

# 2 离散傅立叶变换 (DFT)



## 2.1 傅氏变换的4种形式

## 2.1 傅氏变换的4种形式

### 1) 连续时间周期信号

$x(t)$ 为周期信号，周期为 $T_0$ ，表达为一系列正弦谐波序列的线性组合，

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} X(m\Omega_0) e^{jm\Omega_0 t}$$

这里  $\Omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$  为 $x(t)$ 的基本频率（基频）

## 2.1 傅氏变换的4种形式

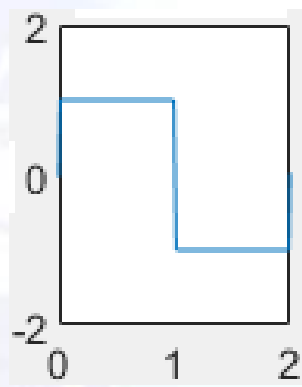
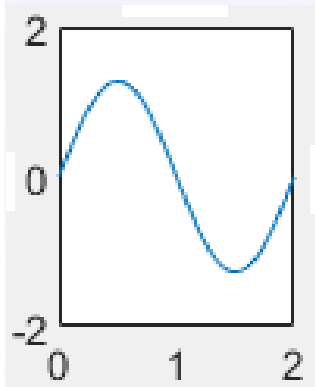
连续时间周期信号的傅氏变换对：

$$\left\{ \begin{array}{l} X(m\Omega_0) = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-jm\Omega_0 t} dt \\ x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} X(m\Omega_0) e^{jm\Omega_0 t} \end{array} \right.$$

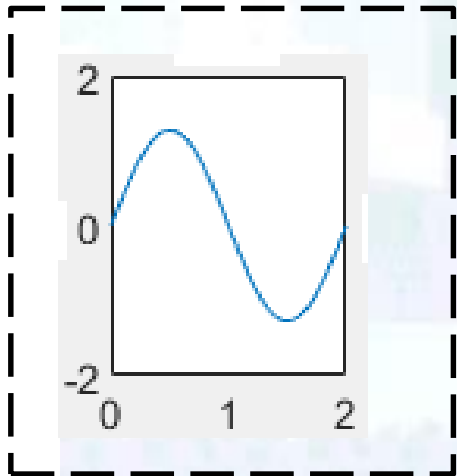
$X(m\Omega_0)$  为  $x(t)$  的频谱强度，谱线

时域连续、周期； 频域离散、非周期

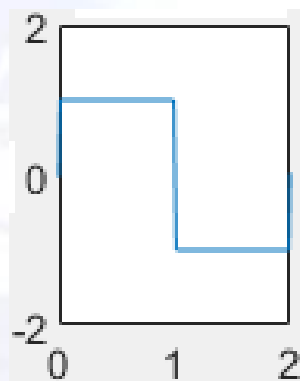
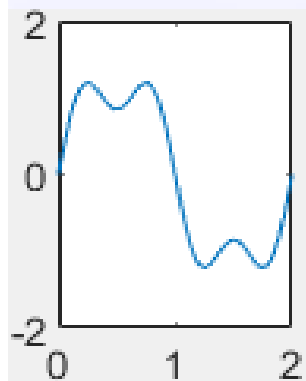
## 2.1 傅氏变换的4种形式



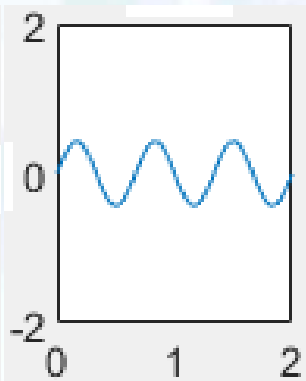
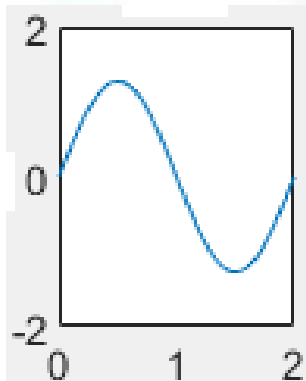
谐波数  $N=1$



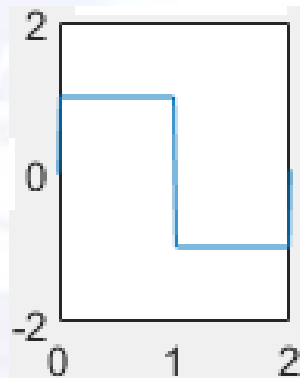
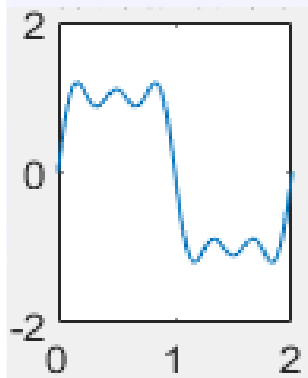
## 2.1 傅氏变换的4种形式



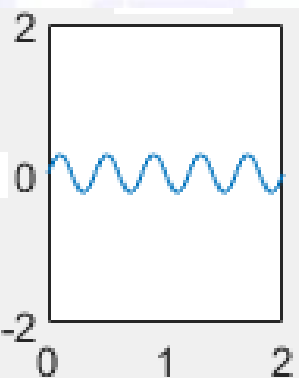
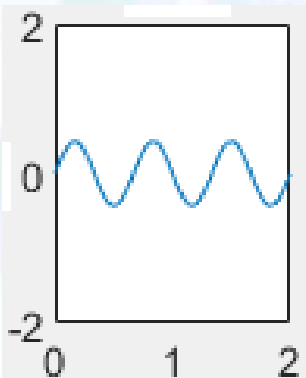
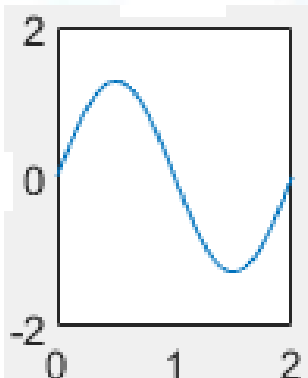
谐波数  $N=2$



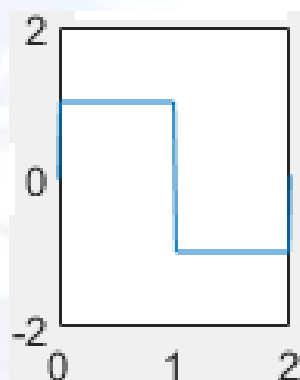
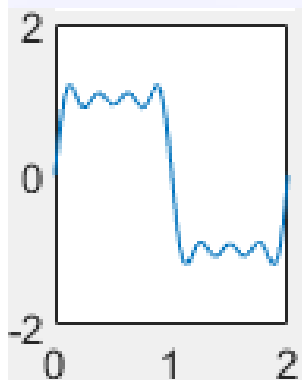
## 2.1 傅氏变换的4种形式



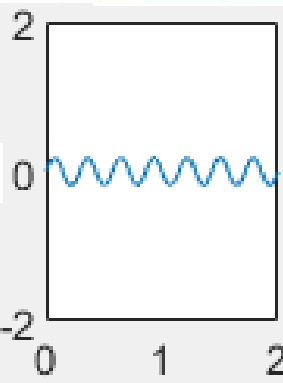
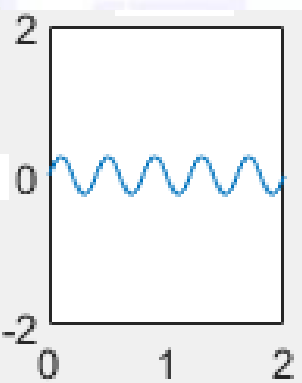
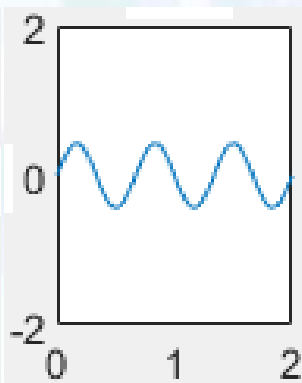
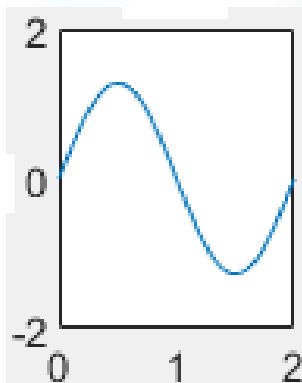
谐波数  $N=3$



