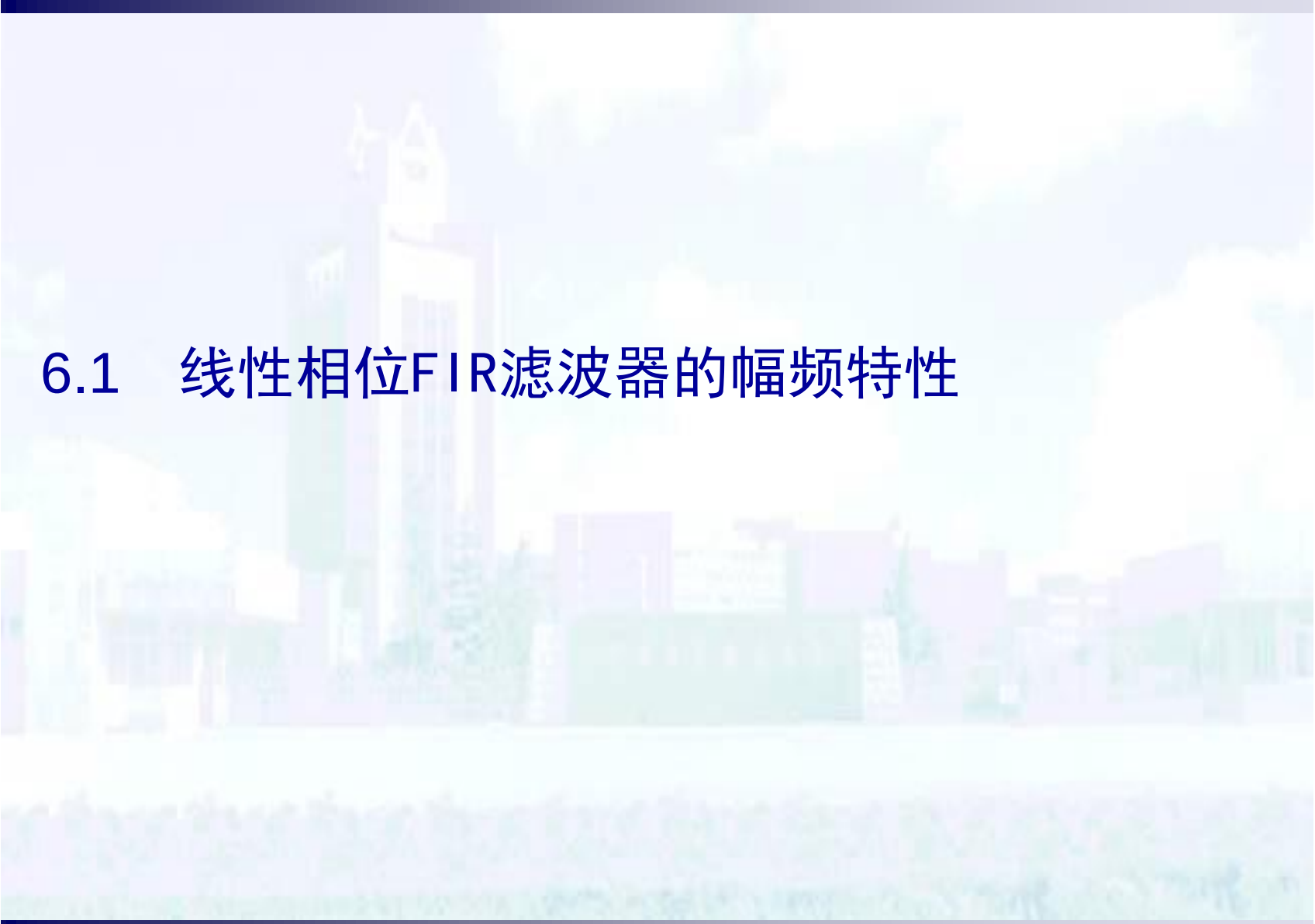




6 FIR数字滤波器设计



6.1 线性相位FIR滤波器的幅频特性

6.1 线性相位FIR滤波器的幅频特性

线性相位FIR滤波器的频率响应

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n} = H(\omega)e^{j\theta(\omega)}$$

$$\text{幅频特性: } H(\omega) = \pm |H(e^{j\omega})|$$

$$\theta(\omega) = -\frac{N-1}{2}\omega, \quad h(n) = h(N-1-n)$$

$$\text{或} \quad \theta(\omega) = -\frac{N-1}{2}\omega \pm \frac{\pi}{2}, \quad h(n) = -h(N-1-n)$$

$$\text{群延迟均为常数} \quad \tau = -\frac{d\theta(\omega)}{d\omega} = \frac{N-1}{2}$$

6.1 线性相位FIR滤波器的幅频特性

滤波器幅频特性

4种情况：

$$h(n) \text{ 镜像对称} \begin{cases} N & \text{奇数} \\ N & \text{偶数} \end{cases}$$

$$h(n) \text{ 镜像反对称} \begin{cases} N & \text{奇数} \\ N & \text{偶数} \end{cases}$$

6.1 线性相位FIR滤波器的幅频特性

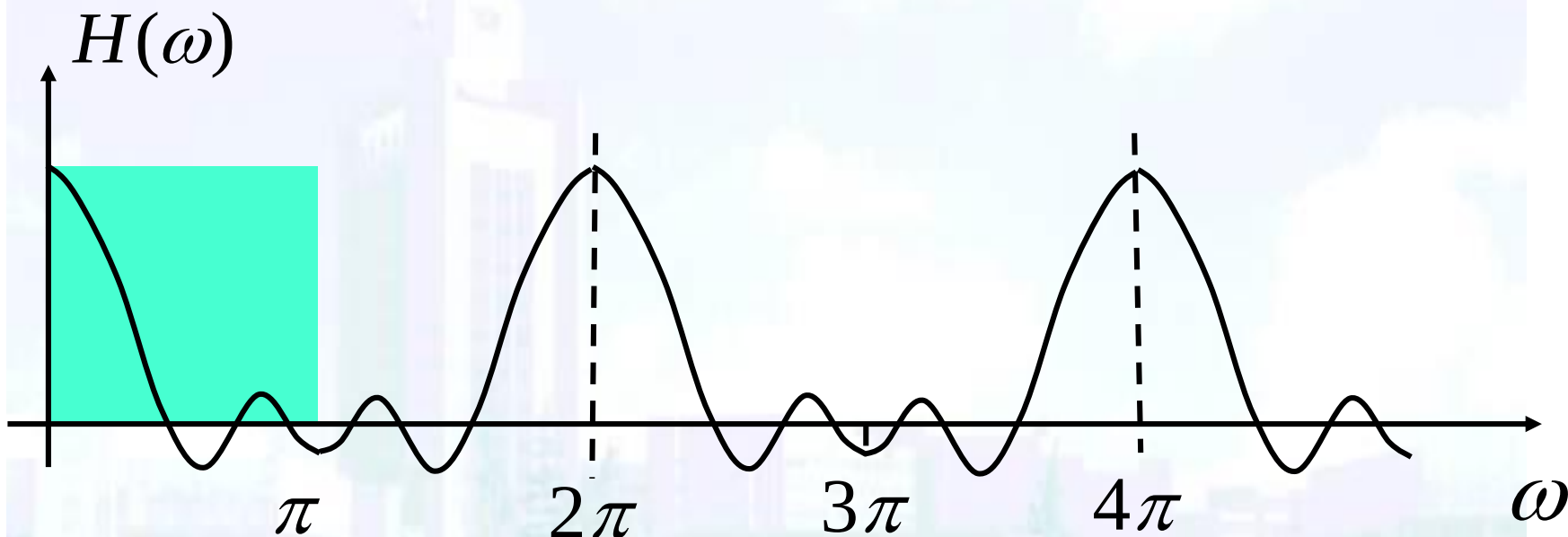
(1) $h(n)$ 偶对称, N 奇数

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} a(n) \cos \omega n$$

$$a(0) = h\left(\frac{N-1}{2}\right)$$

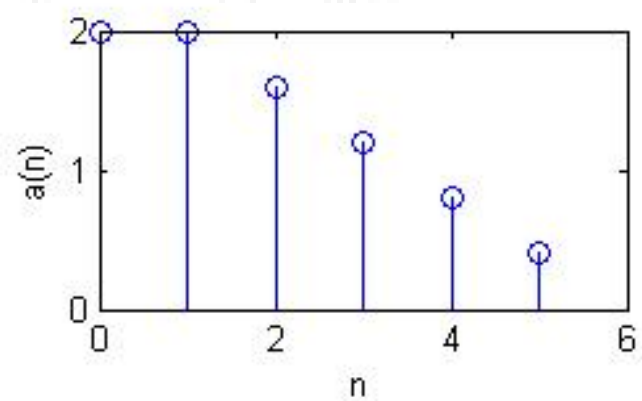
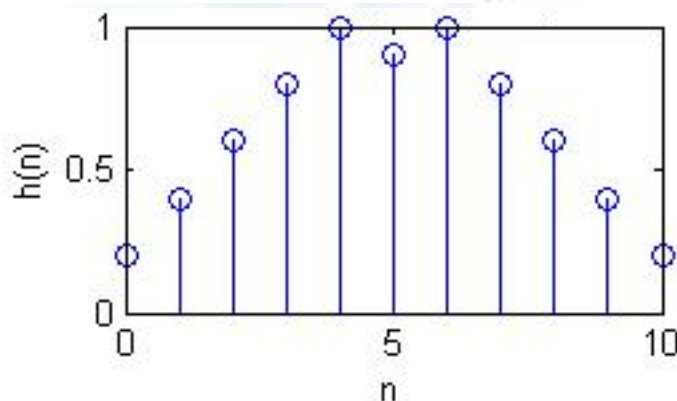
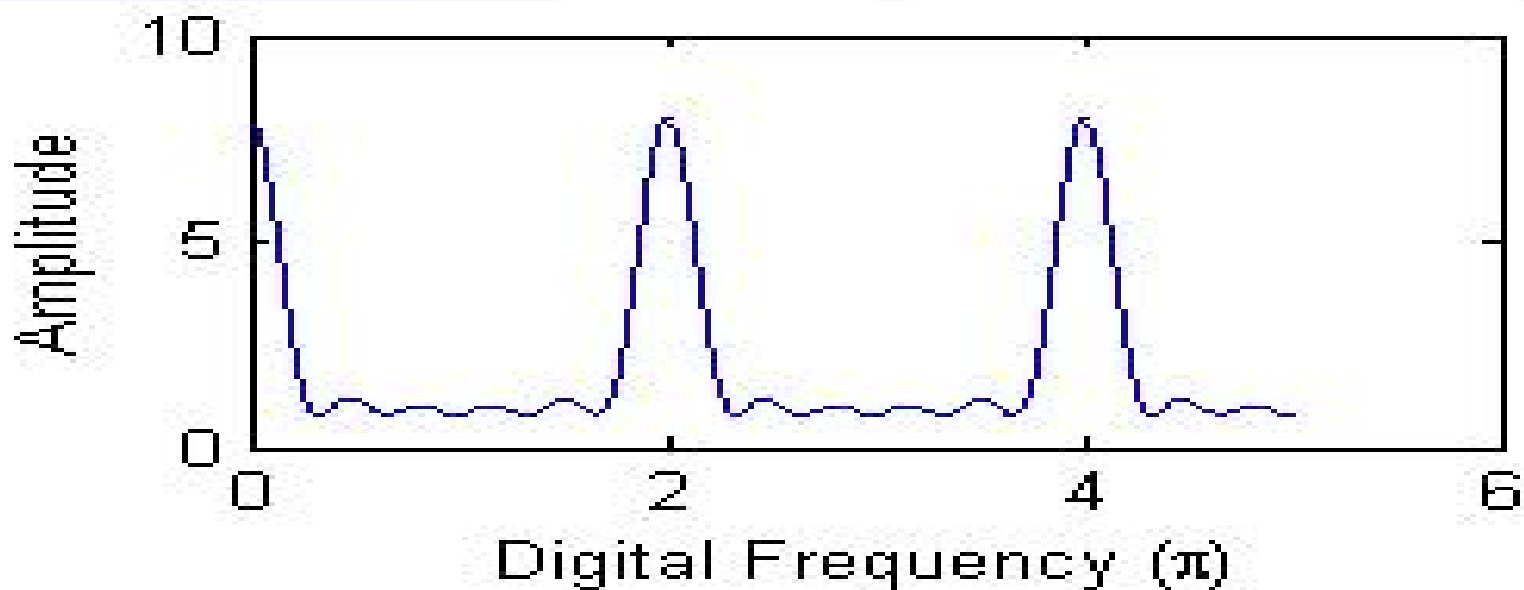
$$a(n) = 2h\left(\frac{N-1}{2} - n\right), \quad n = 1, 2, \dots, \frac{N-1}{2}$$

6.1 线性相位FIR滤波器的幅频特性



关于 $k\pi$ 偶对称，可用来逼近的滤波器类型没有限制

6.1 线性相位FIR滤波器的幅频特性



$h(n)$ 偶对称, $N=11$

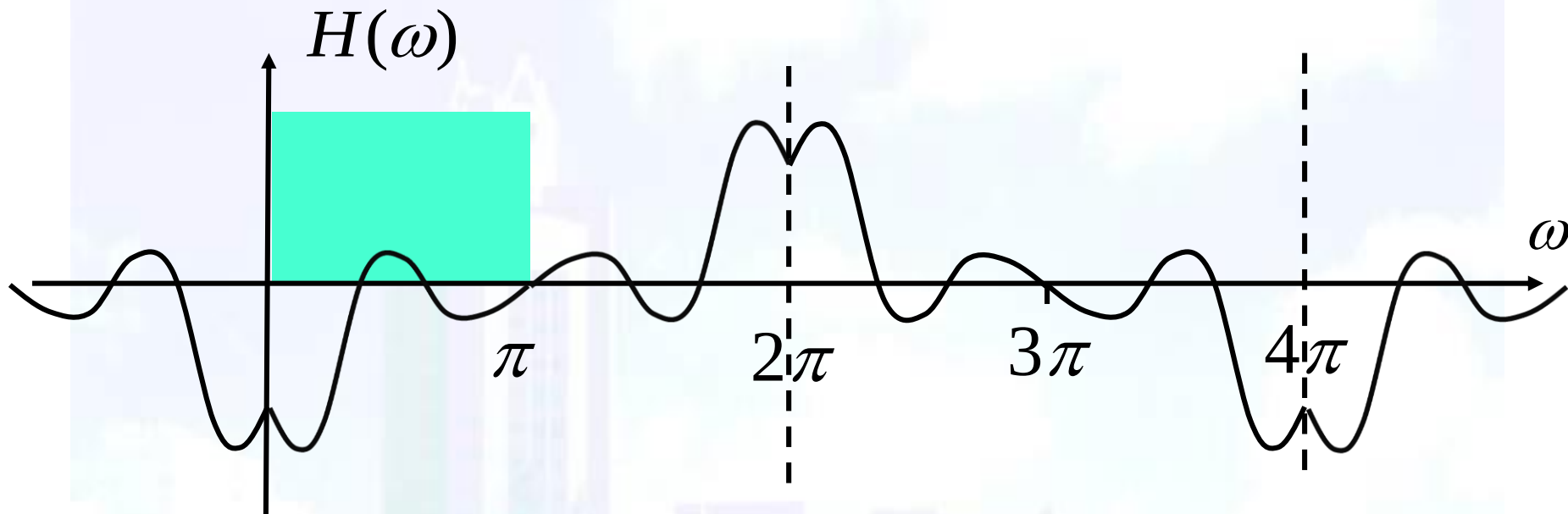
6.1 线性相位FIR滤波器的幅频特性

(2) $h(n)$ 偶对称, N 偶数

$$H(\omega) = \sum_{n=1}^{\frac{N}{2}} b(n) \cos \omega(n - \frac{1}{2})$$

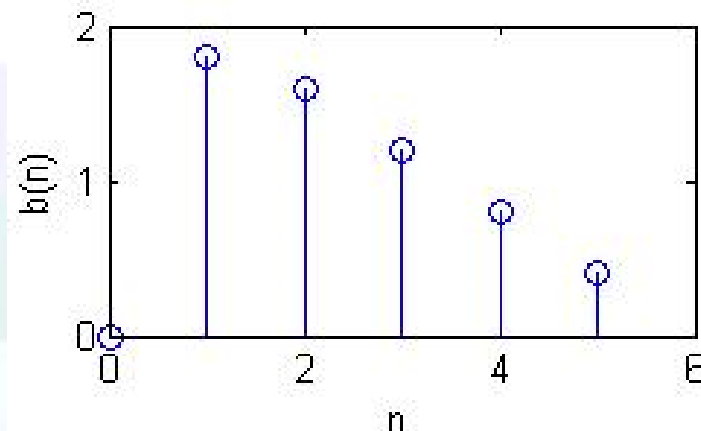
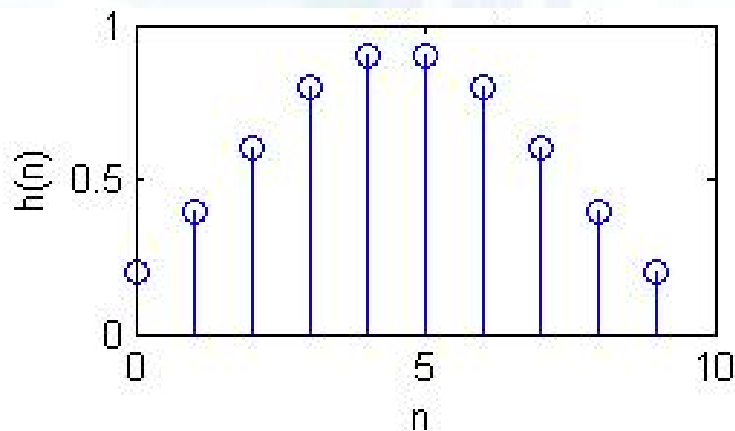
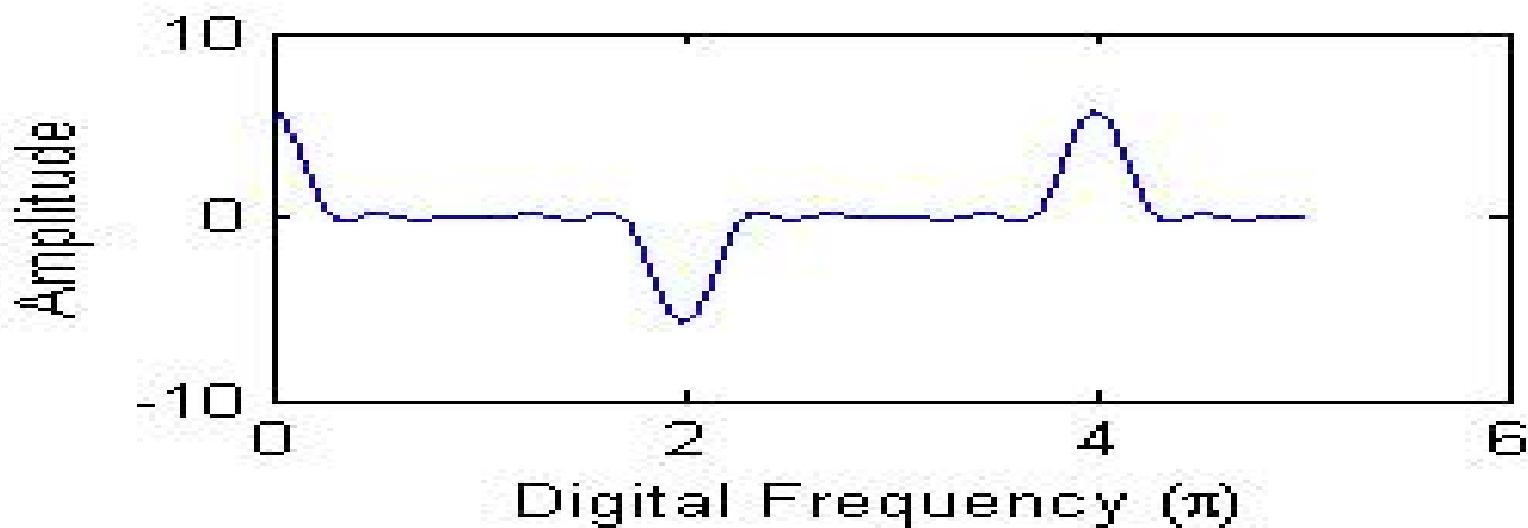
$$b(n) = 2h(\frac{N}{2} - n) \quad n = 1, 2, \dots, \frac{N}{2}$$

