聪.全波形反演中波动方程正演
26. 刘宁.声波散射拟解析近似理论实现技术研究
27. 段艳婷.二维声波散射正问题的数值解法及应用
28. 徐建丽.声波散射及Fredholm积分方程的研究
29. 罗玉钦.近似完全匹配层在地震波正演模拟中的研究及应用
30. 侯凯.非均匀介质地震波正演模拟方法研究
31. 李健.起伏地表条件下的地震波场数值模拟——有限余弦变换
32. 陆金甫、关治.偏微分方程数值解法
33. F.W.拜伦、R.W.富勒.物理学中的数学方法第二卷
34. 孙成禹、李振春.地震波动力学基础
35. 顾樵.数学物理方法.
36. 路建可、钟寿国.积分方程论.
37. 程建春.数学物理方程及其近似方法.
38. 肖淑贤.常微分方程
39. 邴琦、孙章庆.地震波射线追踪方法综述——方法、分类、发展现状与趋势

致谢:

本科四年倏忽即逝，在吉林大学地球探测科学与技术学院我不仅学到了很多固体地球物理学的相关知识，同时也认识了很多朋友。他们都给予了我大量帮助，在此我要向他们表示感谢。

首先要感谢的是我的毕业论文指导老师，孙建国老师。由于2020年初正值新冠疫情肆虐不能返校，起初我很担心论文的撰写进度，孙老师在我对论文的理解出现困难时的悉心指导对我帮助很大。我曾有幸聆听孙老师的课程——《计算地球物理学》，老师在课堂上旁征博引，其深厚的学术功底让我不得不为之叹服。

同时感谢陪伴我度过本科四年的朋友，室友和同学们。是他们在我遇到困难时慷慨相助，也是他们陪我一起学习和成长。还要感谢我的父母，是他们多年来不计回报的物质支持和精神鼓励让我能够顺利完成大学学业。

还要感谢的是栽培我四年的吉林大学和地球探测科学与技术学院，地探学院给了我一个提升自我的学习平台。地探学院走出来的地质学家，地球物理学家也将鼓舞我不断前进。相信在我毕业以后，仍会时常怀念在吉林大学，在地探学院的时光，预祝学院和学校发展越来越好。

最后，感谢在我毕业阶段对我的毕业论文进行审阅的各位答辩评审老师，感谢他们对我学习工作成果的点评和指正。