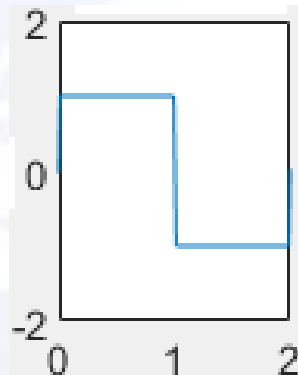
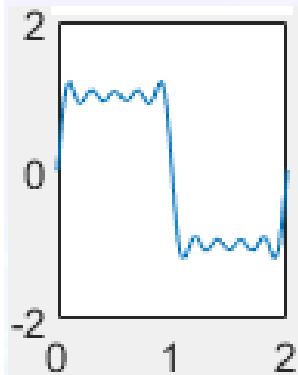
## 2.1 傅氏变换的4种形式



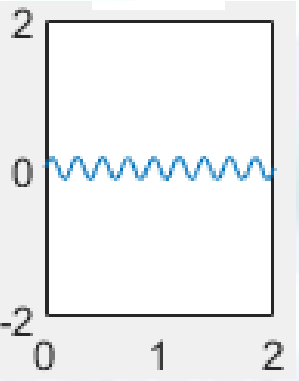
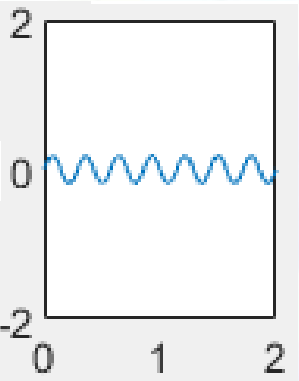
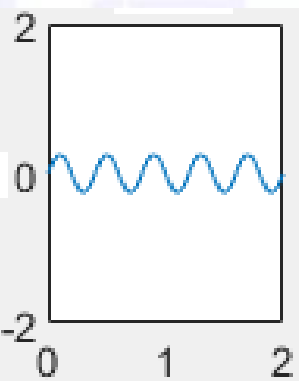
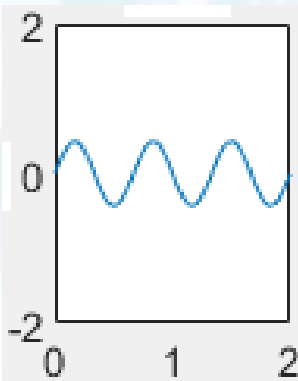
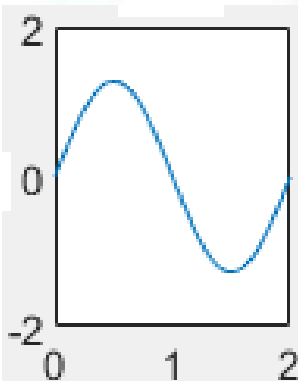
谐波数  $N=4$



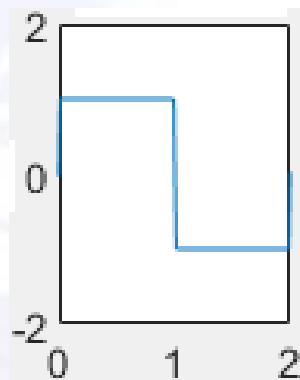
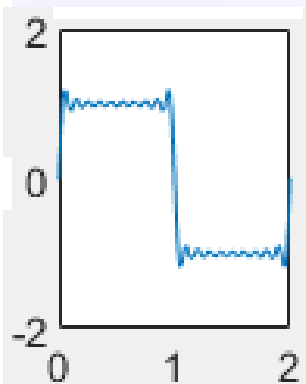
## 2.1 傅氏变换的4种形式



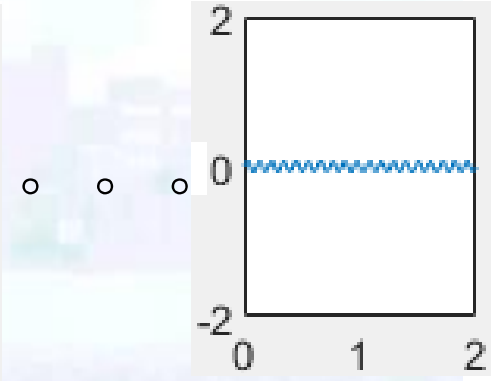
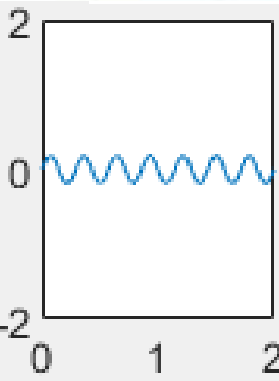
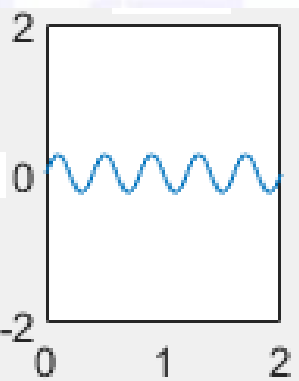
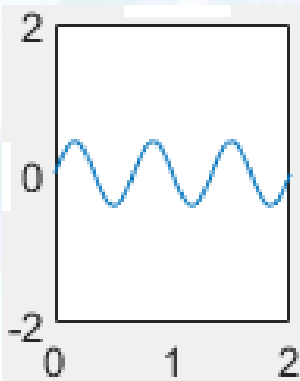
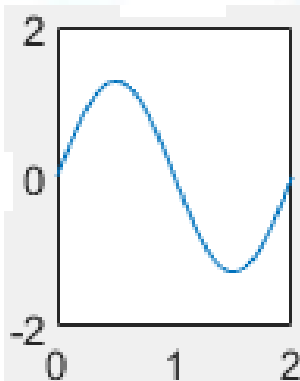
谐波数  $N=5$