6.1 线性相位FIR滤波器的幅频特性



关于 $2k\pi$ 偶对称，关于 $(2k+1)\pi$ 奇对称
必有 $H[(2k+1)\pi]=0$ ，不可用来逼近高通和
带阻滤波器

6.1 线性相位FIR滤波器的幅频特性



$h(n)$ 偶对称, $N=10$

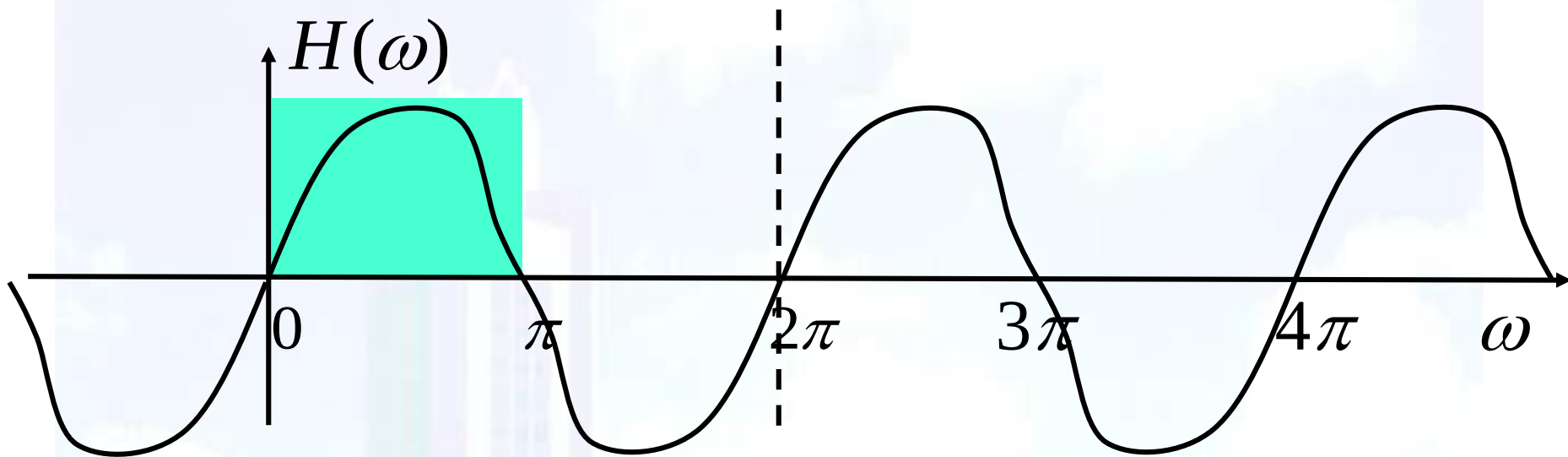
6.1 线性相位FIR滤波器的幅频特性

(3) $h(n)$ 奇对称, N 奇数

$$H(\omega) = \sum_{n=1}^{\frac{N-1}{2}} c(n) \sin \omega n$$

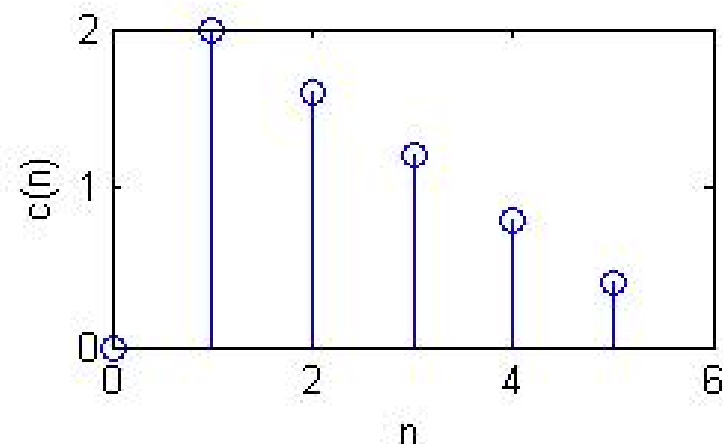
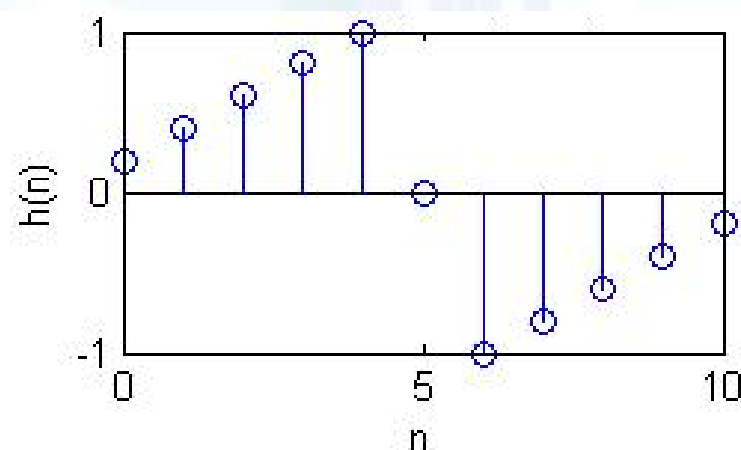
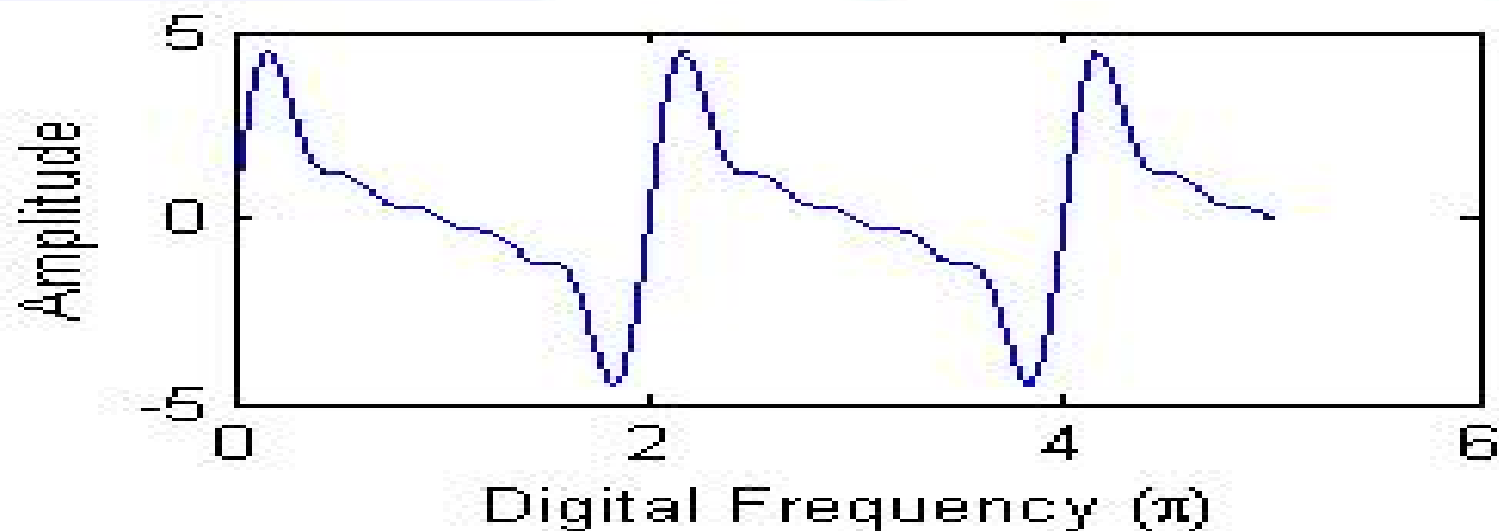
$$c(n) = 2h\left(\frac{N-1}{2} - n\right) \quad n = 1, 2, \dots, \frac{N-1}{2}$$

6.1 线性相位FIR滤波器的幅频特性



关于 $k\pi$ 奇对称，必有 $H(k\pi)=0$ ，
仅可用来逼近带通滤波器

6.1 线性相位FIR滤波器的幅频特性



$h(n)$ 奇对称, $N=11$

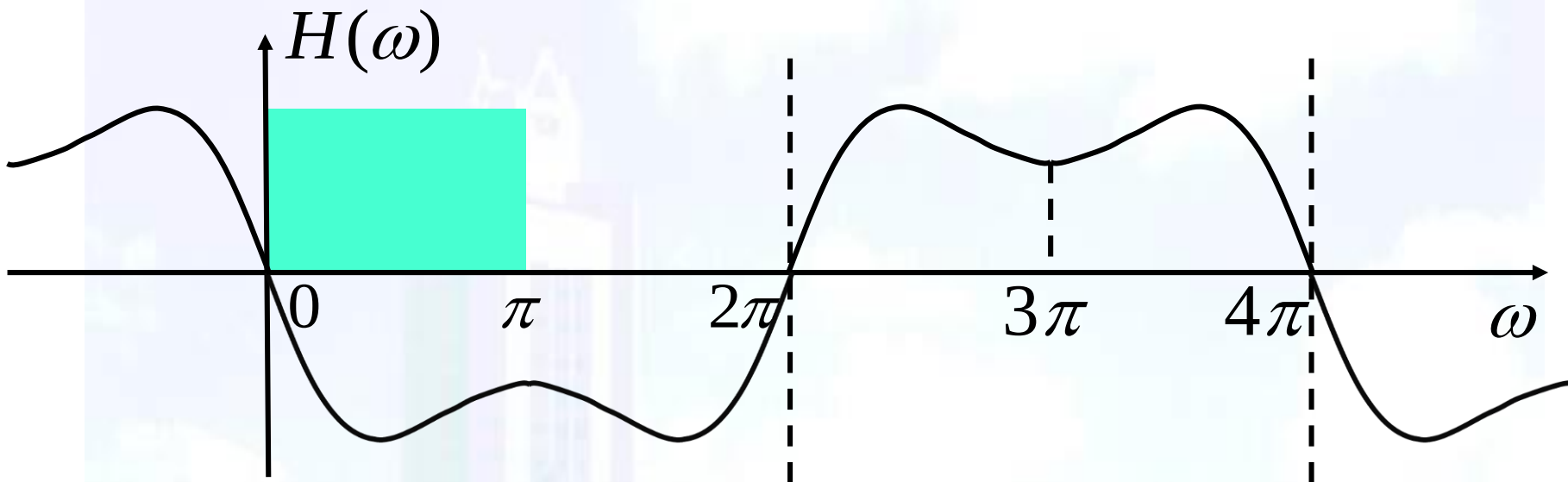
6.1 线性相位FIR滤波器的幅频特性

(4) $h(n)$ 奇对称, N 偶数

$$H(\omega) = \sum_{n=1}^{\frac{N}{2}} d(n) \sin \omega(n - \frac{1}{2})$$

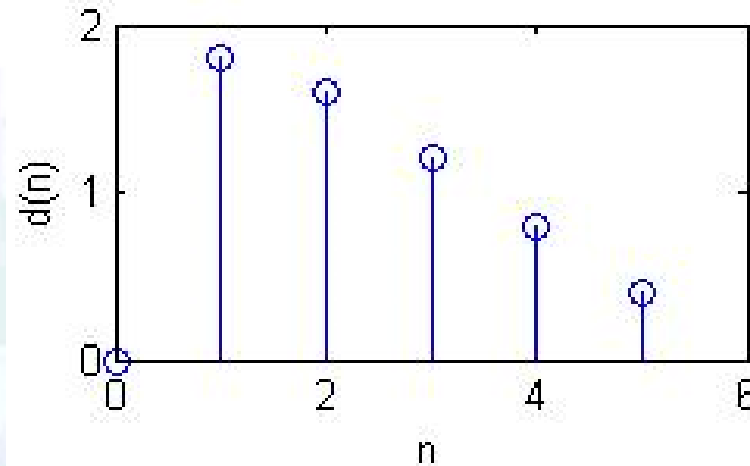
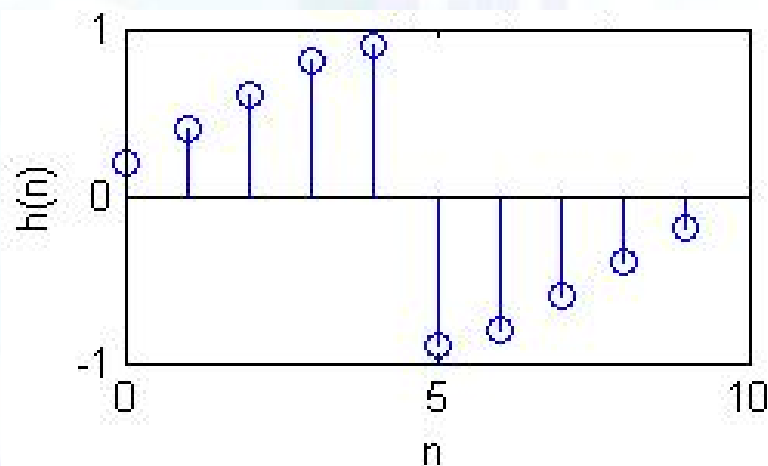
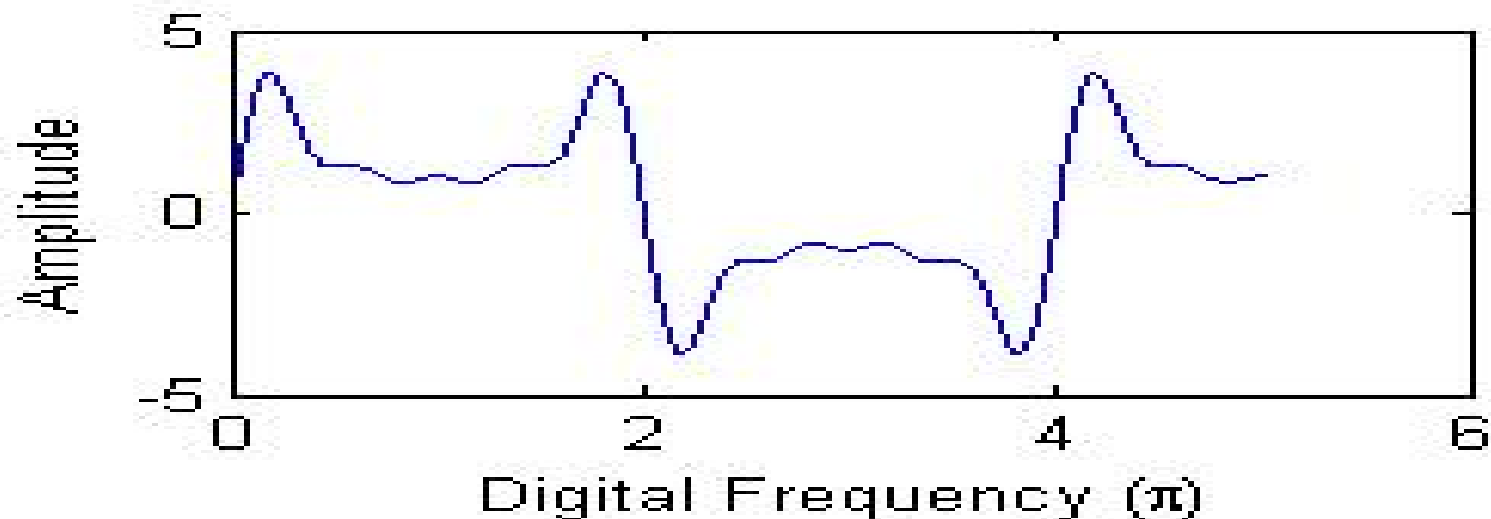
$$d(n) = 2h(\frac{N}{2} - n) \quad n = 1, 2, \dots, \frac{N}{2}$$

6.1 线性相位FIR滤波器的幅频特性

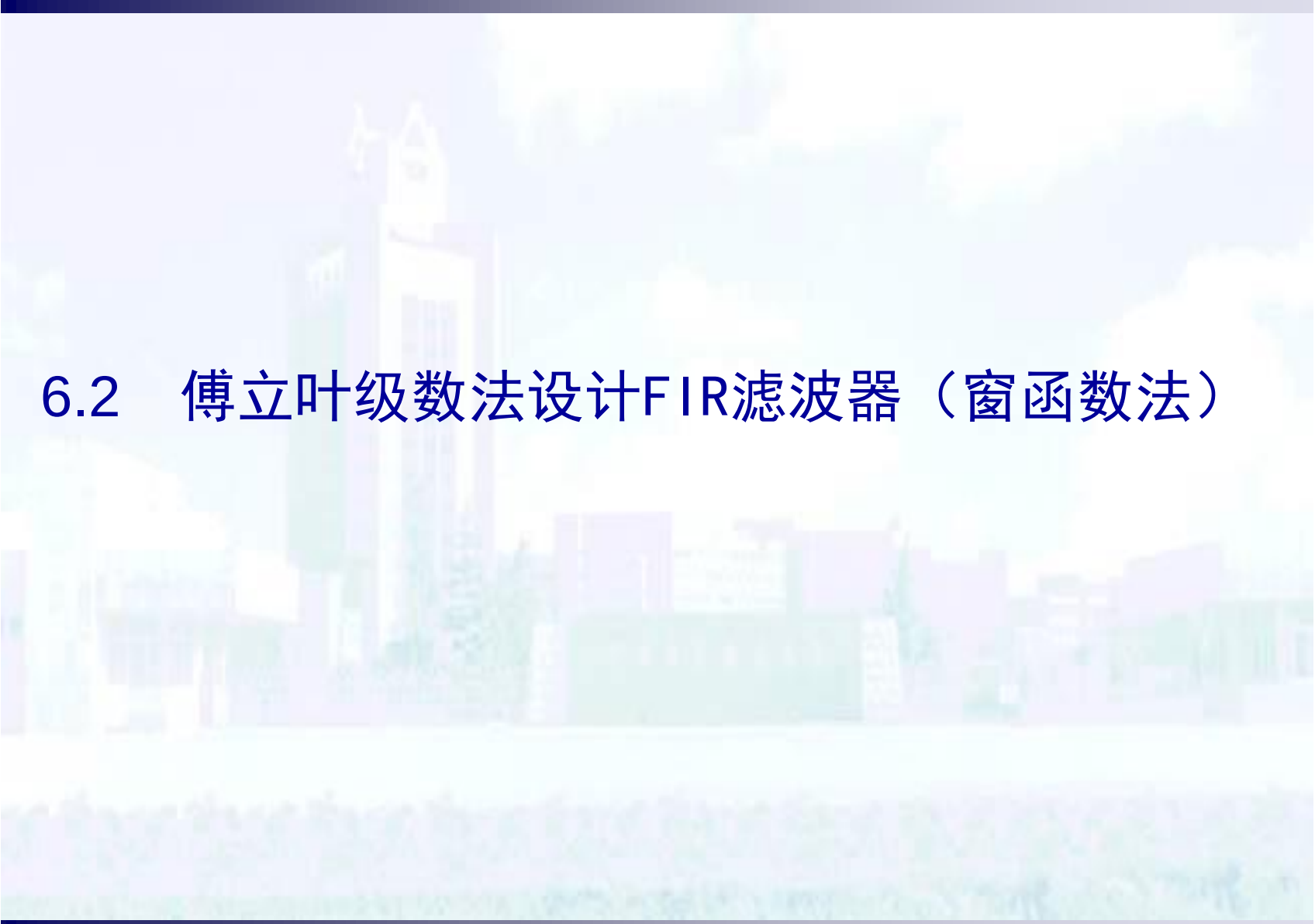


关于 $2k\pi$ 奇对称，关于 $(2k+1)\pi$ 偶对称
必有 $H(2k\pi)=0$ ，不可用来逼近低通和带阻滤波器

6.1 线性相位FIR滤波器的幅频特性



$h(n)$ 奇对称, $N=10$



6.2 傅立叶级数法设计FIR滤波器（窗函数法）

6.2 傅立叶级数法设计FIR滤波器（窗函数法）

一、基本设计方法

基于频域特性的解析表达与窗函数

给定 $H_d(e^{j\omega})$ 导出 $h_d(n)$

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$
$$-\infty < n < \infty$$

对 $h_d(n)$ 截取有限长度，形成 $h(n)$

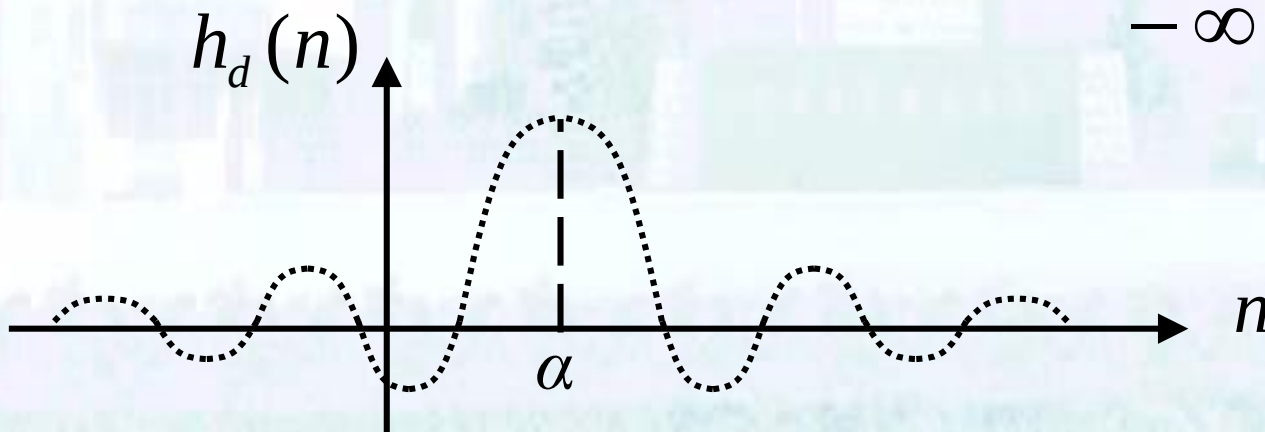
6.2 傅立叶级数法设计FIR滤波器（窗函数法）

以低通滤波器逼近为例

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\alpha\omega} & |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega(n-\alpha)} d\omega = \frac{\sin \omega_c (n-\alpha)}{\pi(n-\alpha)}$$

$$-\infty < n < \infty$$



6.2 傅立叶级数法设计FIR滤波器（窗函数法）

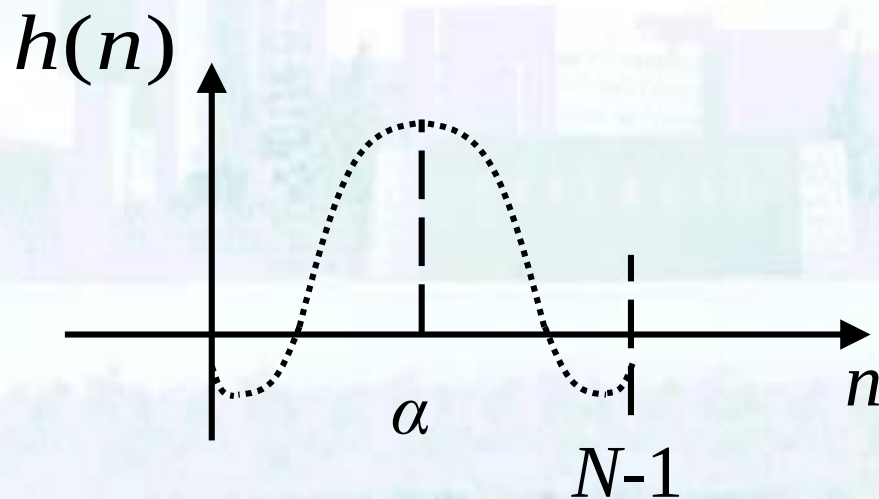
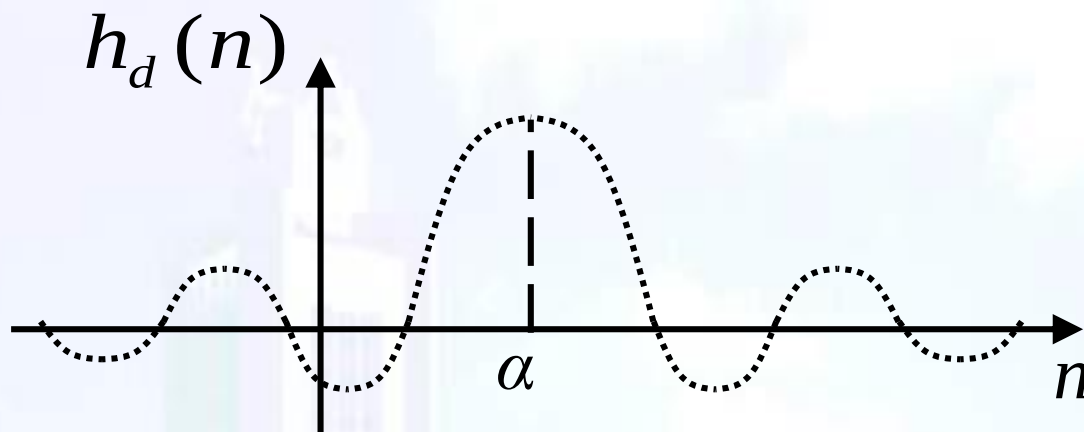
对 $h_d(n)$ 用单边矩形窗截取，

$$W_R(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$$h(n) = h_d(n) \cdot W_R(n) = \frac{\sin \omega_c (n - \alpha)}{\pi (n - \alpha)}$$

$$n = 0, \dots, N-1$$

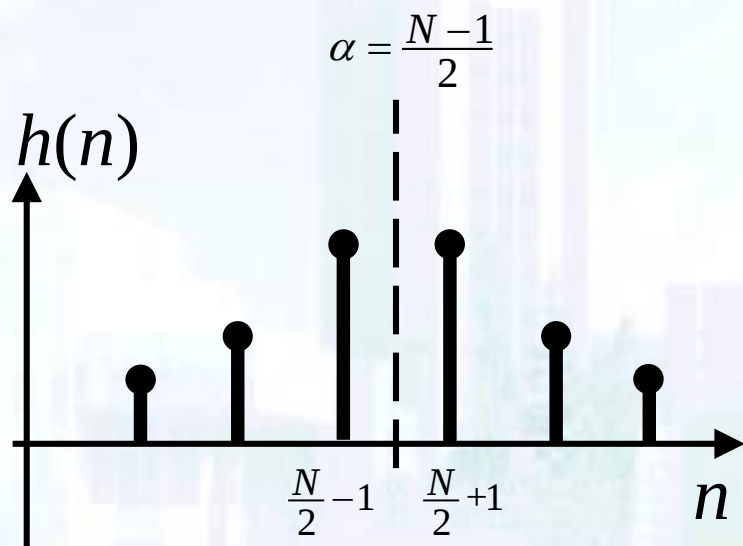
6.2 傅立叶级数法设计FIR滤波器（窗函数法）



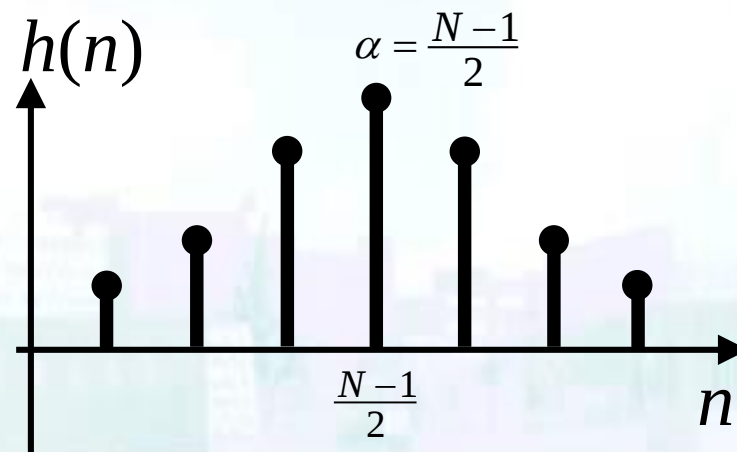
6.2 傅立叶级数法设计FIR滤波器（窗函数法）

$h(n)$ 关于 α 偶对称 $\alpha = \frac{N-1}{2}$

对低通滤波器， N 取为奇数或偶数均可



N 为偶数

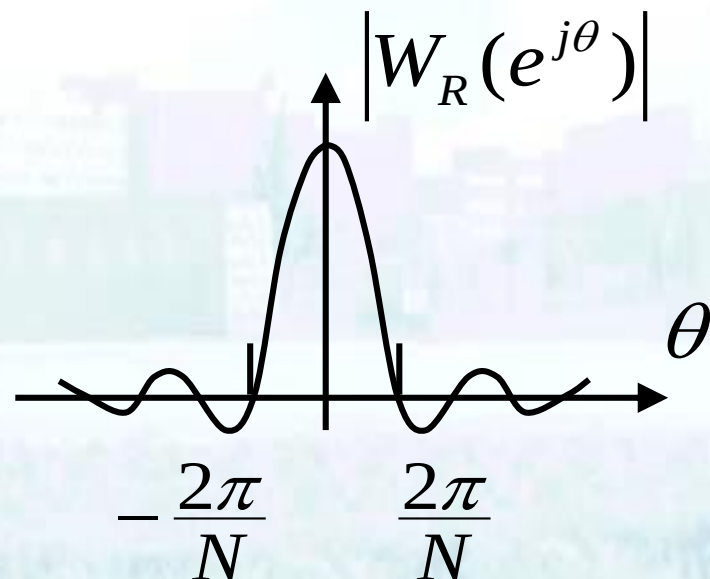
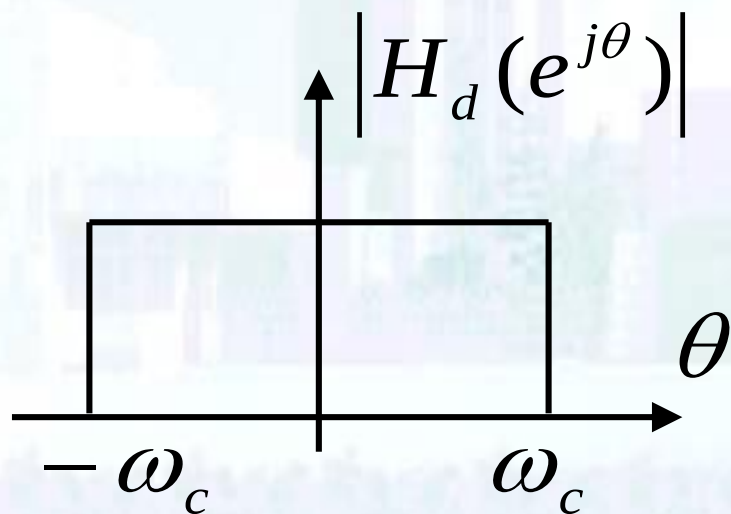


N 为奇数

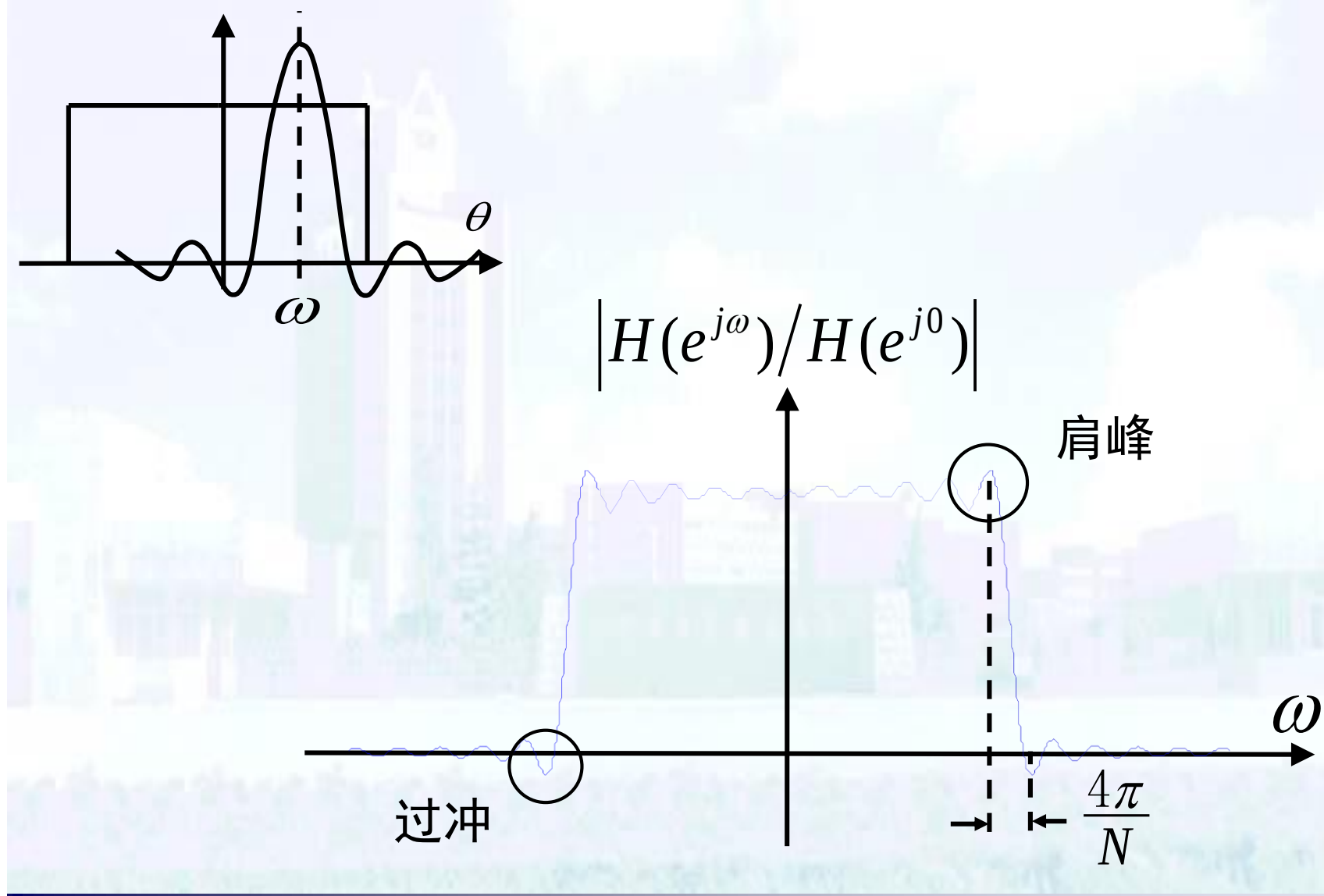
6.2 傅立叶级数法设计FIR滤波器（窗函数法）

$h(n)$ 的频率响应

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\theta}) W_R[e^{j(\omega-\theta)}] d\theta$$



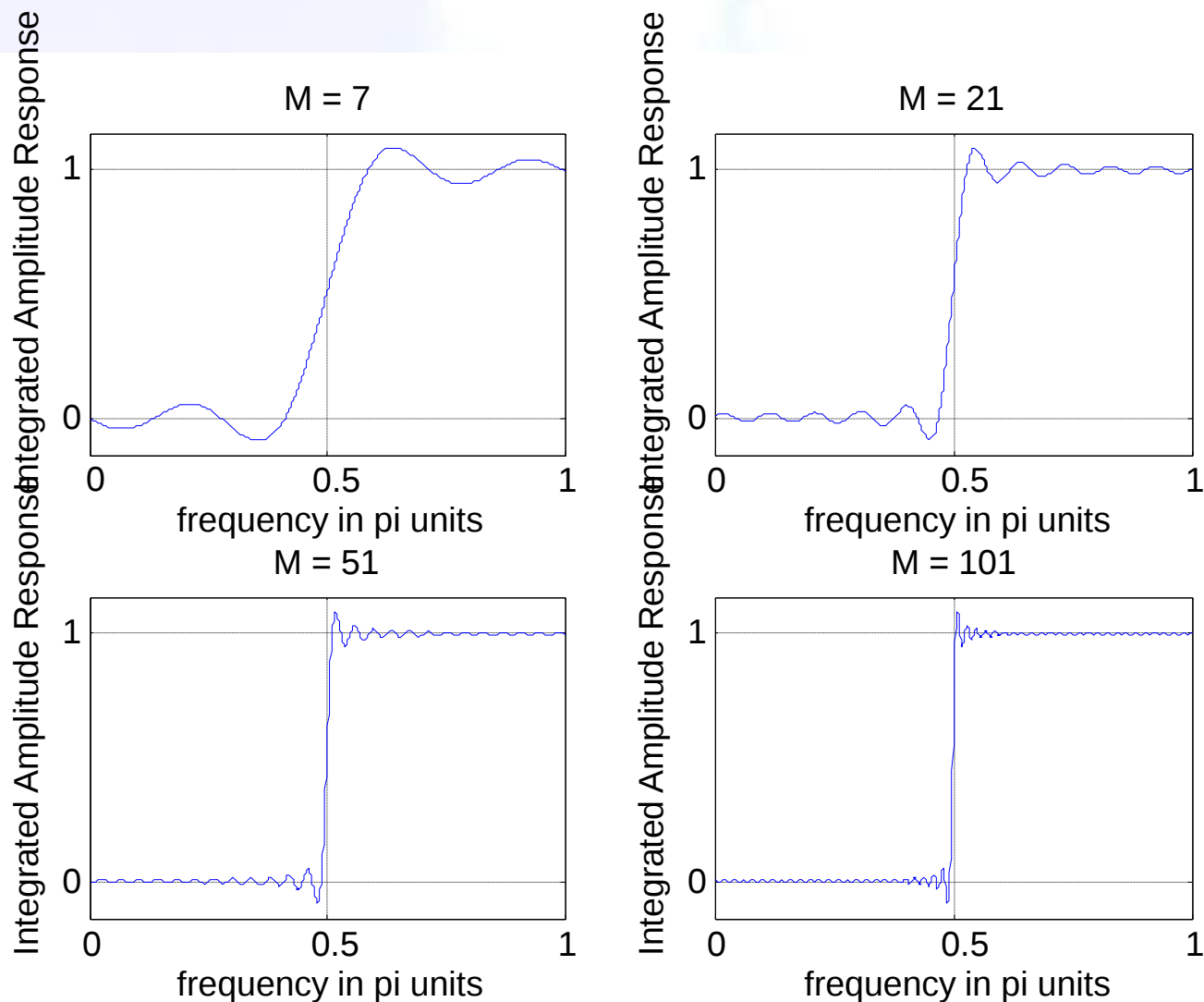
6.2 傅立叶级数法设计FIR滤波器（窗函数法）



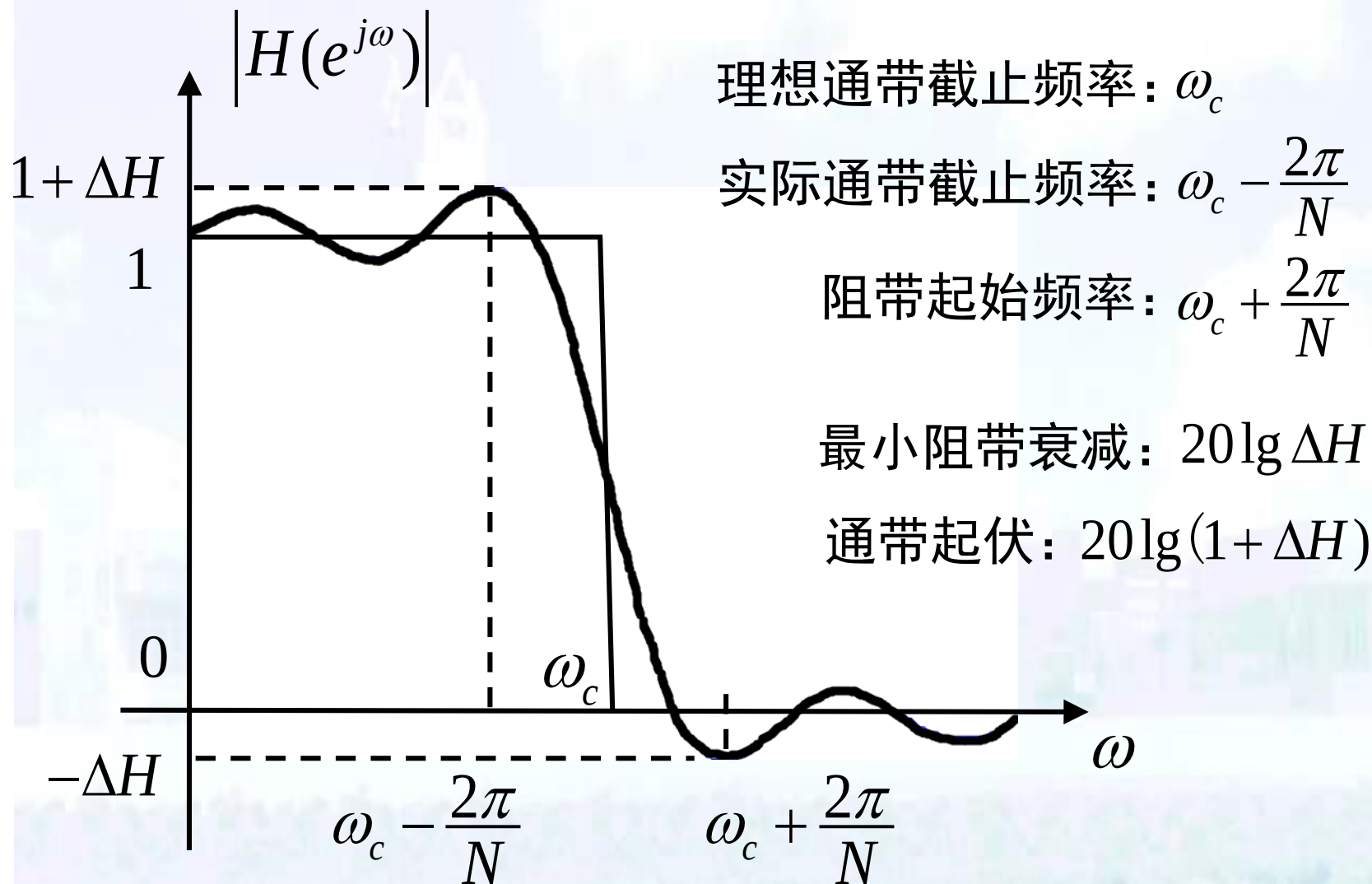
6.2 傅立叶级数法设计FIR滤波器（窗函数法）

- ① 因为截短，产生过渡带，宽度为窗函数的主瓣宽度。对矩形窗， $\Delta\omega = \frac{4\pi}{N}$
- ② 增加 N ，可使过渡带变得陡峭，但不能改变肩峰（过冲）幅度大小。Gibbs效应。