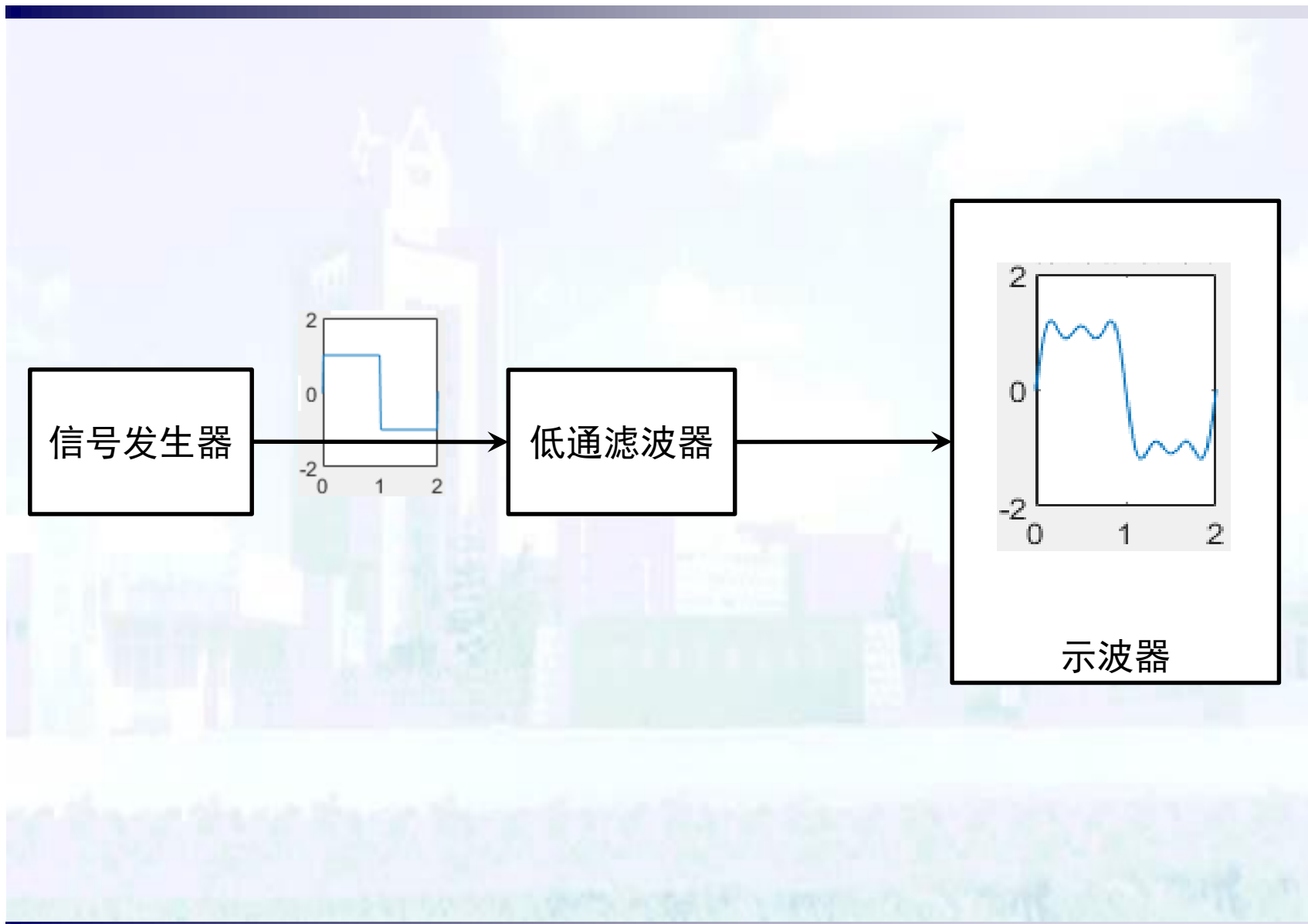
## 2.1 傅氏变换的4种形式



谐波数  $N=10$



## 2.1 傅氏变换的4种形式



## 2.1 傅氏变换的4种形式

### 2) 连续时间非周期信号

$$\left\{ \begin{array}{l} X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt \\ x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega \end{array} \right.$$

$X(j\Omega)$  : 频谱密度函数

时域连续、非周期；频域连续、非周期

## 2.1 傅氏变换的4种形式

### 3) 离散时间非周期信号 (DTFT)

$$\left\{ \begin{array}{l} X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} \\ x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n} d\omega \end{array} \right.$$

对连续信号在时域的取样： $T, \Omega_s = \frac{2\pi}{T}$

$$X(e^{j\Omega T}) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X[j(\Omega - m\Omega_s)]$$

时域离散、非周期；频域连续、周期

## 2.1 傅氏变换的4种形式

### 4) 离散时间周期信号

$$\left\{ \begin{aligned} \tilde{X}(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \\ \tilde{x}(n) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \end{aligned} \right.$$

(1) 因为  $x(n)$  离散,  $X$  为周期的

(2)  $x(n)$  又是周期的,  $X$  必然离散

## 2.1 傅氏变换的4种形式

$$X \text{ 的周期 } \Omega_s = \frac{2\pi}{T}$$

$$X \text{ 离散, 基频 } \Omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{NT}$$

$$1 \text{ 个周期内的谱线数 } M = \frac{\Omega_s}{\Omega_0} = N.$$

时域与频域中的点数均为 $N$

$$\text{用数字域频率表示基频 } \omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$

## 2.1 傅氏变换的4种形式

引入记号  $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$  (指数因子, 旋转因子)

则

$$\left\{ \begin{aligned} \tilde{X}(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) W_N^{nk} \\ \tilde{x}(n) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) W_N^{-kn} \end{aligned} \right.$$

时域离散、周期；频域离散、周期

## 2.1 傅氏变换的4种形式

### 离散傅立叶级数的主要性质

$$\tilde{X}(k) = DFS[\tilde{x}(n)]$$

(1) 线性  $DFS[a\tilde{x}_1(n) + b\tilde{x}_2(n)] = a\tilde{X}_1(k) + b\tilde{X}_2(k)$

(2) 移位, 时域  $DFS[\tilde{x}(n+m)] = W_N^{-mk} \tilde{X}(k)$

频域  $IDFS[\tilde{X}(k+l)] = W_N^{nl} \tilde{x}(n)$

## 2.1 傅氏变换的4种形式

### (3) 周期卷积

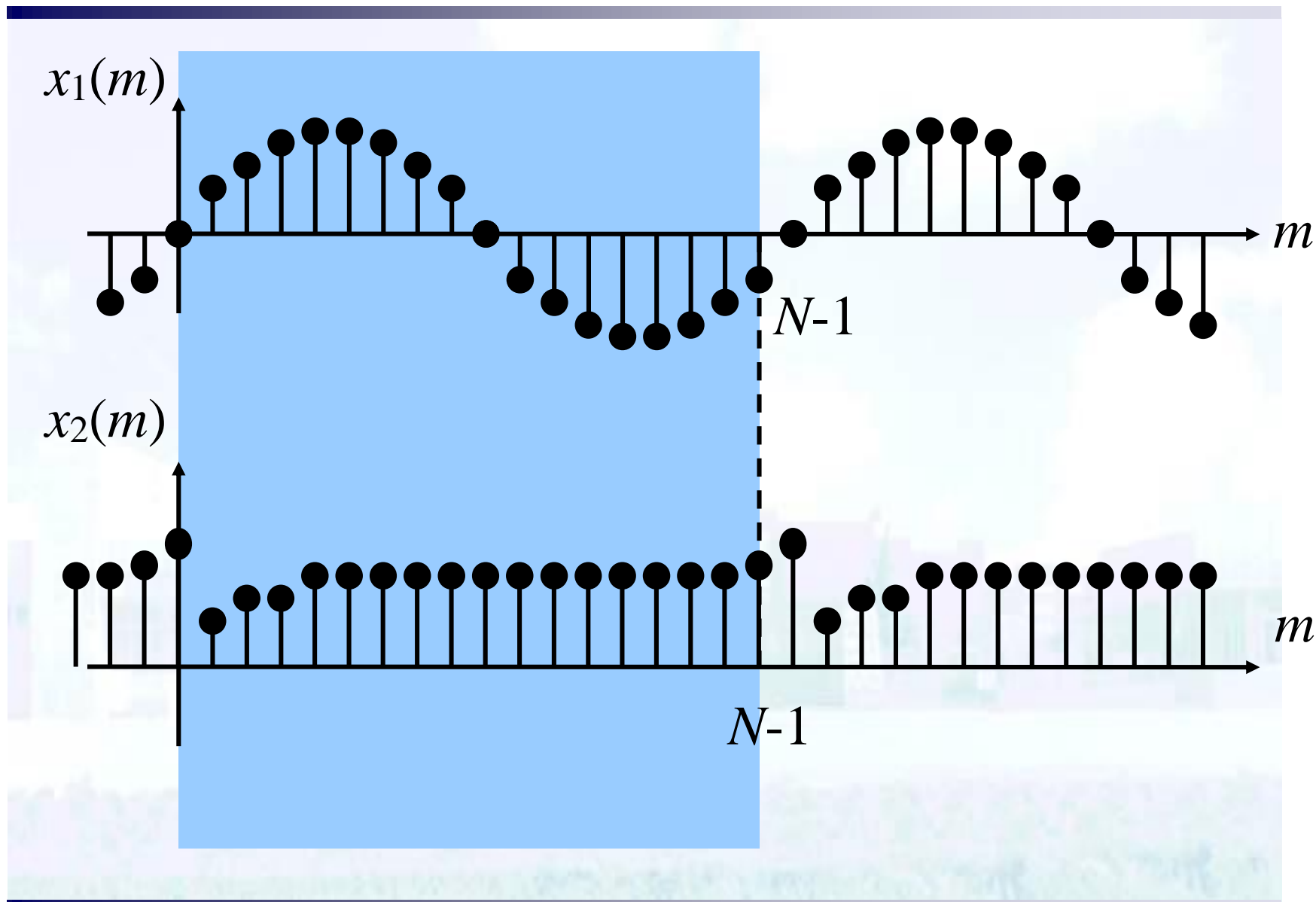
关于周期序列卷积的定义：

$$\tilde{x}(n) = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1(m) \tilde{x}_2(n-m)$$