6.2 傅立叶级数法设计FIR滤波器（窗函数法）



6.2 傅立叶级数法设计FIR滤波器（窗函数法）



二、窗函数的选择使用

过渡带的宽度：同窗函数的主瓣宽度

肩峰（过冲）幅度：取决于窗函数的旁瓣

窗函数的选取原则：

- 1) 主瓣窄，使过渡带陡峭
- 2) 旁瓣低，减小肩峰（过冲）幅度

窗函数的使用原则：

- 1) 低旁瓣窗函数，大的止带衰减。
- 2) 增加系统复杂度 N ，降低过渡带宽度

6.2 傅立叶级数法设计FIR滤波器（窗函数法）

常用窗函数

窗函数	主瓣宽度	旁瓣电平 (dB)	阻带衰减 (dB)	通带起伏 (dB)
矩形	$4\pi/N$	-13	-21	0.7
三角	$8\pi/N$	-25	-25	0.5
Hanning	$8\pi/N$	-32	-44	0.05
Hamming	$8\pi/N$	-42	-53	0.02
Blackman	$12\pi/N$	-57	-74	0.002

6.2 傅立叶级数法设计FIR滤波器（窗函数法）

三、设计要点

- 滤波器指标

1) 通带截止频率； 2) 阻带衰减； 3) 过渡带宽

- 基本步骤

1) 根据阻带衰减指标，选择窗函数 $W_R(n)$

2) 根据过渡带宽，确定系统阶数 $N = \frac{k\pi}{\Delta\omega}$

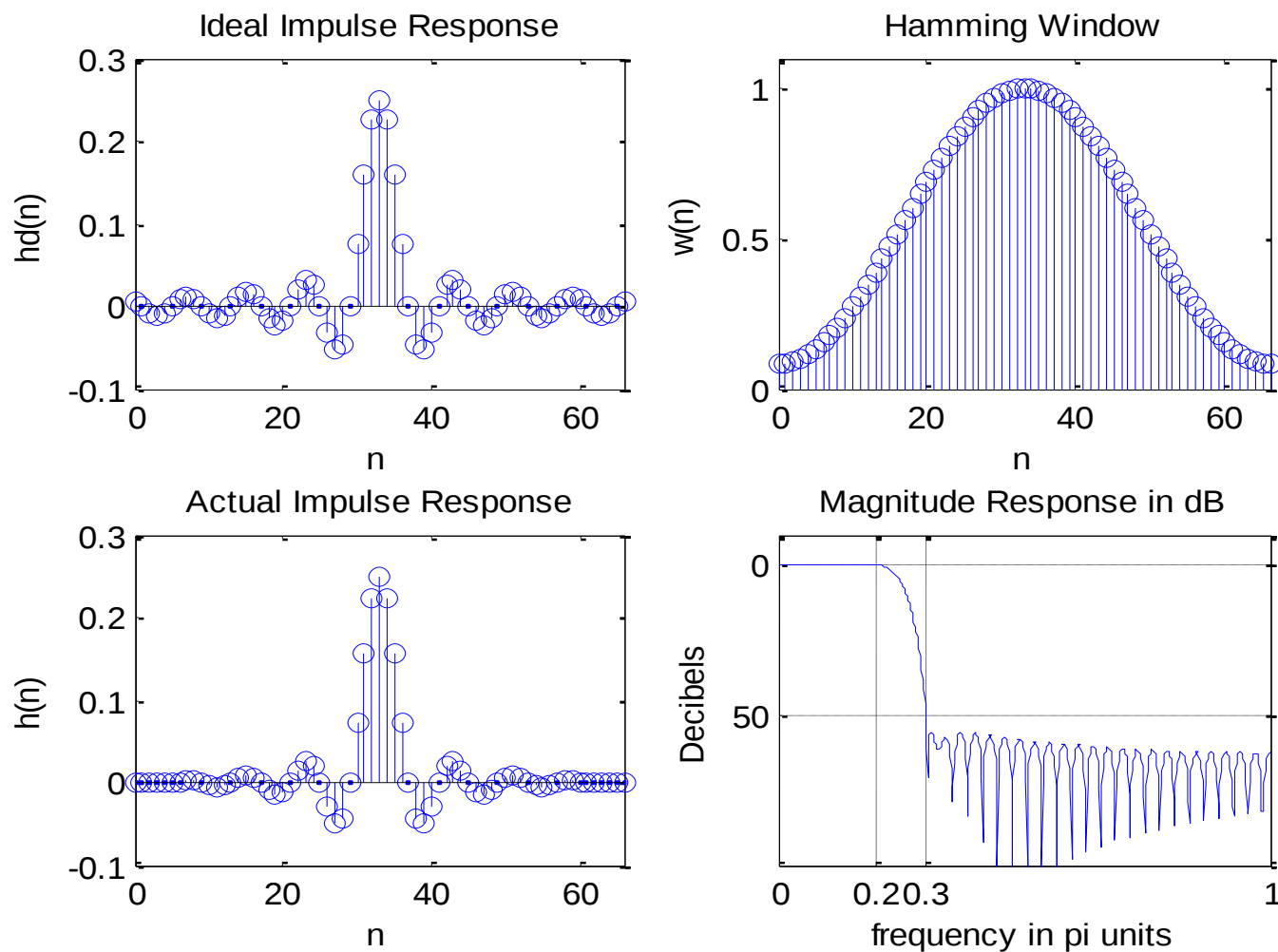
3) 设计频率响应解析表达式，计算 $h_d(n)$

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \quad -\infty < n < \infty$$

4) 窗函数截取 $h_d(n)$

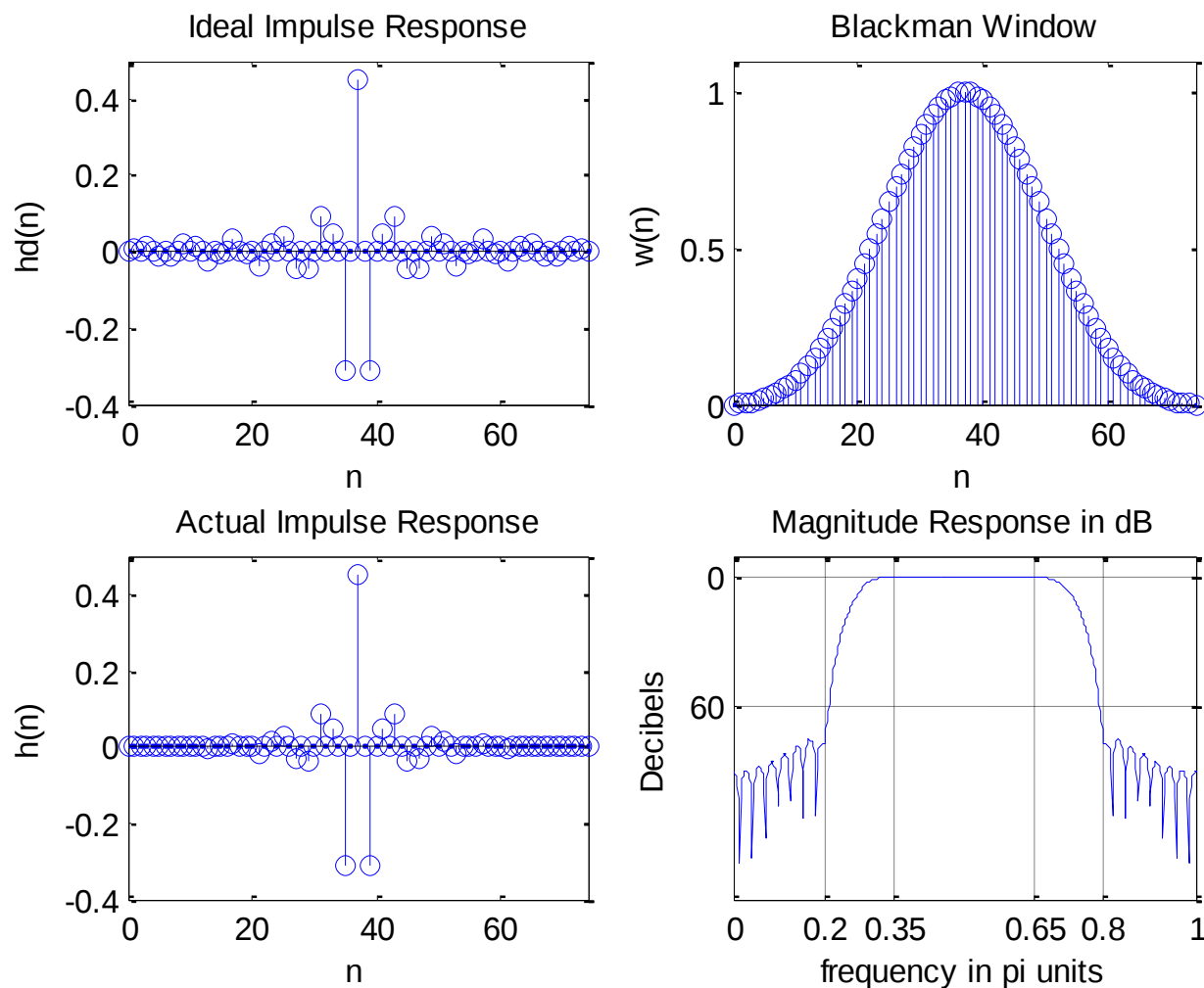
$$h(n) = h_d(n) W_R(n) \quad 0 \leq n \leq N-1$$

6.2 傅立叶级数法设计FIR滤波器（窗函数法）



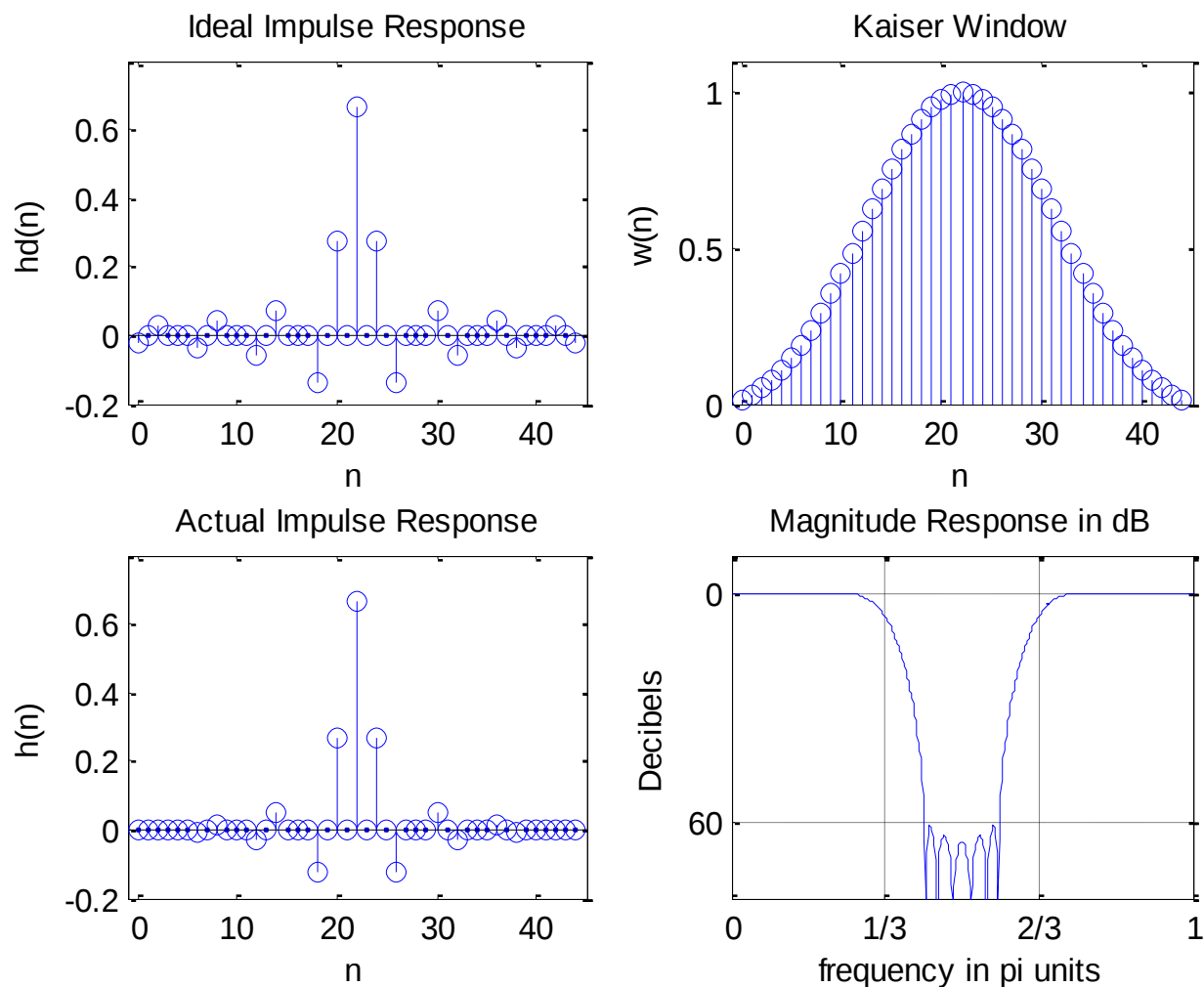
Hamming窗，低通

6.2 傅立叶级数法设计FIR滤波器（窗函数法）



Blackman窗，带通

6.2 傅立叶级数法设计FIR滤波器（窗函数法）



Kaiser窗，带阻



6.3 频率抽样设计方法

6.3 频率抽样设计方法

一、基本方法——DFT法 基于频域取样定理

给定频率响应 $H_d(e^{j\omega})$ ，进行等间距取样，

$$H(k) = H_d(e^{j\omega}) \bigg|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k} = H_d(e^{j\frac{2\pi}{N}k}) \quad k=0,1,\dots,N-1$$

则
$$h(n) = \text{IDFT}[H(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k) e^{j\frac{2\pi}{N}nk} \quad n=0,1,\dots,N-1$$

或
$$H(z) = \frac{1-z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1-z^{-1}e^{j\frac{2\pi}{N}k}}$$

二、频率响应的逼近

滤波器的频率响应

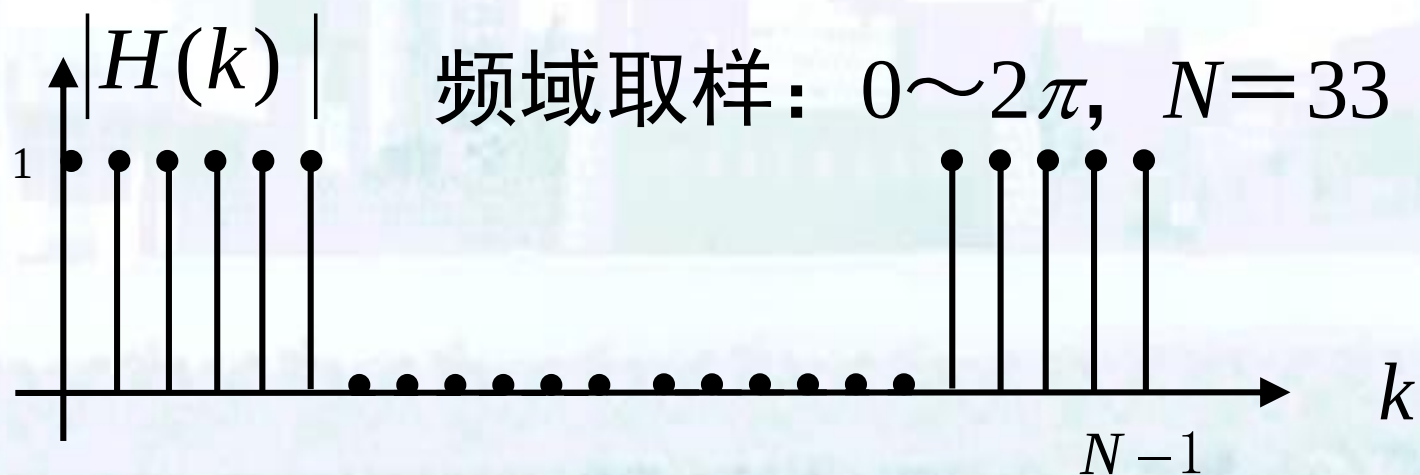
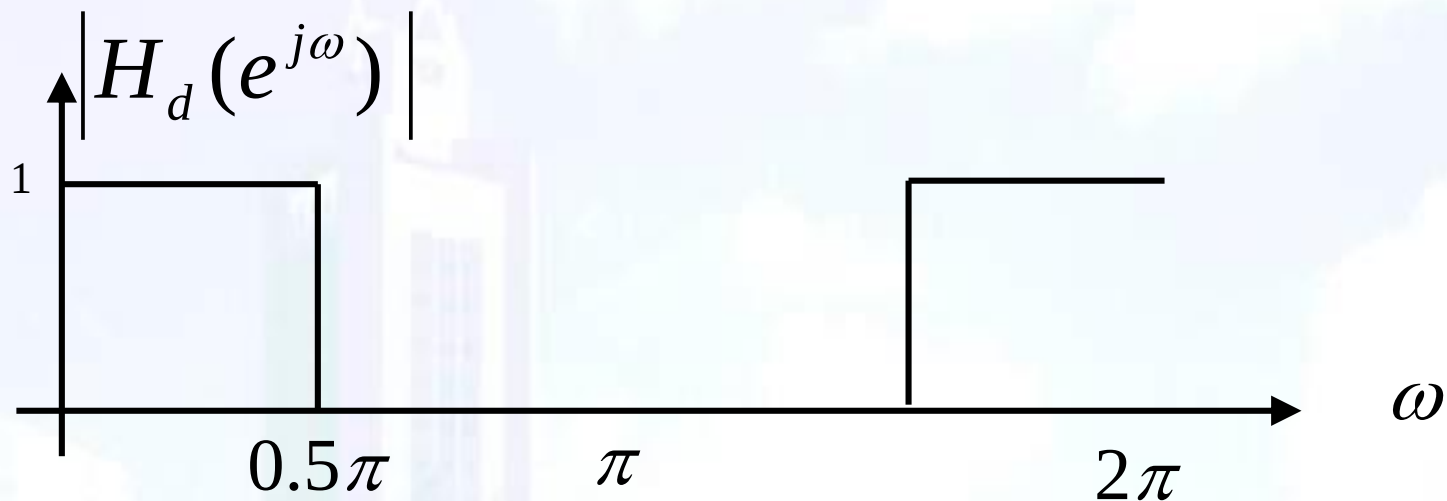
$$H(e^{j\omega}) = \frac{\sin \frac{N\omega}{2}}{N} e^{-j\frac{N-1}{2}\omega} \sum_{k=0}^{N-1} H(k) \cdot \frac{e^{-j\frac{k\pi}{N}}}{\sin(\frac{\omega}{2} - \frac{k\pi}{N})}$$

频率取样与内插函数的组合

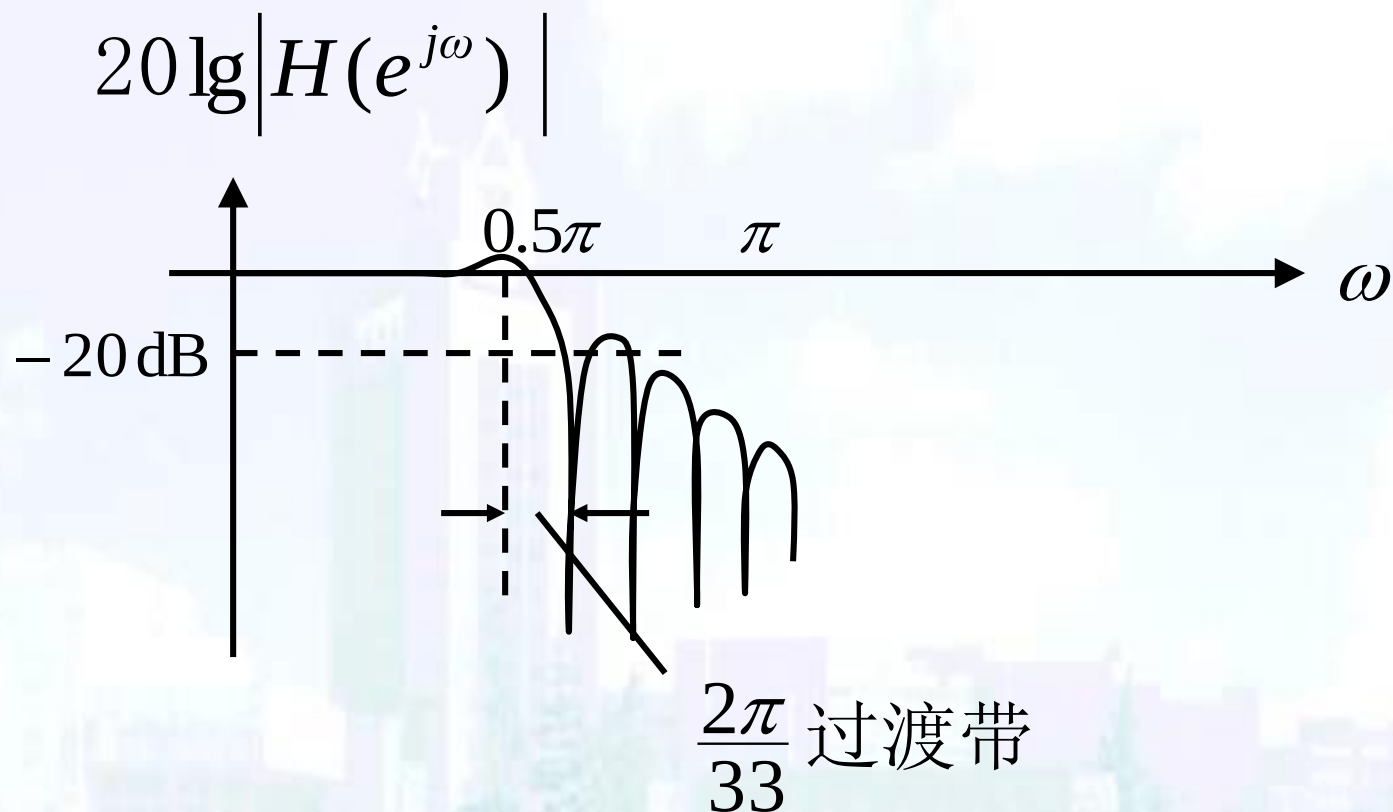
—— $H(K)$ 对内插函数加权

6.3 频率抽样设计方法

理想低通滤波器



6.3 频率抽样设计方法



问题：对应于取样点的频率，衰减无穷大
取样点外，最小衰减不足20 dB

6.3 频率抽样设计方法

形式上：

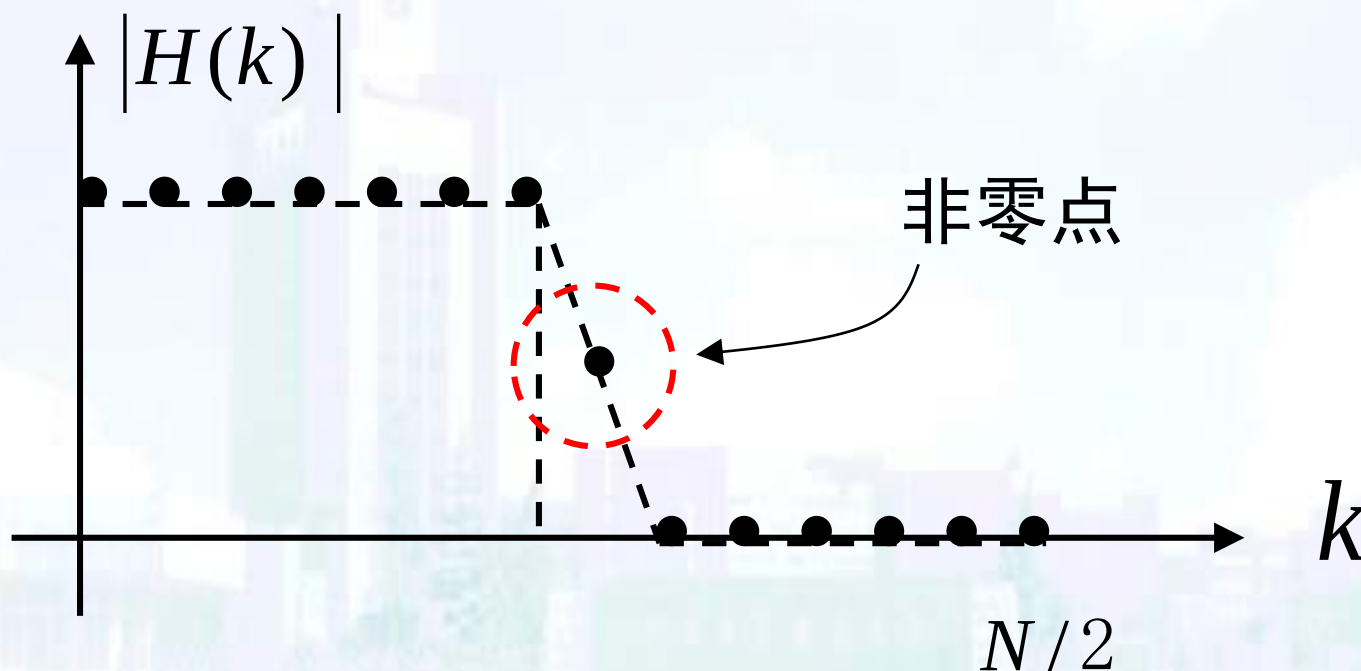
取样点之间的频率响应通过内插函数得到

原理上：

理想低通的冲激响应序列在时域上无限长
无论 N 多大，也不能满足频域取样定理

6.3 频率抽样设计方法

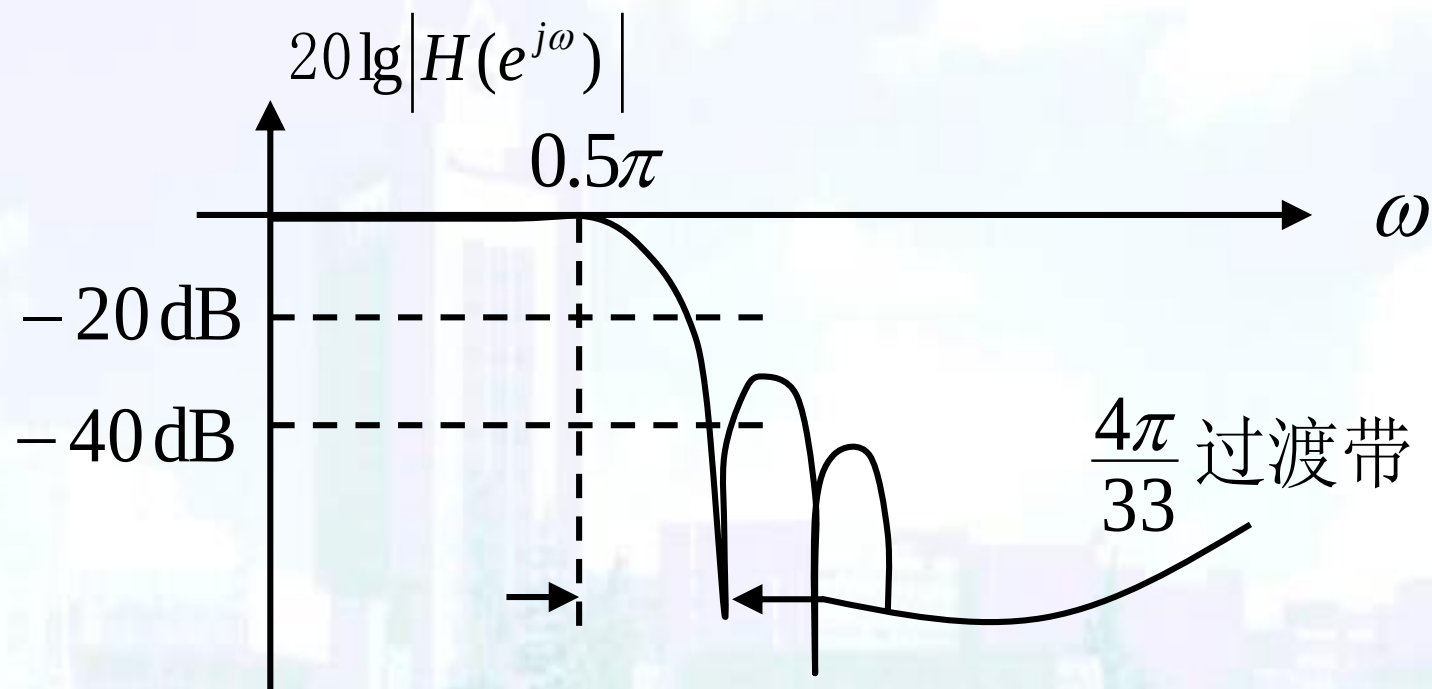
改进思路：修改 $|H_d(e^{j\omega})|$ ，展宽过渡带



——改变逼近对象，降低逼近要求

6.3 频率抽样设计方法

改进后的频率响应



止带最小衰减 $> 20\text{ dB}$

过渡带展宽1倍, 至 $\frac{4\pi}{33}$

6.3 频率抽样设计方法

- 形式上

增加了非零点取样，抵消通带内的内插函数。

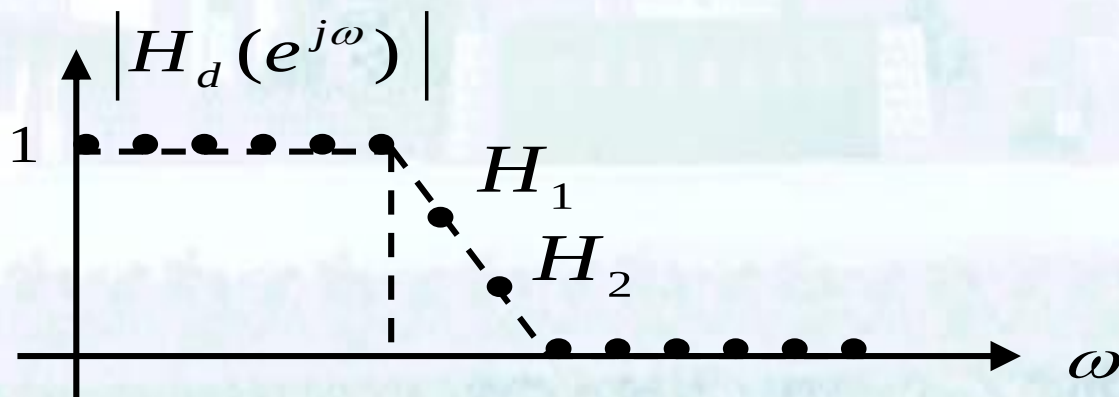
- 原理上

修改后的 $|H_d(e^{j\omega})|$ ，频率变化减弱，时域序列能量随时间减少。

以降低逼近要求，来换取降低逼近误差。

三、优化考虑

- 1) 增加过渡带非零点取样点, 改善止带衰减特性。
- 2) 提高取样点数 (增加 N), 压缩过渡带。
- 3) 优化非零点取值, 选择 H_1 , H_2 , 使止带衰减最大。



6.3 频率抽样设计方法

H_1 与 H_2 分别是对应频率点内插函数的系数
 $H(e^{j\omega})$ 是 H_1, H_2 的线性函数。

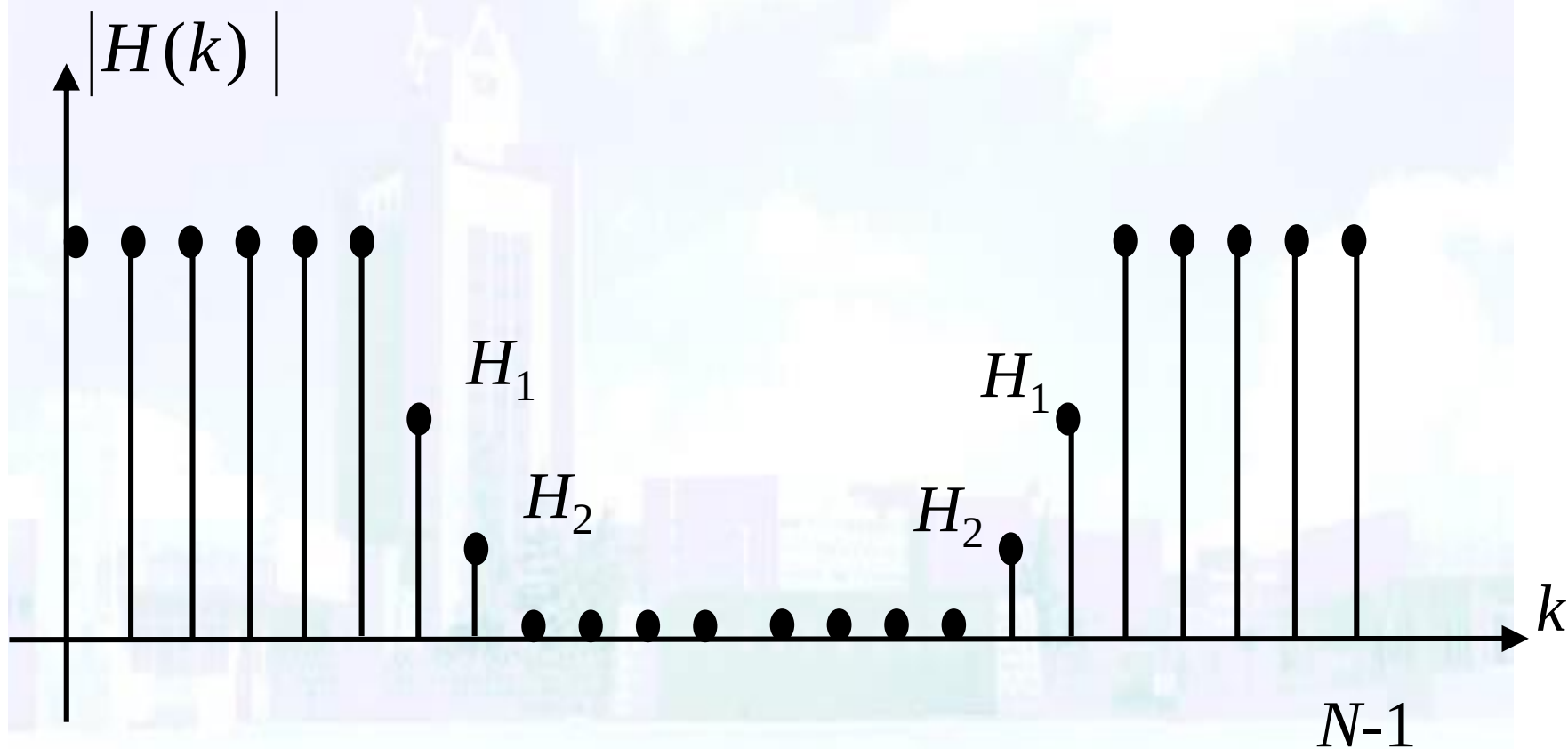
设 $H_d(e^{j\omega})$ 是低通，通带至第 $M-1$ 个采样点截止，则

$$H(e^{j\omega}) = \frac{\sin \frac{N\omega}{2}}{N} e^{-j\frac{N-1}{2}\omega} f(\omega, H_1, H_2)$$

6.3 频率抽样设计方法

$$\begin{aligned} f(\bullet) = & \sum_{k=0}^{M-1} \frac{H(k)e^{-j\frac{k\pi}{N}}}{\sin(\frac{\omega}{2} - \frac{k\pi}{N})} \\ & + \frac{H_1 e^{-j(\frac{M\pi}{N} + \alpha)}}{\sin(\frac{\omega}{2} - \frac{M\pi}{N})} + \frac{H_2 e^{-j(\frac{M+1}{N}\pi + \beta)}}{\sin(\frac{\omega}{2} - \frac{M+1}{N}\pi)} \\ & + \frac{H_2 e^{-j(\frac{N-M-2}{N}\pi + \beta')}}{\sin(\frac{\omega}{2} - \frac{N-M-2}{N}\pi)} + \frac{H_1 e^{-j(\frac{N-M-1}{N}\pi + \alpha')}}{\sin(\frac{\omega}{2} - \frac{N-M-1}{N}\pi)} \\ & + \sum_{k=N-M}^{N-1} \frac{H(k)e^{-j\frac{k\pi}{N}}}{\sin(\frac{\omega}{2} - \frac{k\pi}{N})} \end{aligned}$$