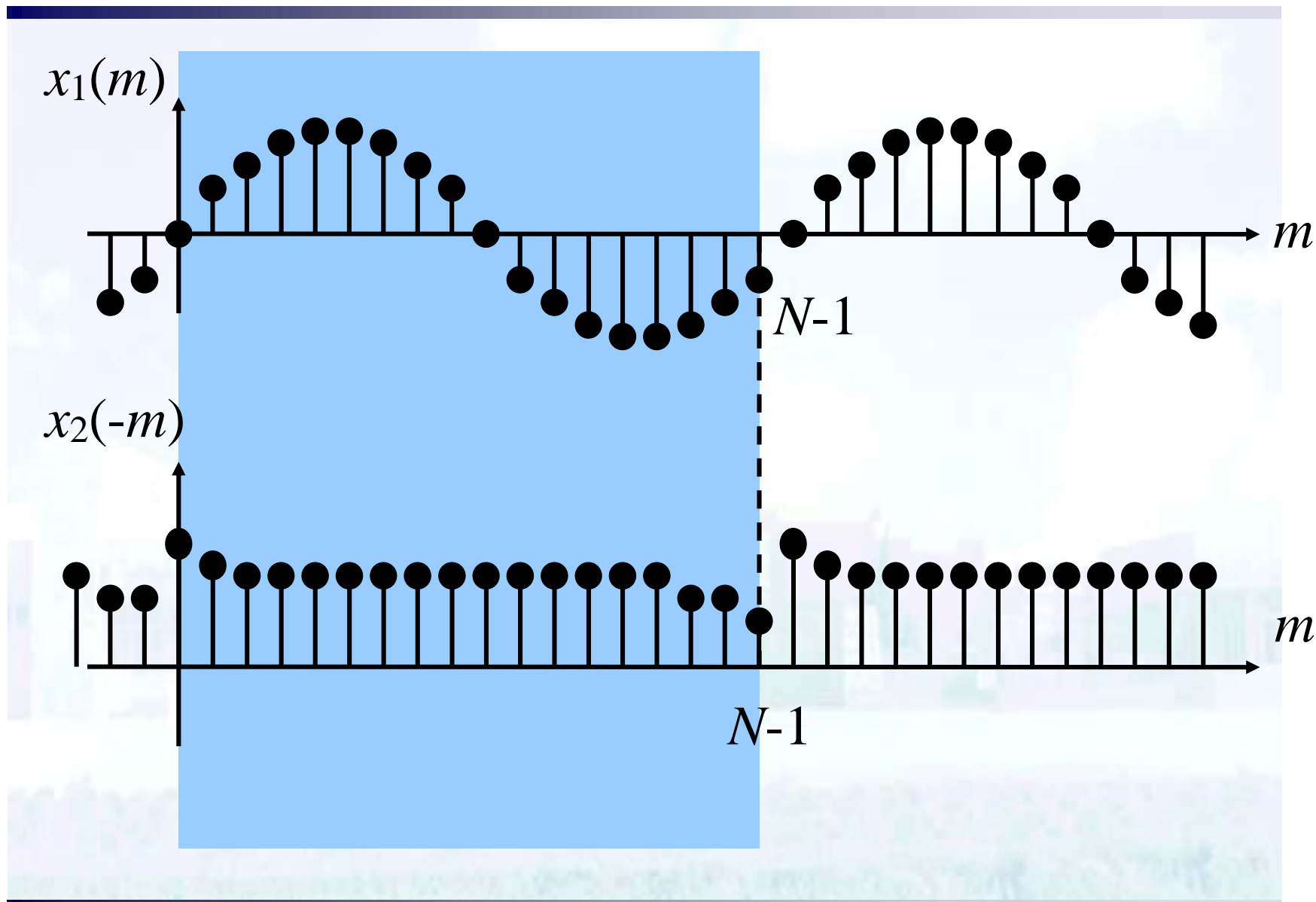
$\tilde{x}_1(n)$ ,  $\tilde{x}_2(n)$  具有相同的周期  $N$

$\tilde{x}(n)$  的周期也为  $N$  ( $N$ 个有效值)

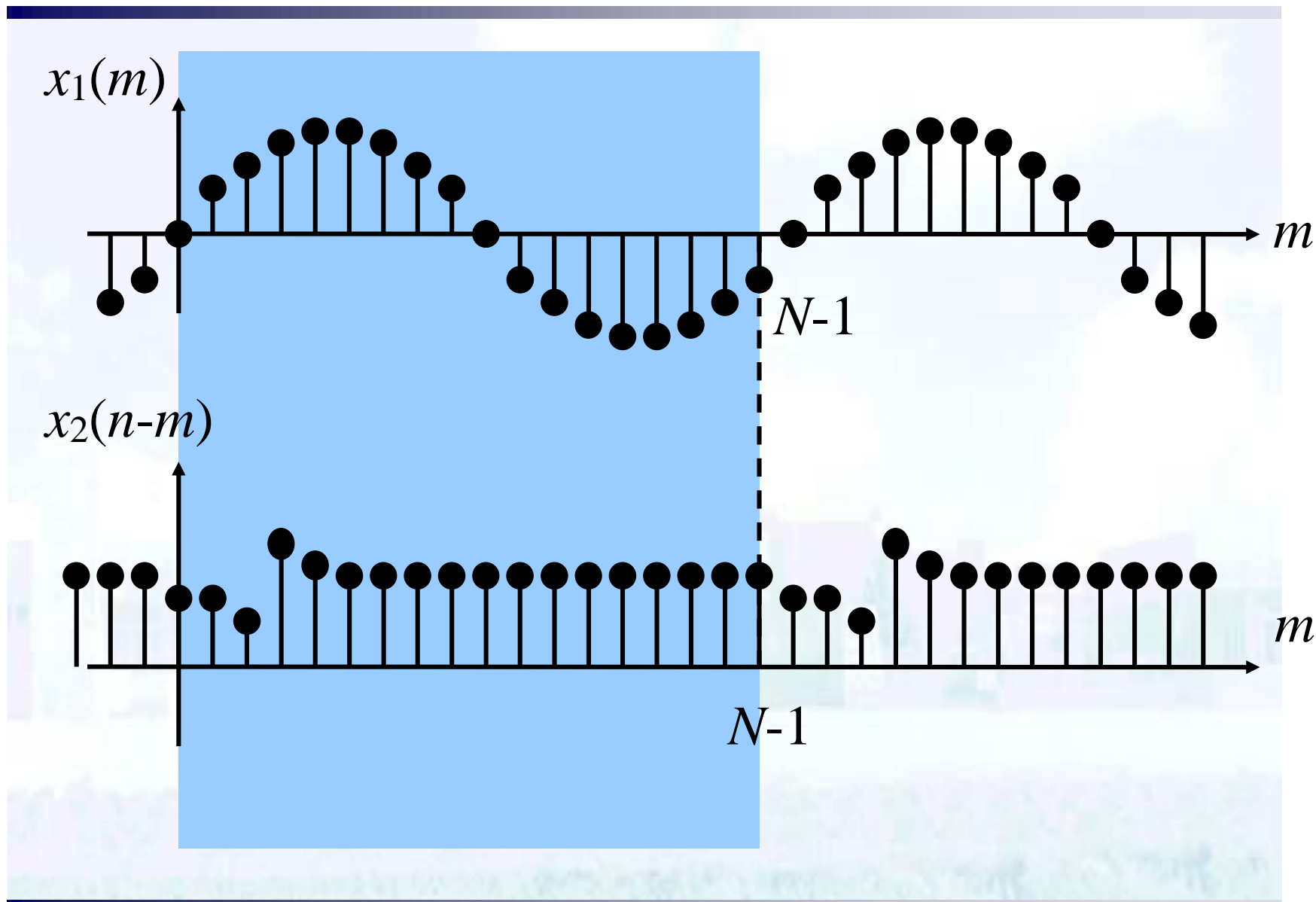
## 2.1 傅氏变换的4种形式



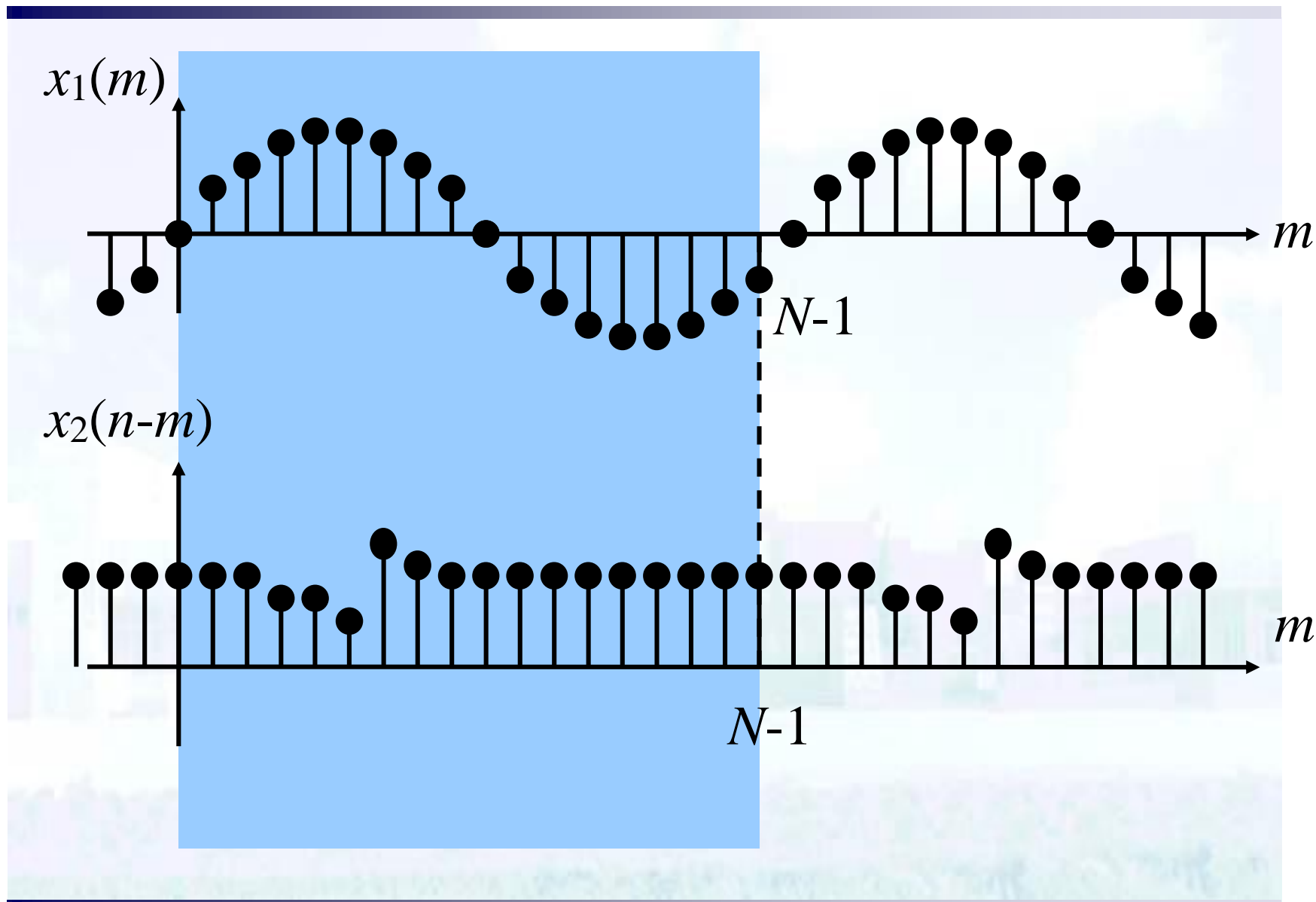
## 2.1 傅氏变换的4种形式



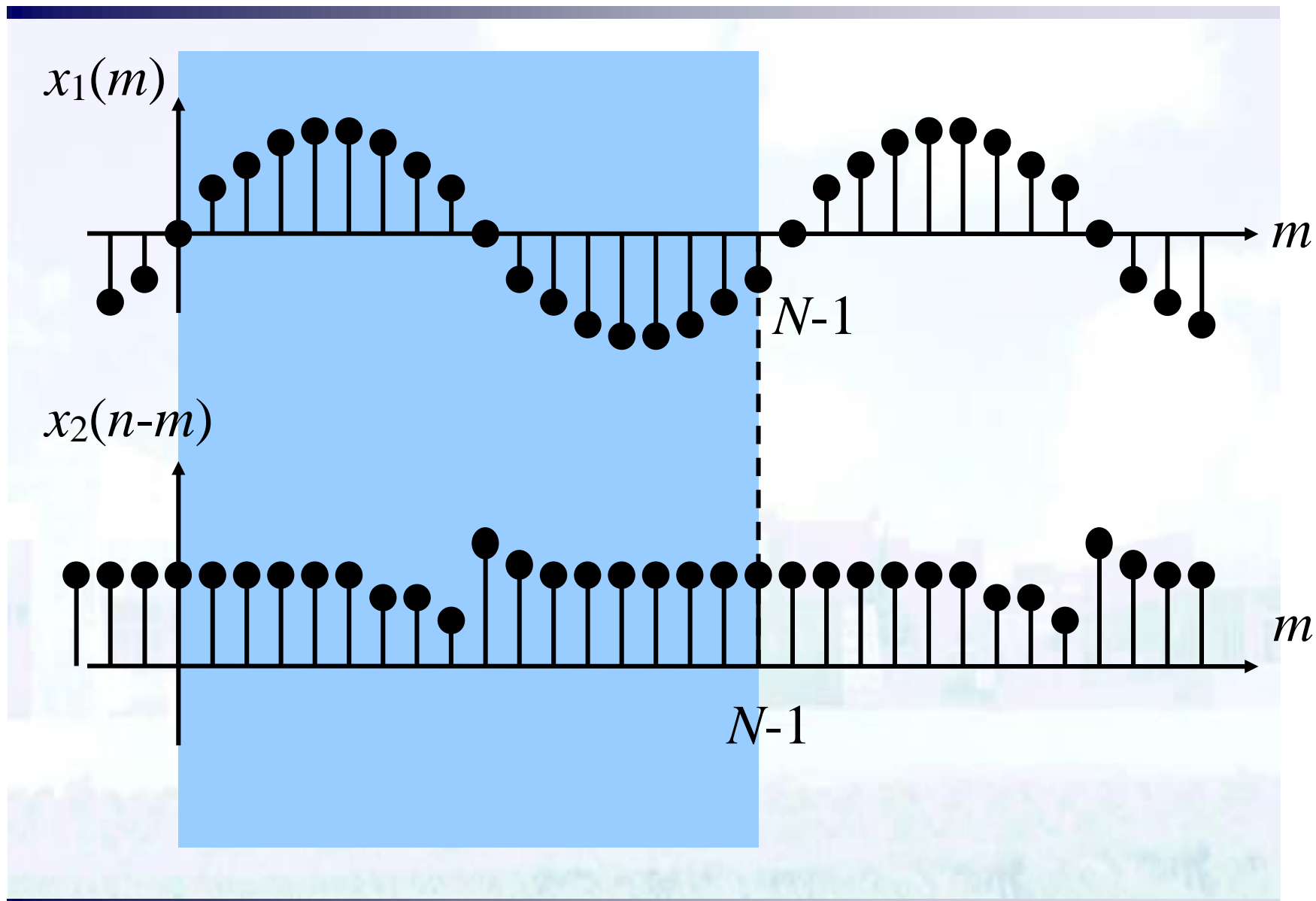