6.3 频率抽样设计方法

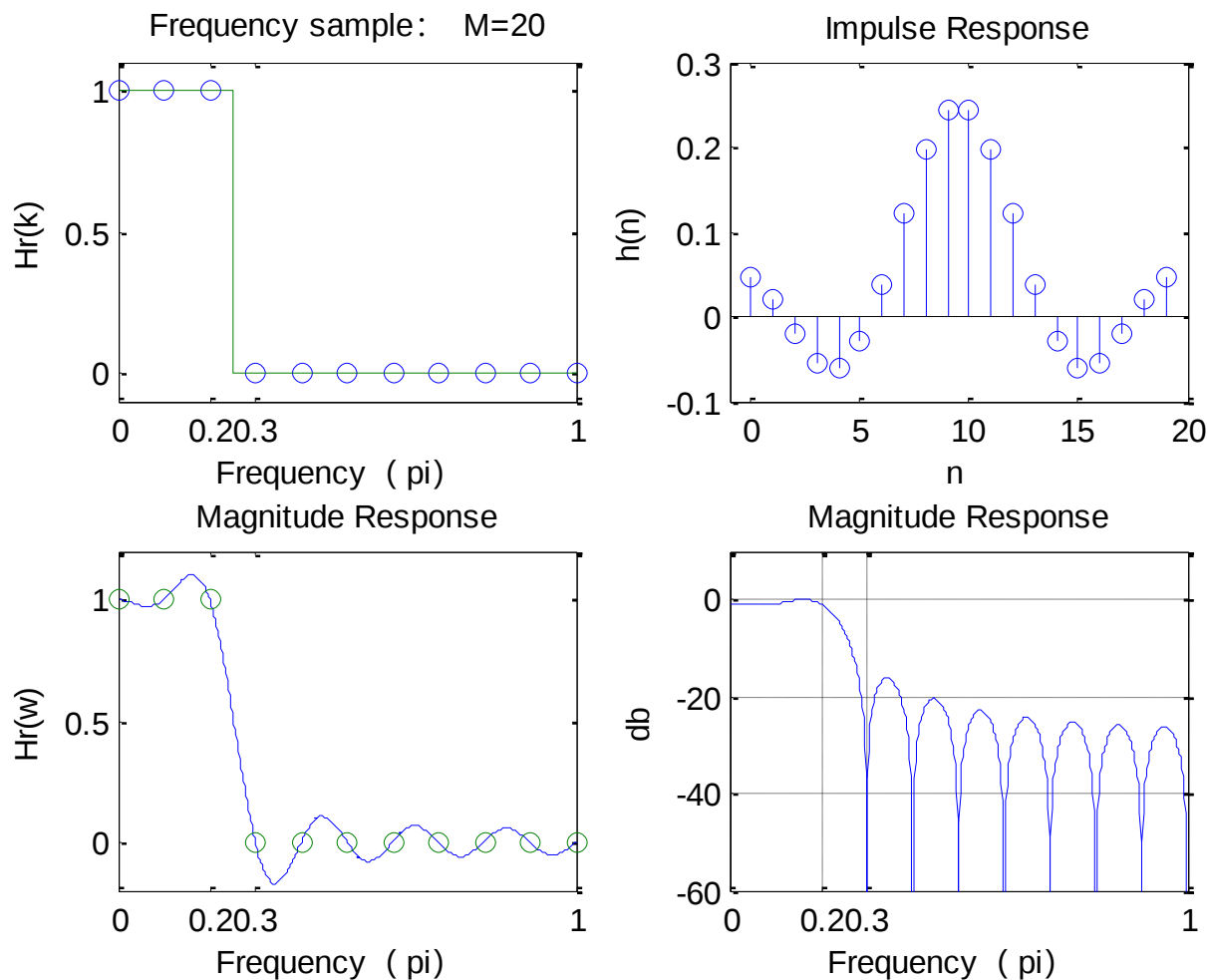


6.3 频率抽样设计方法

过渡带非零点	过渡带宽	止带衰减
无	$\frac{2\pi}{N}$	-16 dB
1	$\frac{4\pi}{N}$	-43 dB
2	$\frac{6\pi}{N}$	-65 dB