## 2.1 傅氏变换的4种形式



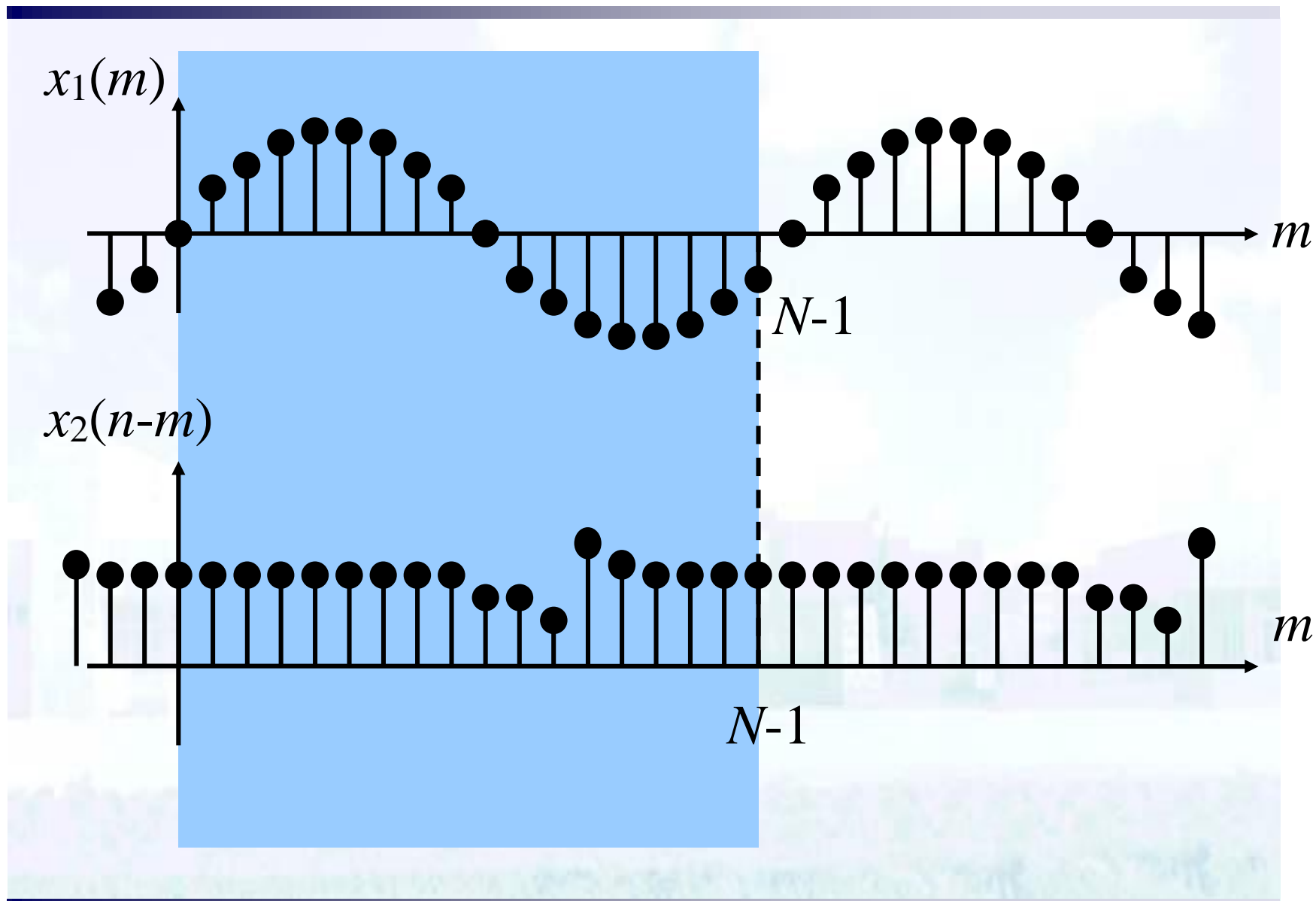
## 2.1 傅氏变换的4种形式



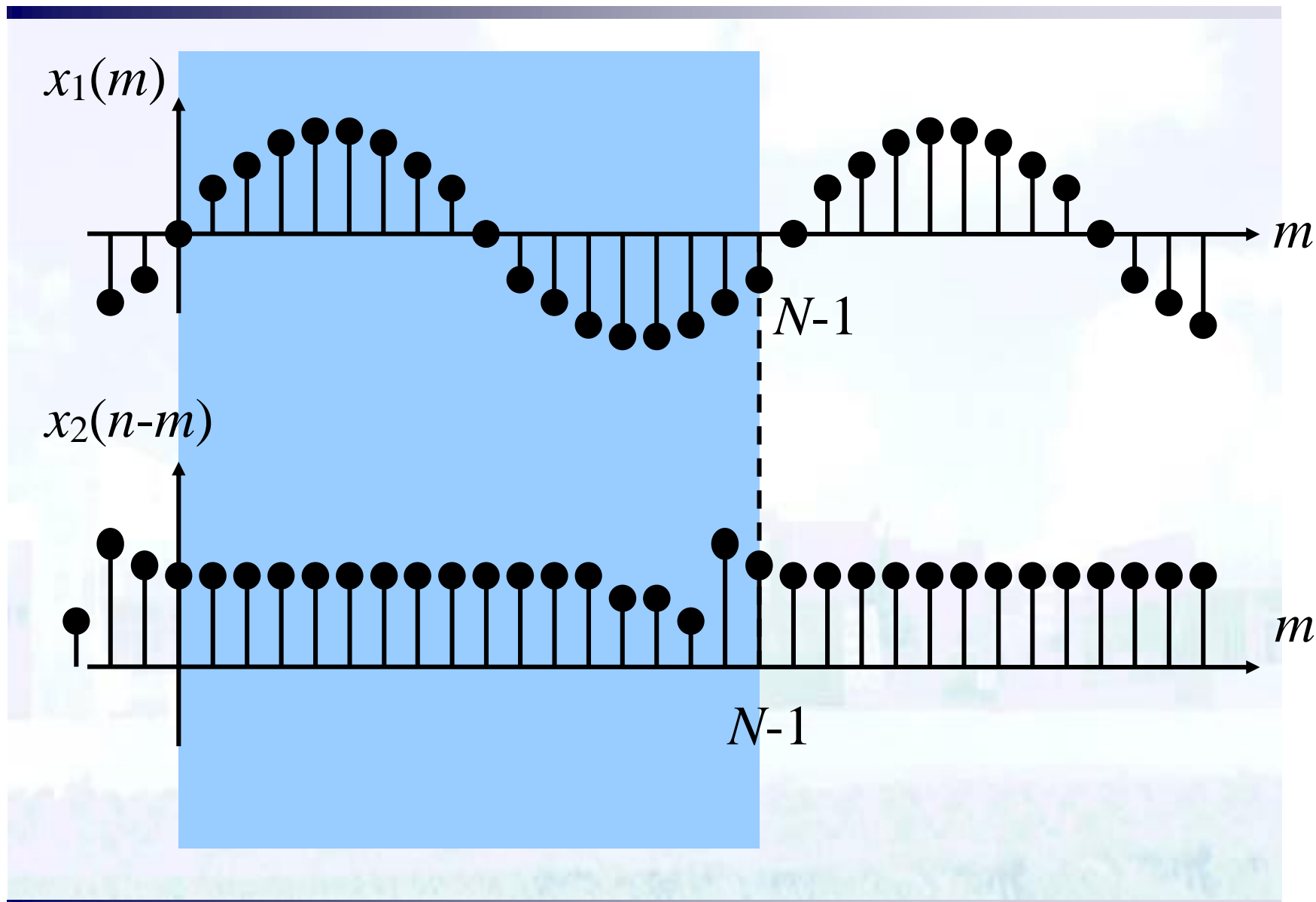
## 2.1 傅氏变换的4种形式



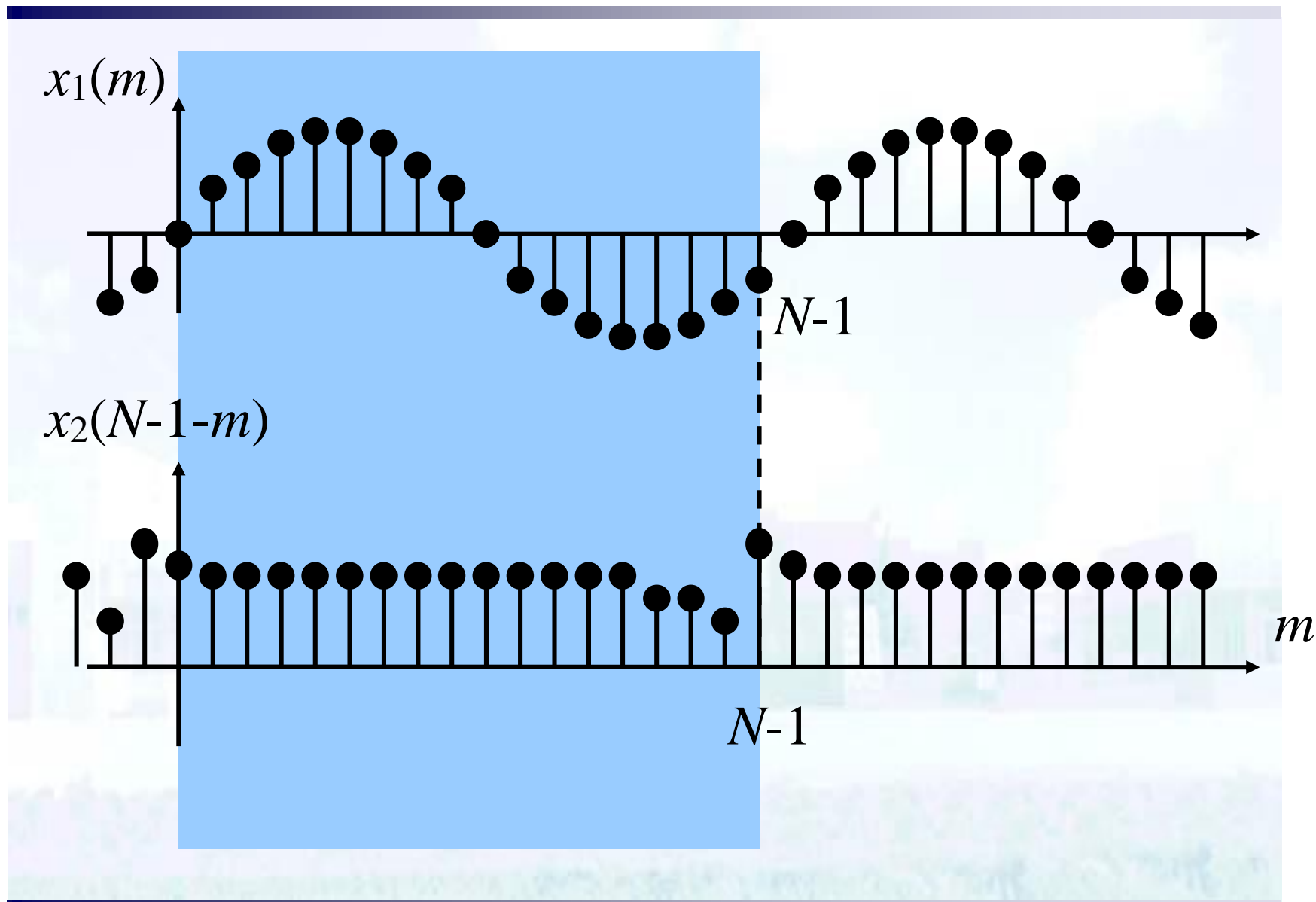
## 2.1 傅氏变换的4种形式



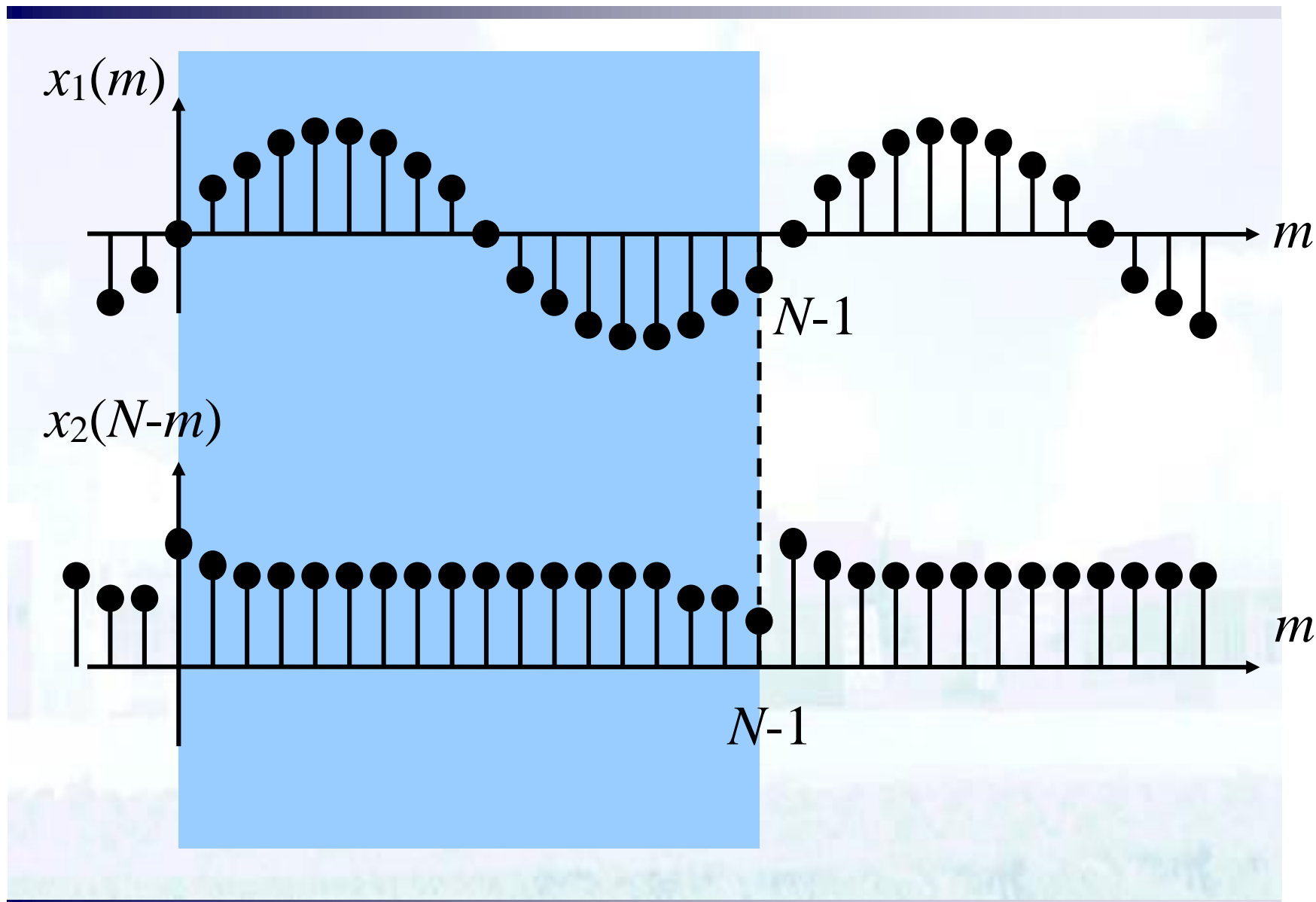
## 2.1 傅氏变换的4种形式



## 2.1 傅氏变换的4种形式



## 2.1 傅氏变换的4种形式



## 2.1 傅氏变换的4种形式

与有限长序列线性卷积区别：

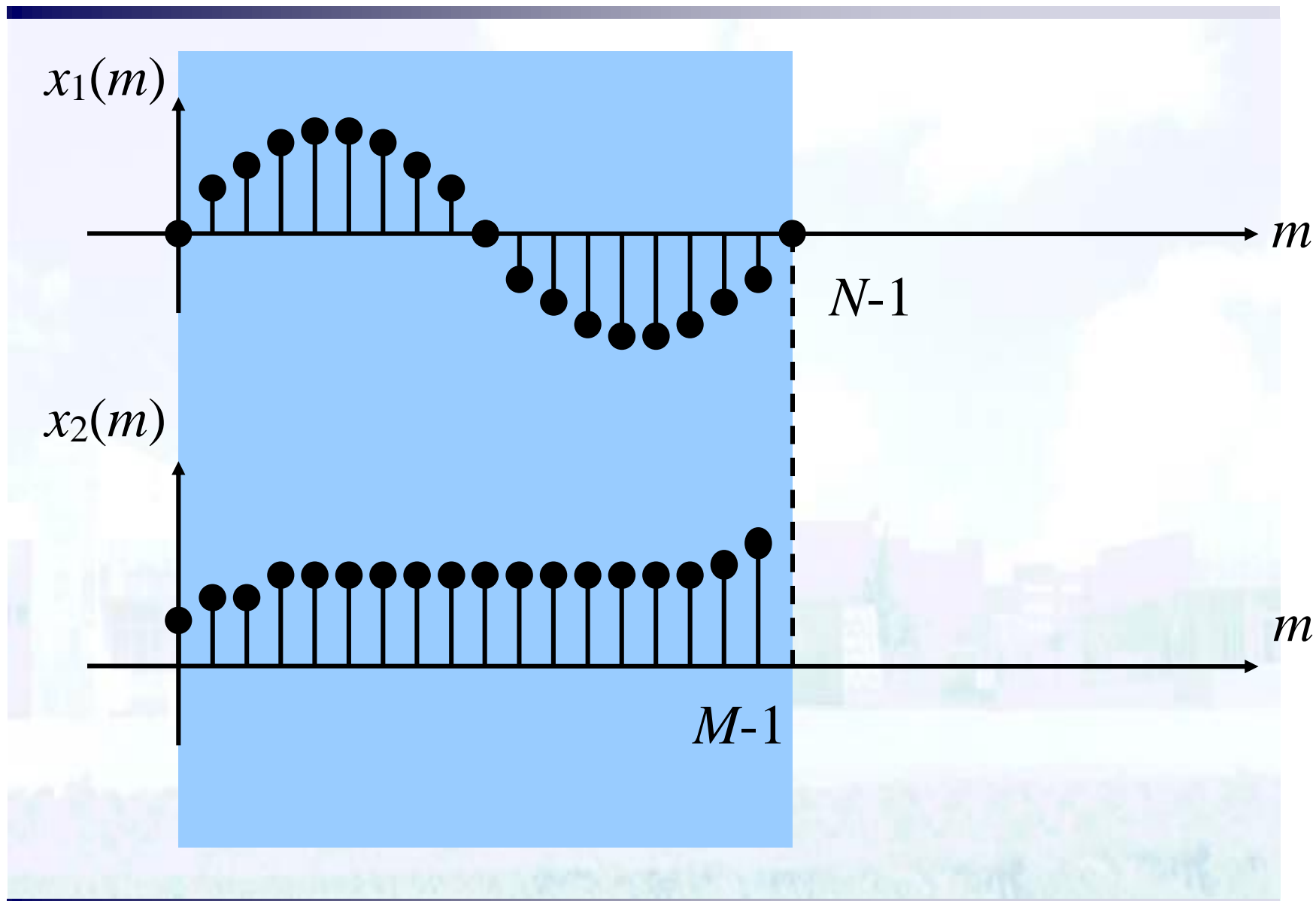