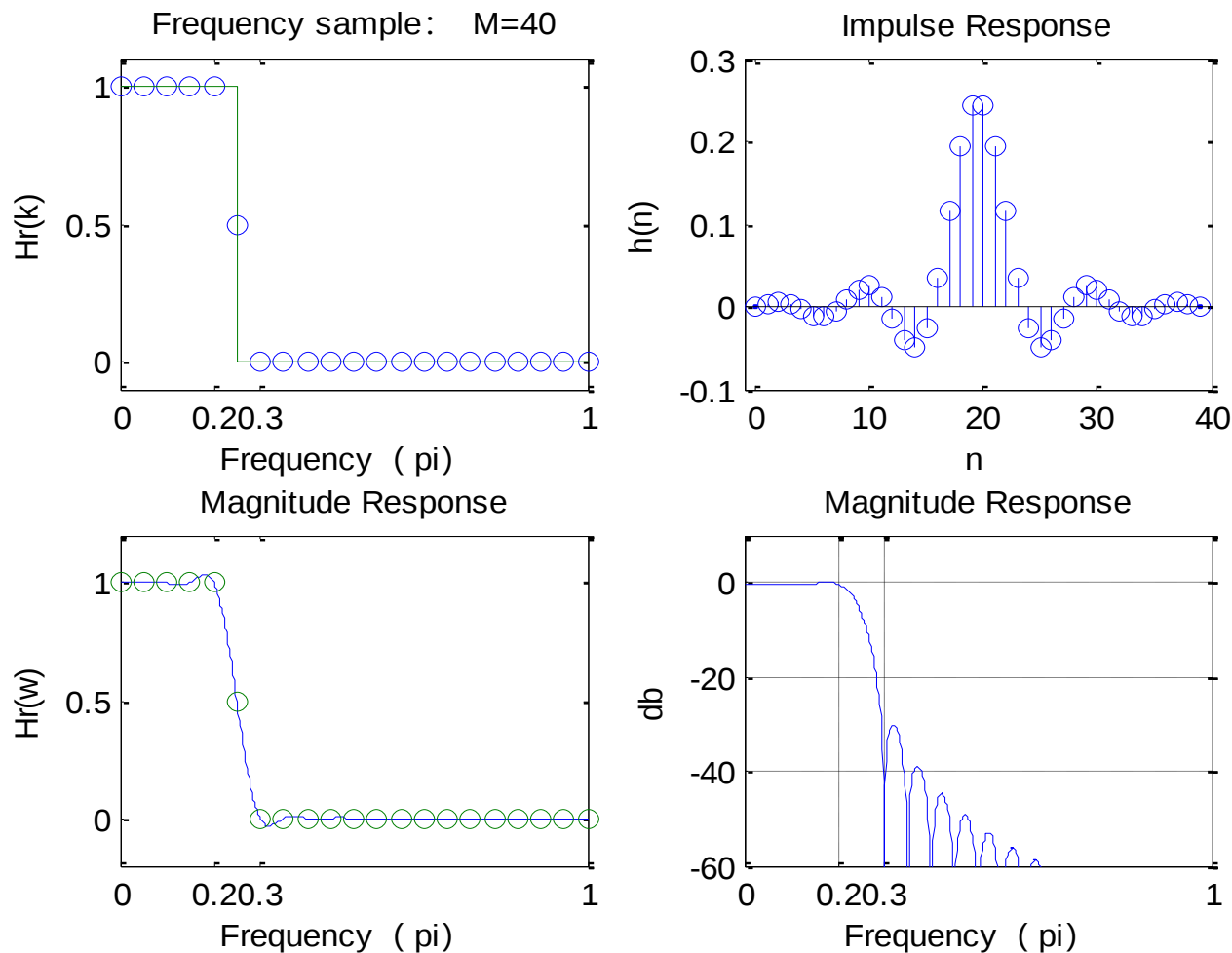
6.3 频率抽样设计方法

低通滤波器: $\omega_p=0.2\pi$, $\omega_s=0.3\pi$



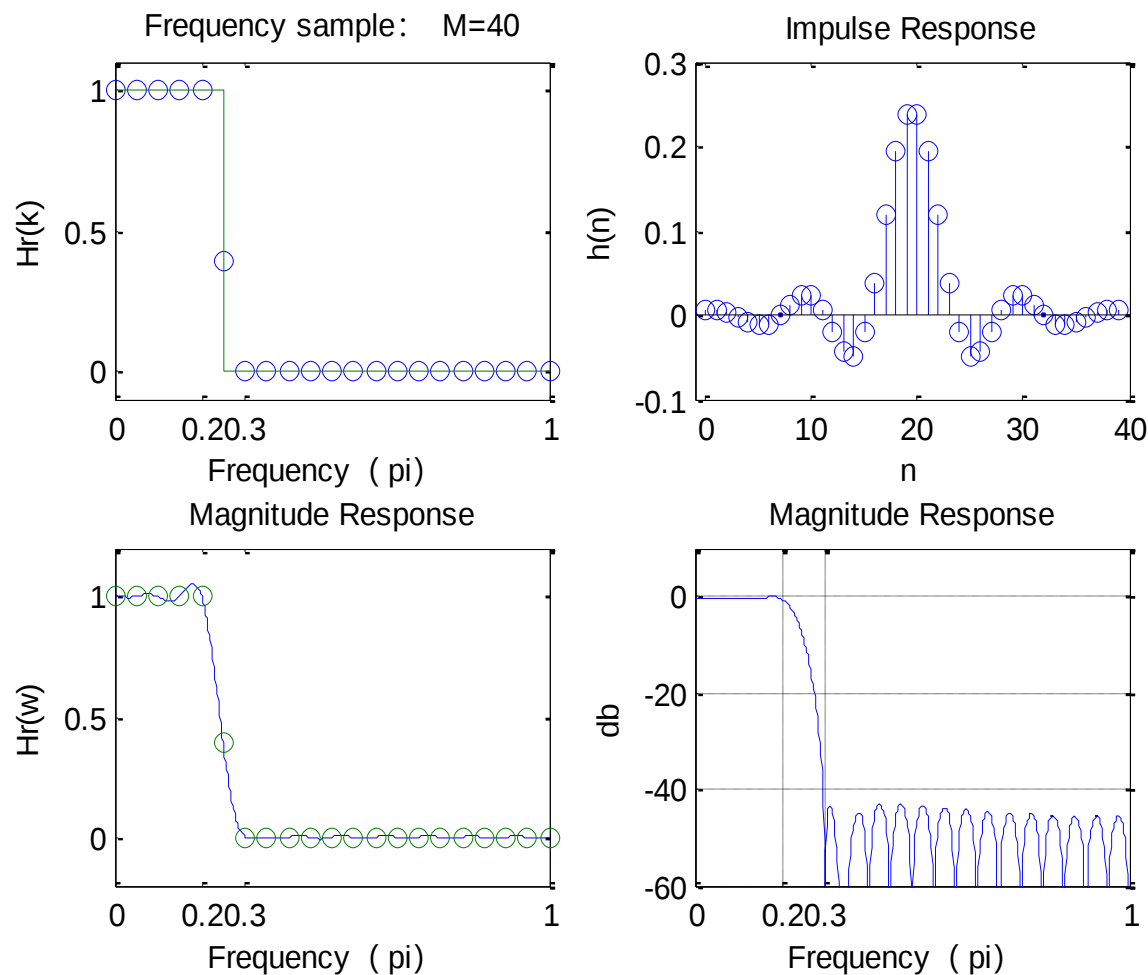
6.3 频率抽样设计方法

过渡带1点展宽，未优化



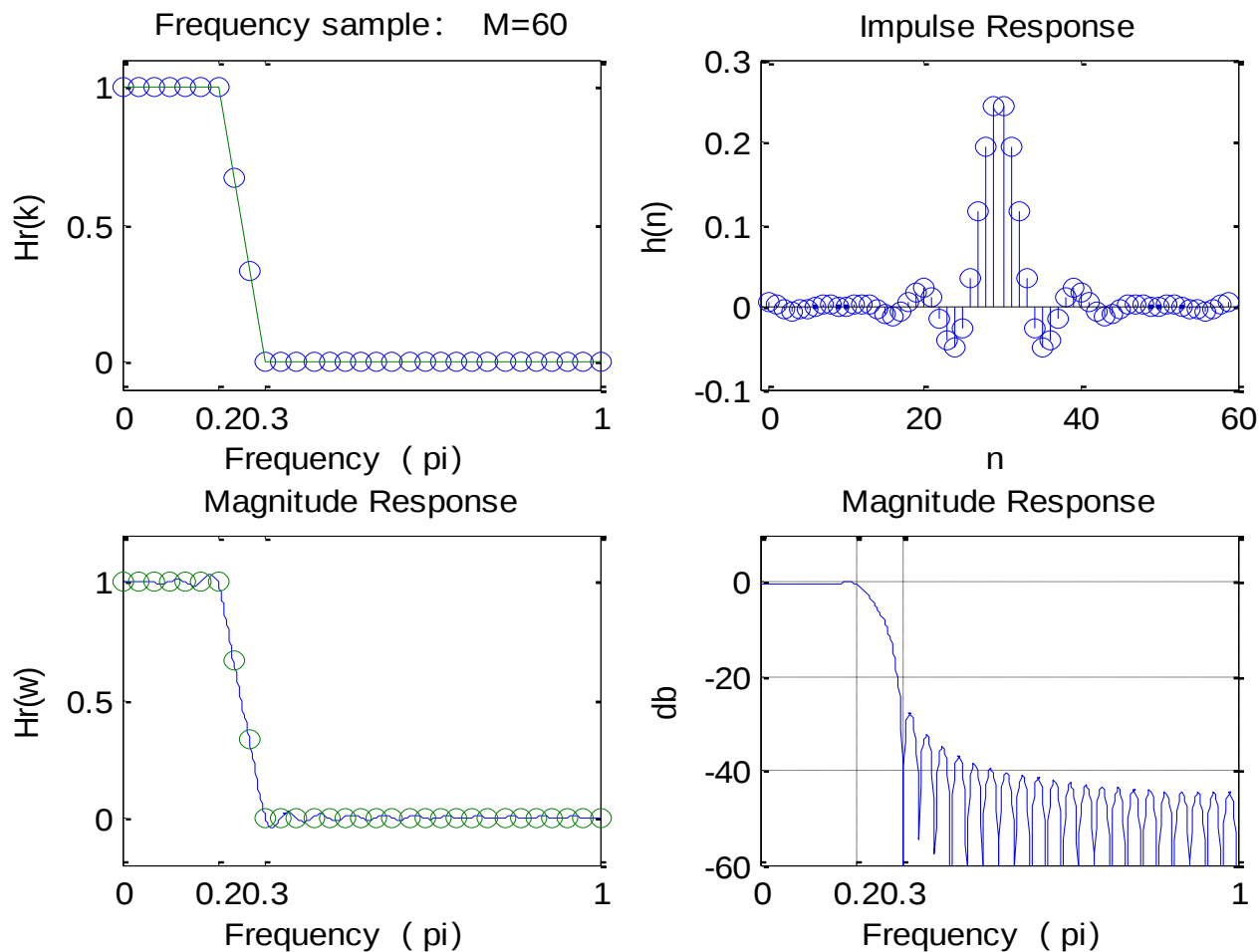
6.3 频率抽样设计方法

过渡带1点展宽，优化



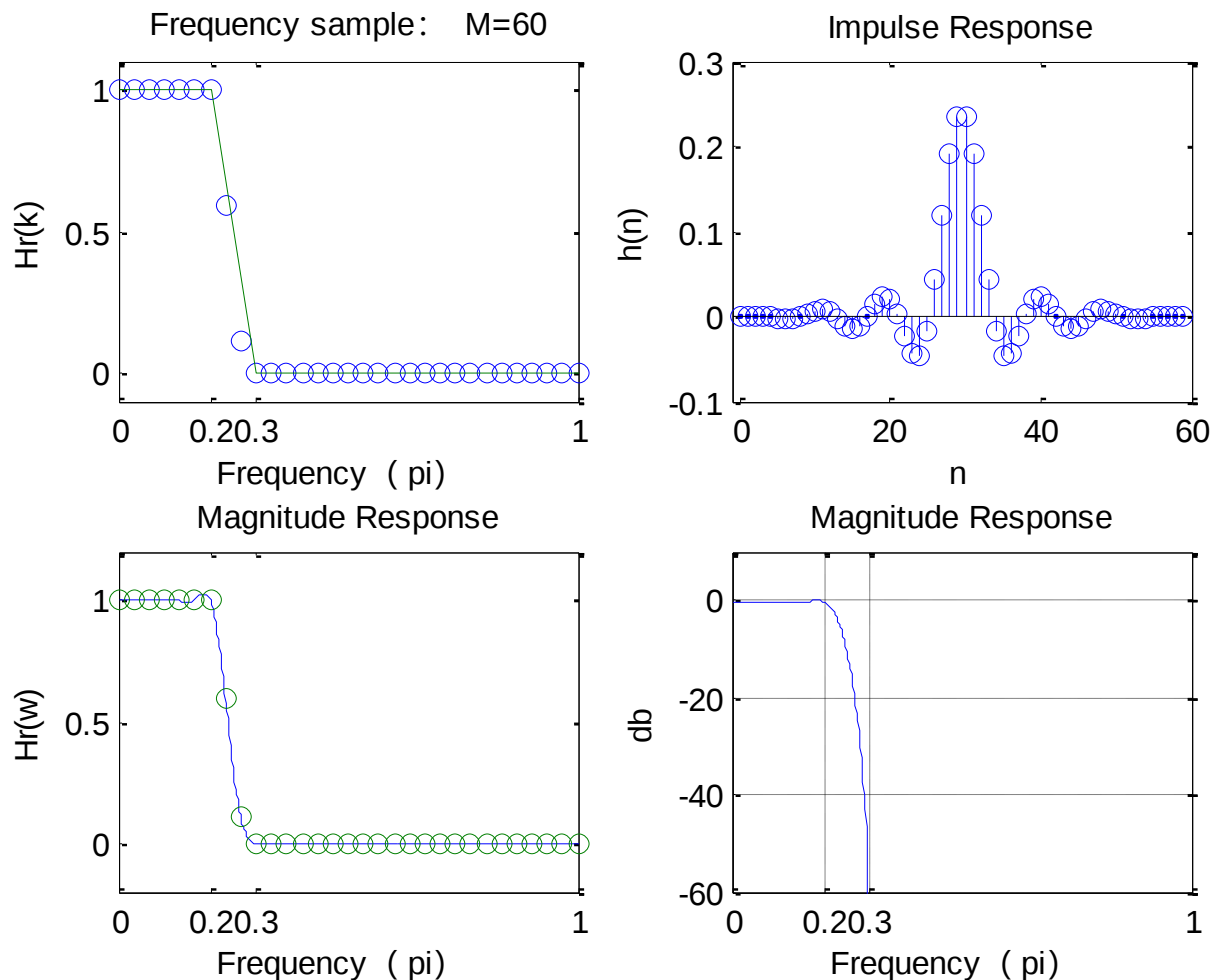
6.3 频率抽样设计方法

过渡带2点展宽，未优化



6.3 频率抽样设计方法

过渡带2点展宽，优化





6.4 FIR滤波器的等波纹逼近

6.4 FIR滤波器的等波纹逼近

一、基本原理

幅度响应优化设计：

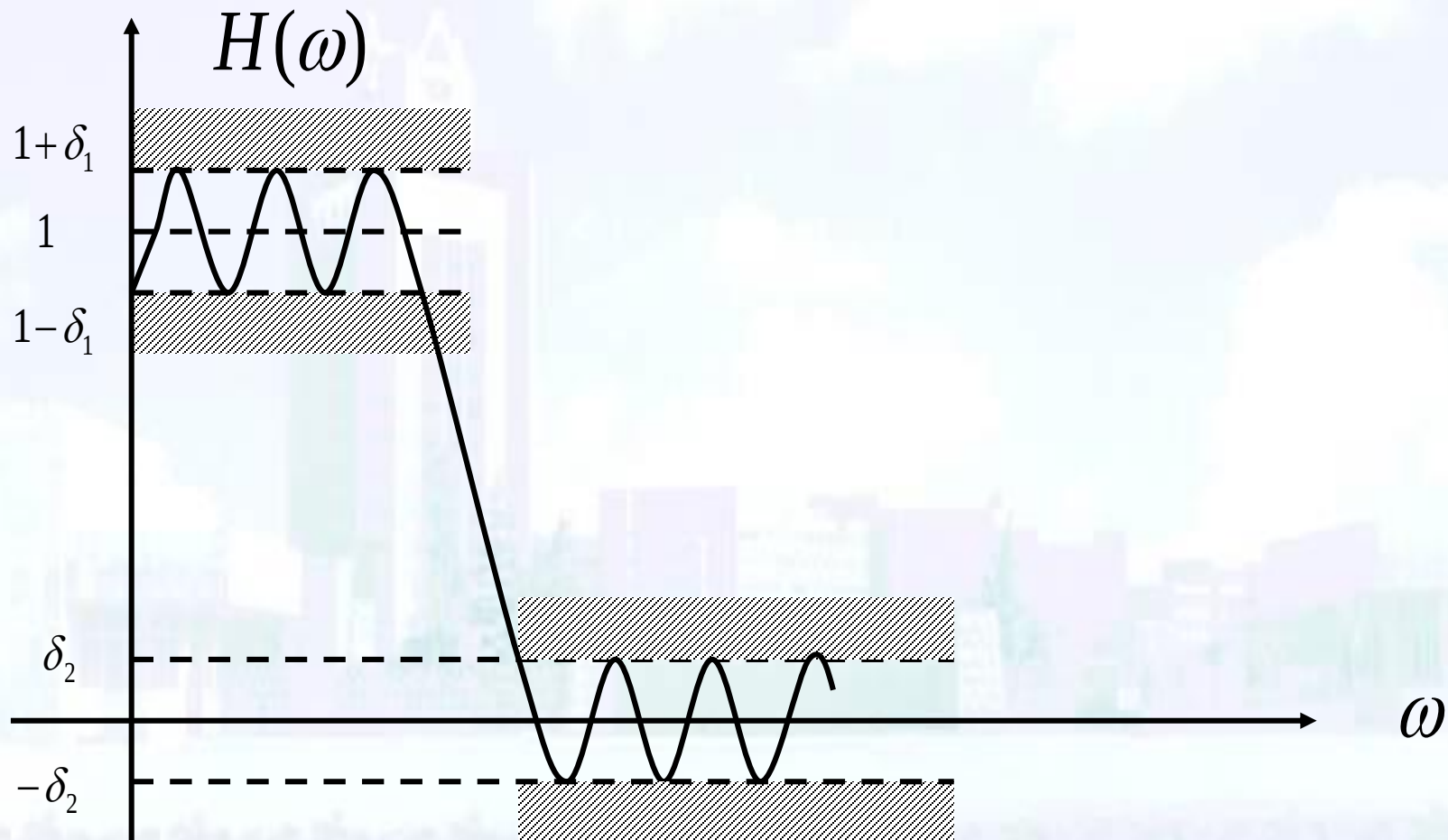
- 带内误差最少
- 过渡带最窄
- 系统阶数最低

在通带和止带内分别进行等波纹逼近，

$$E(\omega) = [H(\omega) - H_d(\omega)]$$

最大误差极小化 $\|E(\omega)\| = \min_{\omega \in A} \{ \max |E(\omega)| \}$

6.4 FIR滤波器的等波纹逼近



6.4 FIR滤波器的等波纹逼近

线性相位FIR滤波器幅度特性的一般表达：

$$H(\omega) = Q(\omega)P(\omega)$$

$P(\omega)$ 表达为 r 个余弦谐波函数之和，

$$P(\omega) = \sum_{n=0}^{r-1} \tilde{a}(n) \cos n\omega$$

线性相位4种情况下 $Q(\omega)$ 与 $P(\omega)$ 的定义

$h(n)$ 对称性	N 奇偶性	$Q(\omega)$	$P(\omega)$
偶对称	奇数	1	$\sum_{n=0}^{(N-1)/2} \tilde{a}(n) \cos n\omega$
偶对称	偶数	$\cos(\frac{\omega}{2})$	$\sum_{n=0}^{N/2-1} \tilde{b}(n) \cos n\omega$
奇对称	奇数	$\sin(\omega)$	$\sum_{n=0}^{(N-3)/2} \tilde{c}(n) \cos n\omega$
奇对称	偶数	$\sin(\frac{\omega}{2})$	$\sum_{n=0}^{N/2-1} \tilde{d}(n) \cos n\omega$

6.4 FIR滤波器的等波纹逼近

设计目标

使加权逼近误差函数为等波纹，Chebyshev逼近

$$\begin{aligned} E(\omega) &= W(\omega)[H_d(\omega) - H(\omega)] \\ &= \hat{W}(\omega)[\hat{H}_d(\omega) - P(\omega)] \end{aligned}$$

这里， $\hat{W}(\omega) = W(\omega) \cdot Q(\omega)$ ， $\hat{H}_d(\omega) = H_d(\omega)/Q(\omega)$

选择一组系数 $\{\tilde{a}(n)\}$ 使

$$\|E(\omega)\| = \min_{\omega \in A} \left\{ \max |E(\omega)| \right\}$$

6.4 FIR滤波器的等波纹逼近

解的存在性：交替定理

$P(\omega)$ 是 $\hat{H}_d(\omega)$ 的Chebyshev逼近的充要条件：
 $E(\omega)$ 在 $\omega \in A$ 中，至少有 $r+1$ 的极值点
 $\{\omega_i, i=1, 2, \dots, r+1\}$ ，使

$$E(\omega_i) = -E(\omega_{i+1}) \quad i = 1, 2, \dots, r$$

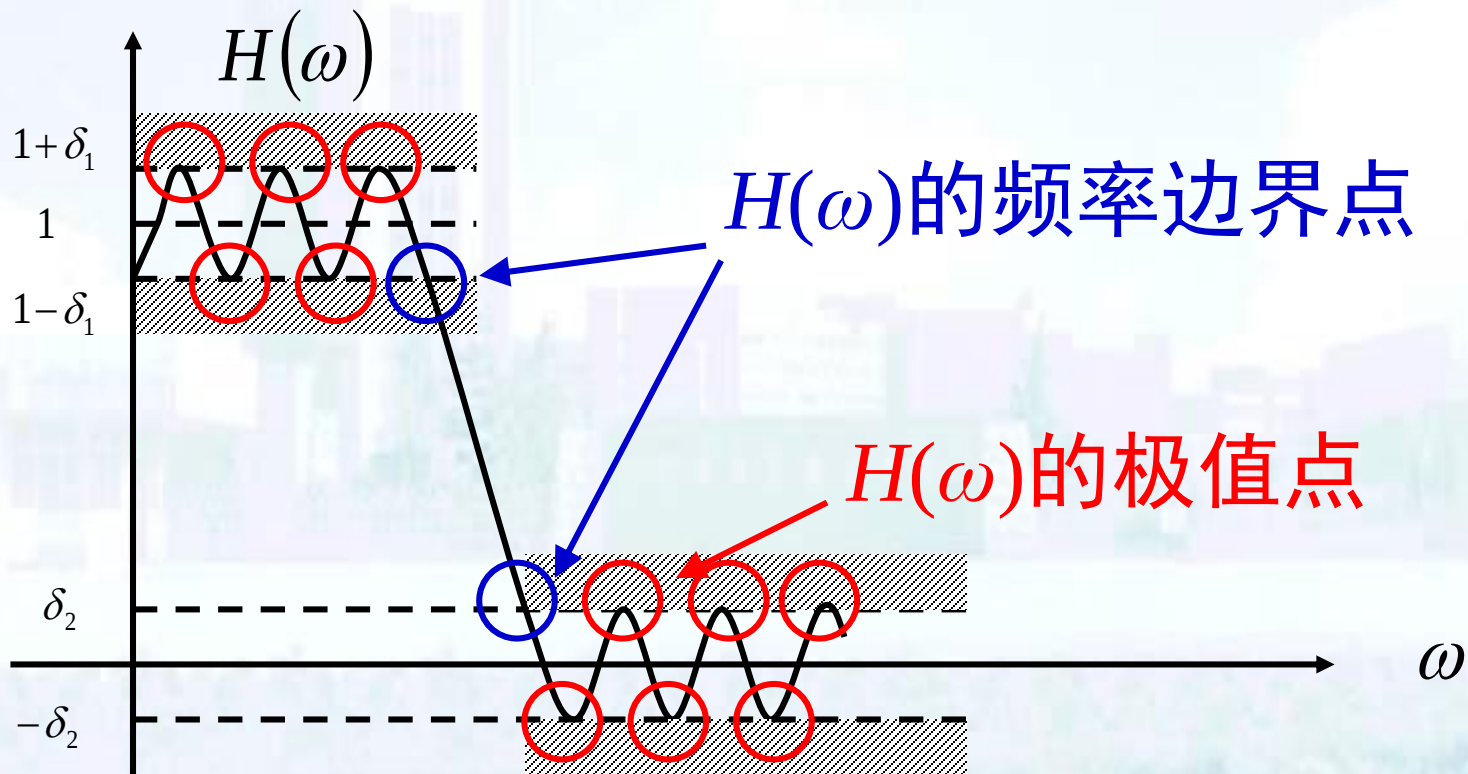
$$|E(\omega_i)| = \max_{\omega \in A} |E(\omega)|$$

r 是用于逼近的余弦谐波函数的个数

6.4 FIR滤波器的等波纹逼近

$E(\omega)$ 的极值由两部分组成:

- $H(\omega)$ 的极值点
- $E(\omega)$ 独有的极值点, $H(\omega)$ 的频率边界点



6.4 FIR滤波器的等波纹逼近

极值点分析：4种线性相位 FIR 滤波器

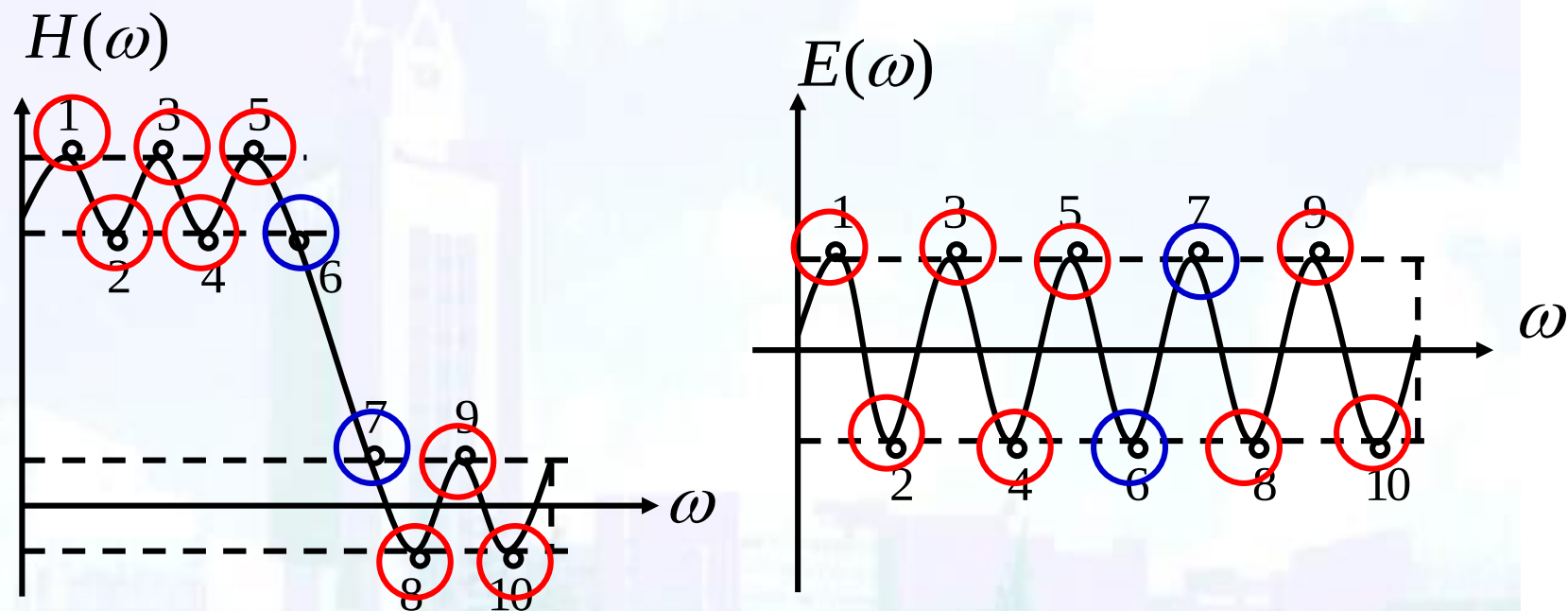
$h(n)$ 对称性	N 奇偶性	$H(\omega)$ 的余弦个数	极点数 N_e
偶对称	奇数	$\frac{N+1}{2}$	$\leq \frac{N+1}{2}$
偶对称	偶数	$\frac{N}{2}$	$\leq \frac{N}{2}$
奇对称	奇数	$\frac{N-1}{2}$	$\leq \frac{N-1}{2}$
奇对称	偶数	$\frac{N}{2}$	$\leq \frac{N}{2}$

6.4 FIR滤波器的等波纹逼近

结论：

- 若 $H(\omega)$ 是由 r 个余弦函数组成，则最多提供 r 个极点
- 交替定理要求 r 个余弦函数和至少有 $r+1$ 个极点
- r 个可能极点由 $H(\omega)$ 提供，其余极点由 $E(\omega)$ 提供
- 幅度值每变换一次，在边界上能提供 2 个极值点
- 特别地， $E(\omega)$ 取满它所有可能有的极点数目时：最多波纹滤波器（超波纹滤波器）设计

6.4 FIR滤波器的等波纹逼近



带通误差函数 $E(\omega)$ 提供 4 个边界极点

二、最多波纹滤波器设计

以低通滤波器为例

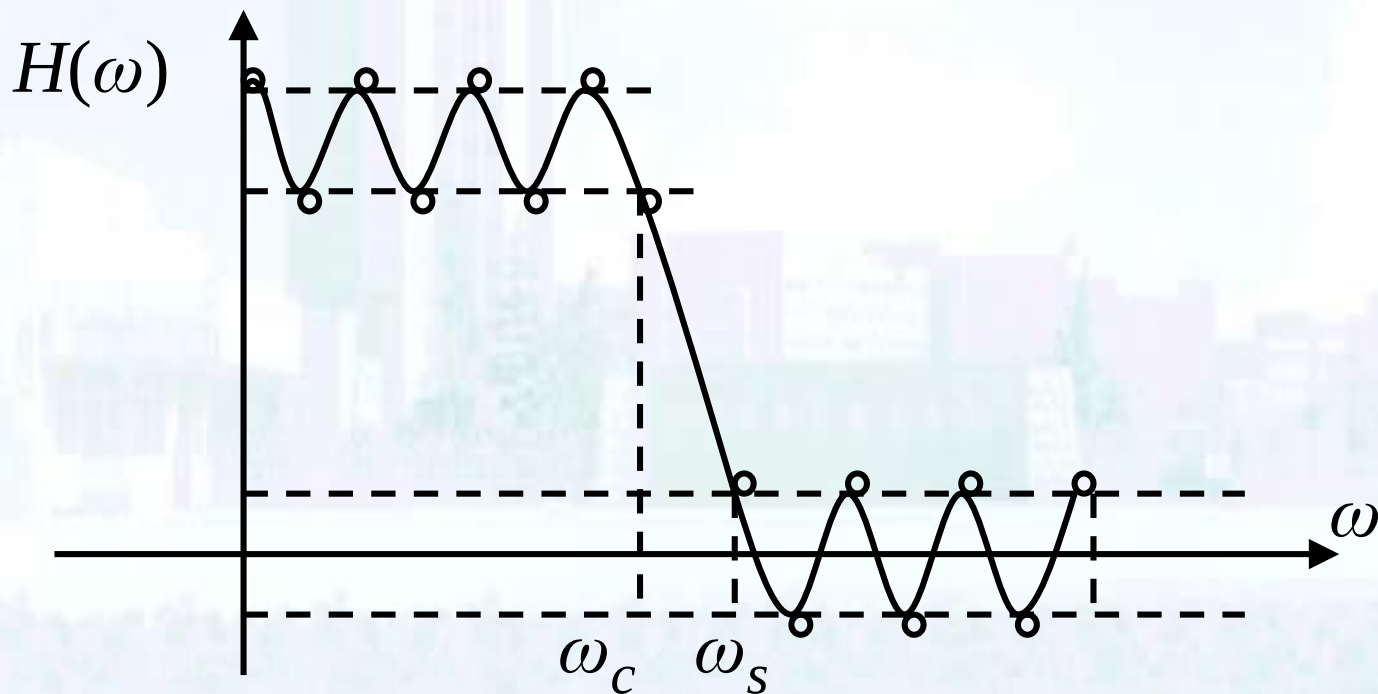
- 系统阶数 N
- 通带起伏 δ_1
- 止带起伏 δ_2
- 通带截止频率 ω_c
- 止带起始频率 ω_s

截止频率 ω_c ，止带起始频率 ω_s
不易精确实现

6.4 FIR滤波器的等波纹逼近

$h(n)$ 偶对称, N 奇数

最多波纹设计, 误差函数 $E(\omega)$ 有 $\frac{N+1}{2} + 2$ 个极值
其中 $H(\omega)$ 取满 $\frac{N+1}{2}$ 个极值



6.4 FIR滤波器的等波纹逼近

极值点分配

通带 $\omega_1 = 0, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_l = \omega_c$

止带 $\omega_{l+1} = \omega_s, \omega_{l+2}, \dots, \omega_{\frac{N+5}{2}} = \pi$

截止频率 ω_c 的与止带频率 ω_s 的顺序位置：

$$l = \left\lceil \frac{\omega_c}{\pi} \cdot \frac{N+5}{2} \right\rceil$$

6.4 FIR滤波器的等波纹逼近

逼近方程 $\left(\frac{N+1}{2} + 2 \right) \uparrow$

通带

$$\begin{cases} \sum \tilde{a}(n) = 1 + \delta_1 \\ \sum \tilde{a}(n) \cos \omega_2 n = 1 - \delta_1 \\ \vdots \\ \sum \tilde{a}(n) \cos \omega_l n = 1 - \delta_1 \end{cases}$$

止带

$$\begin{cases} \sum \tilde{a}(n) \cos \omega_{l+1} n = \delta_2 \\ \sum \tilde{a}(n) \cos \omega_{l+2} n = -\delta_2 \\ \vdots \\ \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} (-1)^n \tilde{a}(n) = \delta_2 \end{cases}$$

6.4 FIR滤波器的等波纹逼近

(1) $\omega_1 = 0$, $\omega_{\frac{N+5}{2}} = \pi$

(2) ω_c , ω_s 不是 $H(\omega)$ 的极值点;

(3) 其余 $\frac{N+1}{2} - 2$ 个极值点方程:

6.4 FIR滤波器的等波纹逼近

通带

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{d\omega} \sum \tilde{a}(n) \cos \omega n \Big|_{\omega_2} = 0 \\ \vdots \\ \frac{d}{d\omega} \sum \tilde{a}(n) \cos \omega n \Big|_{\omega_{l-1}} = 0 \end{array} \right.$$

止带

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{d\omega} \sum \tilde{a}(n) \cos \omega n \Big|_{\omega_{l+2}} = 0 \\ \vdots \\ \frac{d}{d\omega} \sum \tilde{a}(n) \cos \omega n \Big|_{\omega_{\frac{N+3}{2}}} = 0 \end{array} \right.$$

$N+1$ 个未知数, $\hat{a}(0), \dots, \hat{a}(\frac{N-1}{2}), \omega_2, \dots, \omega_{\frac{N+3}{2}}$

$N+1$ 个非线性方程

解法1, 用数值迭代法, 求解非线性方程组, 解出 $\{\tilde{a}(n)\}$, 得到最优逼近的滤波器

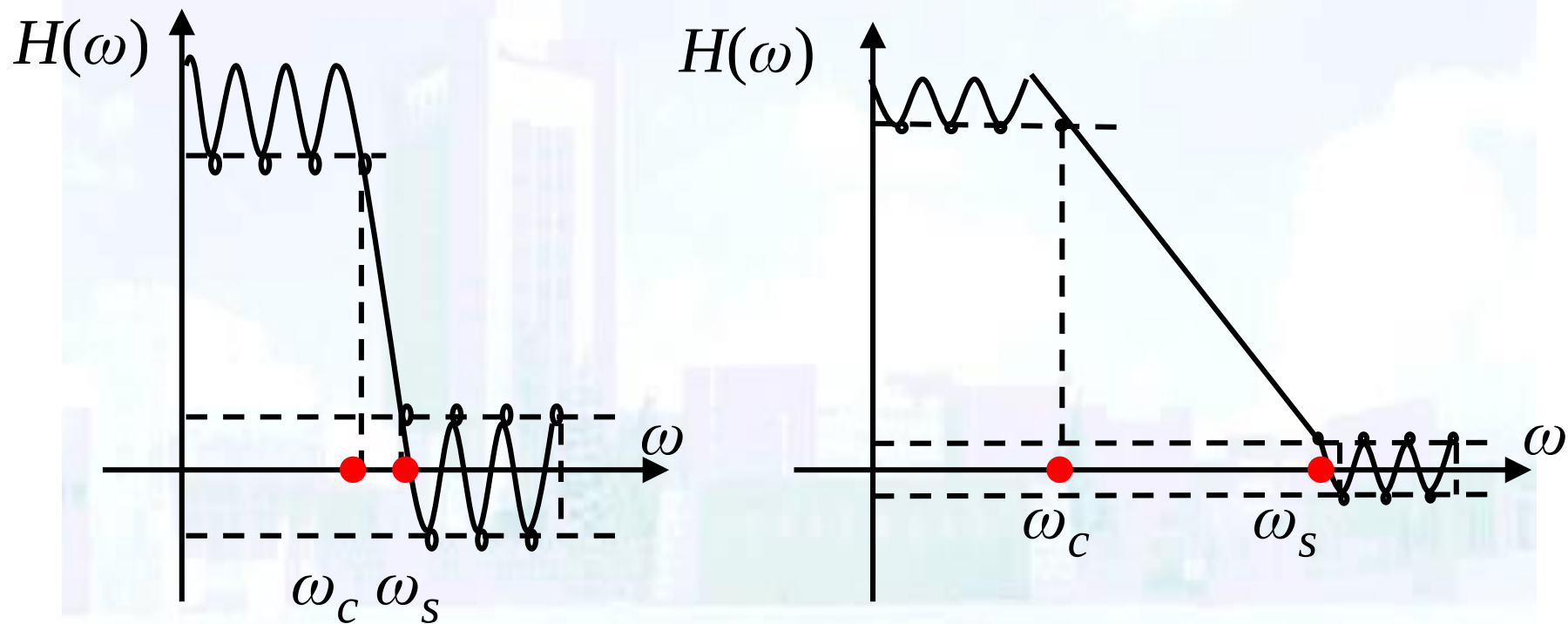
解法2, Lagrange 多项式内插, 避免非线性方程求解, 用 Lagrange 多项式逼近 $H(\omega)$, 求各极值点, 解出 $\{\tilde{a}(n)\}$

6.4 FIR滤波器的等波纹逼近

最多波纹法优化的意义：

- 指标 N , δ_1 和 δ_2 按要求实现
- 调整 ω_c 与 ω_s 的位置，过渡带宽优化，最窄 —— ω_c 与 ω_s 不要求精确实现

6.4 FIR滤波器的等波纹逼近



6.4 FIR滤波器的等波纹逼近

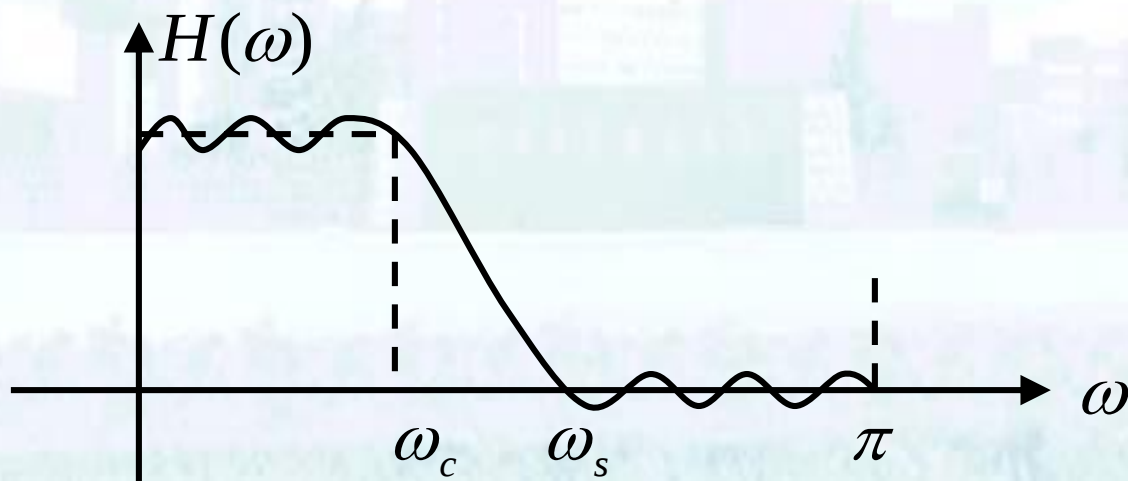
三、Remez交换算法

设计条件：滤波器阶数 N ，边界频率 ω_c ， ω_s ，
频带权重 $W(\omega)$

原理：通带、止带等波纹逼近

目标：以多项式近似

确定极值频率点 $\Rightarrow$ 系统函数



6.4 FIR滤波器的等波纹逼近

误差方程

$$E(\omega) = W(\omega)[H_d(\omega) - H(\omega)]$$

$$= \hat{W}(\omega)[\hat{H}_d(\omega) - P(\omega)]$$

$$W(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{K} & 0 \leq \omega \leq \omega_c \\ 1 & \omega_s \leq \omega \leq \pi \end{cases}$$

在极值点上的误差

$$E(\omega_k) = \hat{W}(\omega_k)[\hat{H}_d(\omega_k) - P(\omega_k)] = (-1)^k \delta$$

$$k=0, 1, \dots, r$$

极值点数 r 由滤波器阶数 N 决定

6.4 FIR滤波器的等波纹逼近

算法过程：

① 极值频率点初值：均匀分布

通带 $\{\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_l\}$ $\omega_l = \omega_c$

止带 $\{\omega_{l+1}, \omega_{l+2}, \dots, \omega_r\}$ $\omega_{l+1} = \omega_s$

$$l = \left[\frac{\omega_c}{\pi - \omega_s + \omega_c} (r + 1) \right]$$

6.4 FIR滤波器的等波纹逼近

②形成关于 $P(\omega)$ 的多项式内插公式和逼近误差 δ

$$P(\omega) = \frac{\sum_{k=0}^r \left(\frac{d_k}{\cos \omega - \cos \omega_k} \right) P_k}{\sum_{k=0}^r \frac{d_k}{\cos \omega - \cos \omega_k}}$$

$$d_k = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^r \frac{1}{\cos \omega_k - \cos \omega_i}$$

$$P_k = \hat{H}_d(\omega_k) - \frac{(-1)^k \delta}{\hat{W}(\omega_k)}$$

$$\delta = \frac{\sum_{n=0}^{r-1} d_n \hat{H}_d(\omega_n)}{\sum_{n=0}^{r-1} \frac{(-1)^n d_n}{\hat{W}(\omega_n)}}$$

6.4 FIR滤波器的等波纹逼近

③在密集的频率点上计算误差公式

$$E = \hat{W}(\omega) [\hat{H}_d(\omega) - P(\omega)]$$

其中 $P(\omega)$ 为多项式内插公式

若有频率点 ω_j 使得 $|E(\omega_j)| > \delta$

则选取 ω_j 作为新的极值频率点，返回①

直至极值频率收敛，迭代完成

迭代过程中， $\omega_l = \omega_c$ 与 $\omega_{l+1} = \omega_s$ 保持不变

④ 根据多项式内插公式 $P(\omega)$ 求出 $\{a(n)\}$

a) IDFT; b) 求解线性方程

6.4 FIR滤波器的等波纹逼近

四、算法讨论

- 1) Remez算法处理不要求 $\omega=0, \pi$ 为极值点
不是最多波纹滤波器
- 2) 对给定的 N , ω_c , ω_s 及 $W(\omega)$, 将有一个最小的、不可事先设置的等波纹逼近误差 δ
过渡带 $\omega_s - \omega_c$, 事先确定, 可设置
- 3) 通带与止带间的误差分配由权重 $W(\omega)$ 调节

$$W(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{K} & 0 \leq \omega \leq \omega_c \quad \text{通带波纹 } K\delta \\ 1 & \omega_s \leq \omega \leq \pi \quad \text{止带波纹 } \delta \end{cases}$$

4) 限定条件下的优化

滤波器阶数 N ，带内误差，过渡带

- 最多波纹算法

带内误差与 N 给定，算法选择过渡带，使之最窄

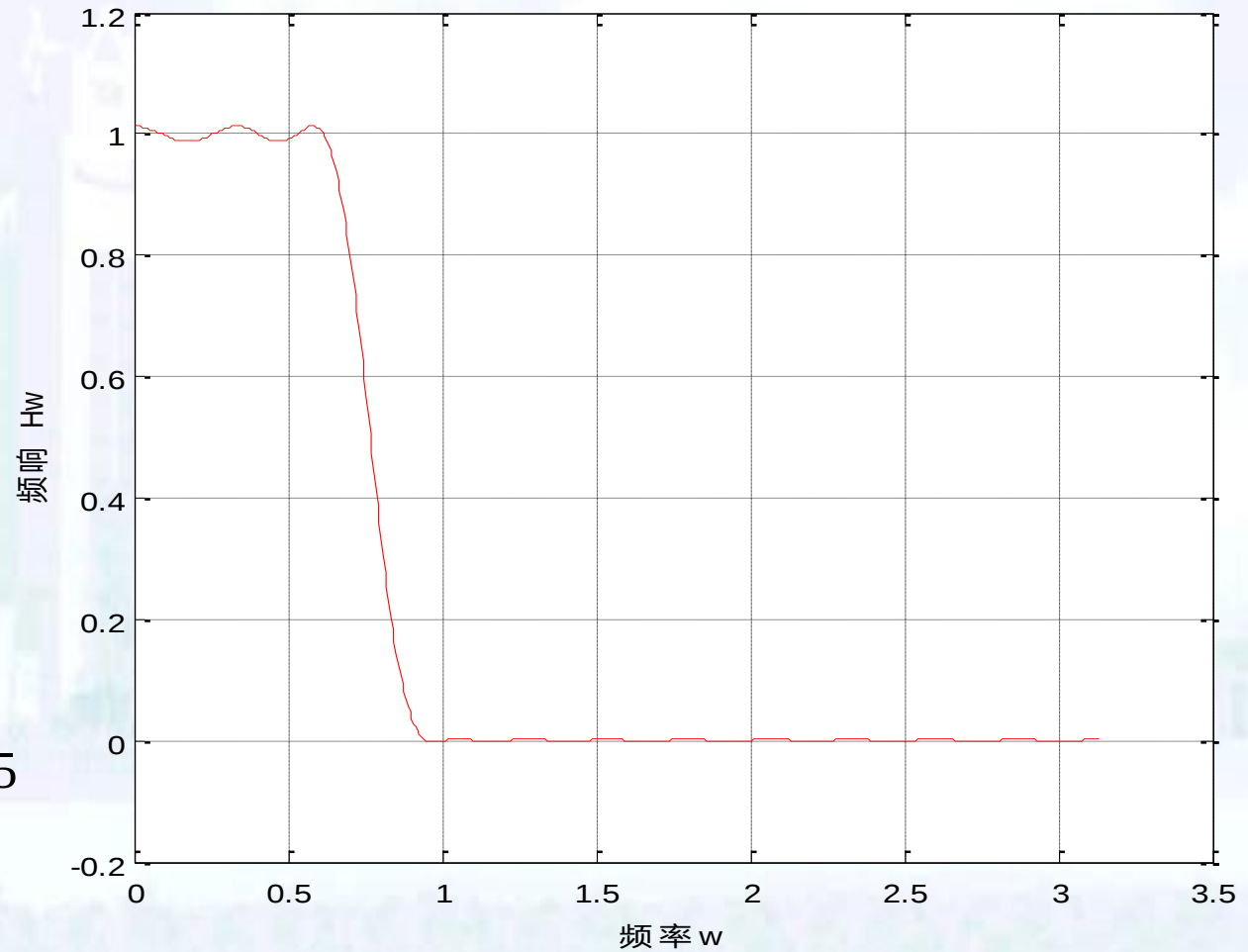
- Remez算法

过渡带与 N 给定，算法选择带内误差，使之最小

- 其他算法

误差与过渡带同时给定， N 最小

傅立叶频谱特性曲线



通带截止频率:

$$\omega_p = 0.2\pi$$

阻带截止频率:

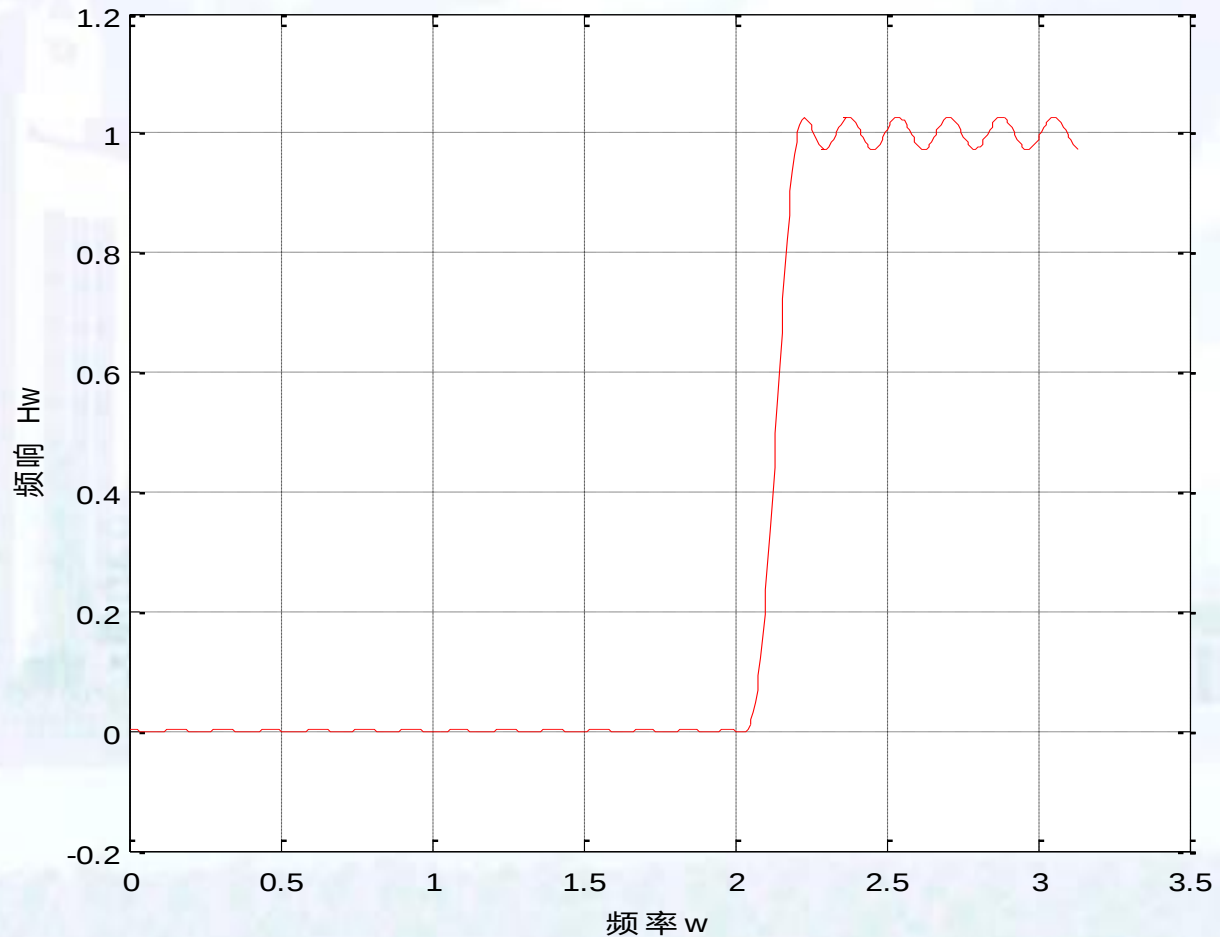
$$\omega_s = 0.3\pi$$

通带衰减: $R_p = 0.25$

阻带衰减: $A_s = 50$

$N = 47$

傅立叶频谱特性曲线



阻带截止频率:

$$\omega_s = 0.65\pi$$

通带截止频率:

$$\omega_p = 0.70\pi$$

阻带衰减: $A_s = 50$

通带衰减: $R_p = 0.50$

$N = 81$

阻带截止频率:

$$\omega_{s1}=0.3\pi$$

$$\omega_{s2}=0.7\pi$$

通带截止频率:

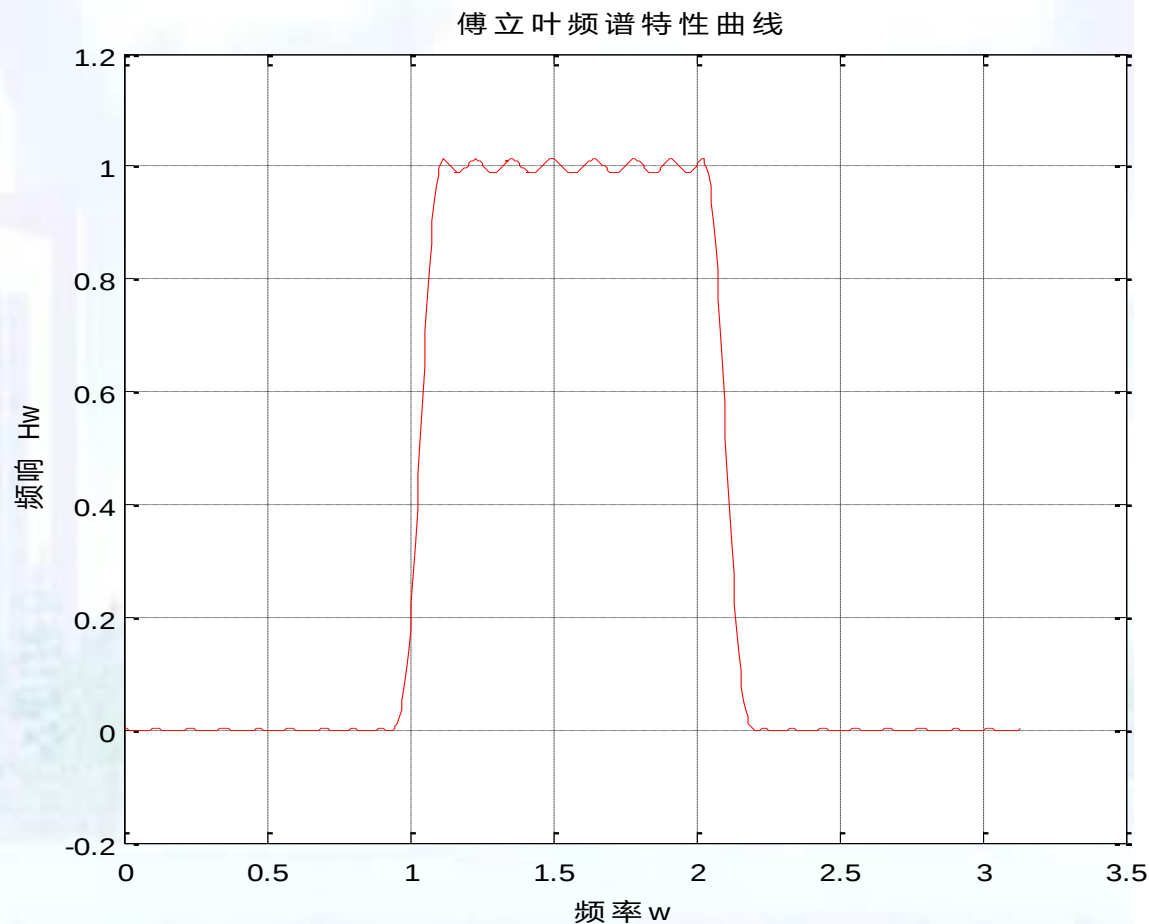
$$\omega_{p1}=0.35\pi$$

$$\omega_{p2}=0.65\pi$$

阻带衰减: $A_s=60$

通带衰减: $R_p=0.25$

$N=105$



通带截止频率:

$$\omega_{p1}=0.25\pi$$

$$\omega_{p2}=0.75\pi$$

阻带截止频率:

$$\omega_{s1}=0.35\pi$$

$$\omega_{s2}=0.65\pi$$

通带衰减: $R_p=0.50$

阻带衰减: $A_s=60$

$N=49$