$x_1(n)$  序列长  $N$ ，  $x_2(n)$  序列长  $M$ ，

$$x(n) = \sum_{k=0}^N x_1(k) x_2(n-k)$$

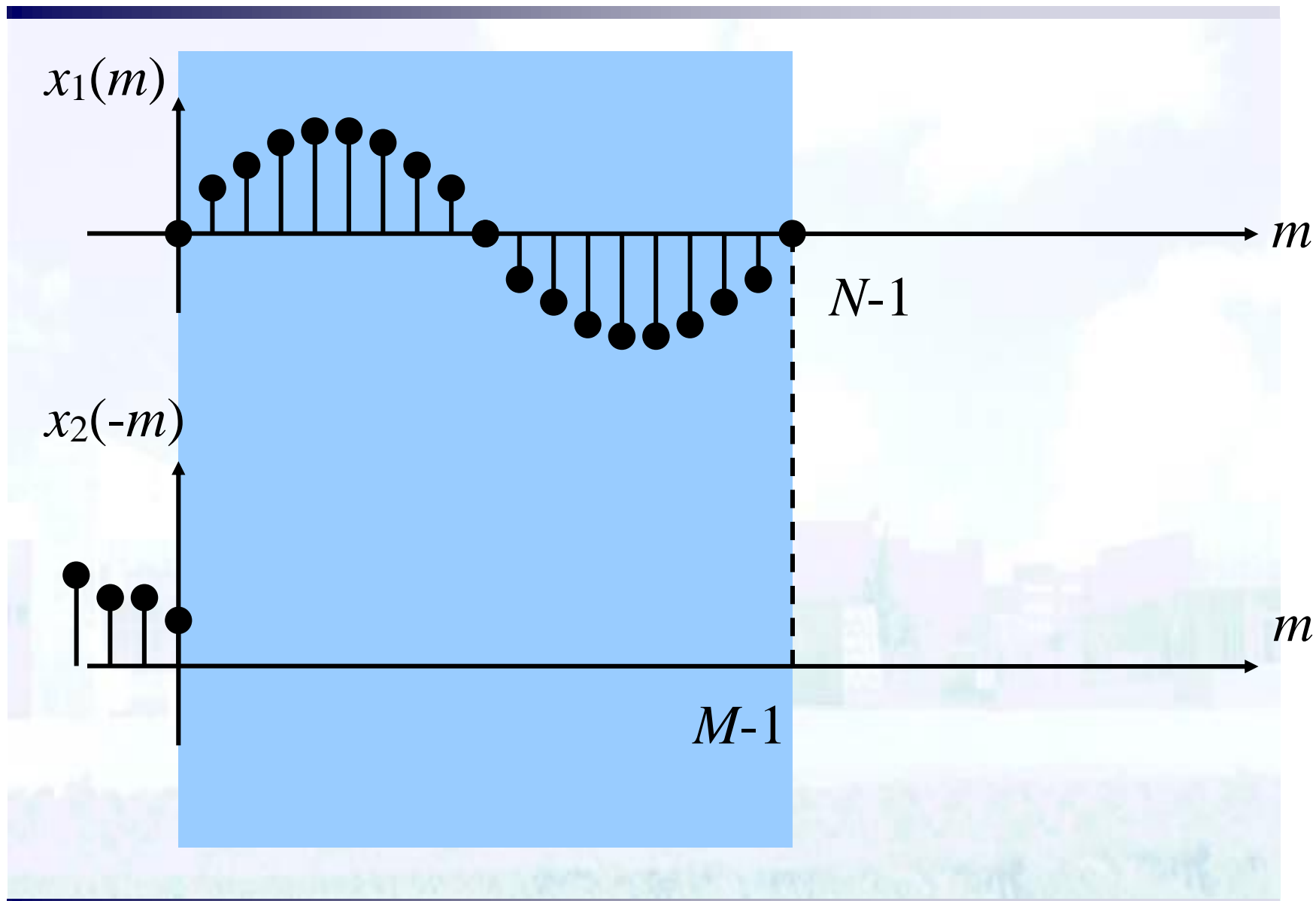
$$n=0, 1, 2, \dots, N+M-2$$

$N+M-1$ 个有效值

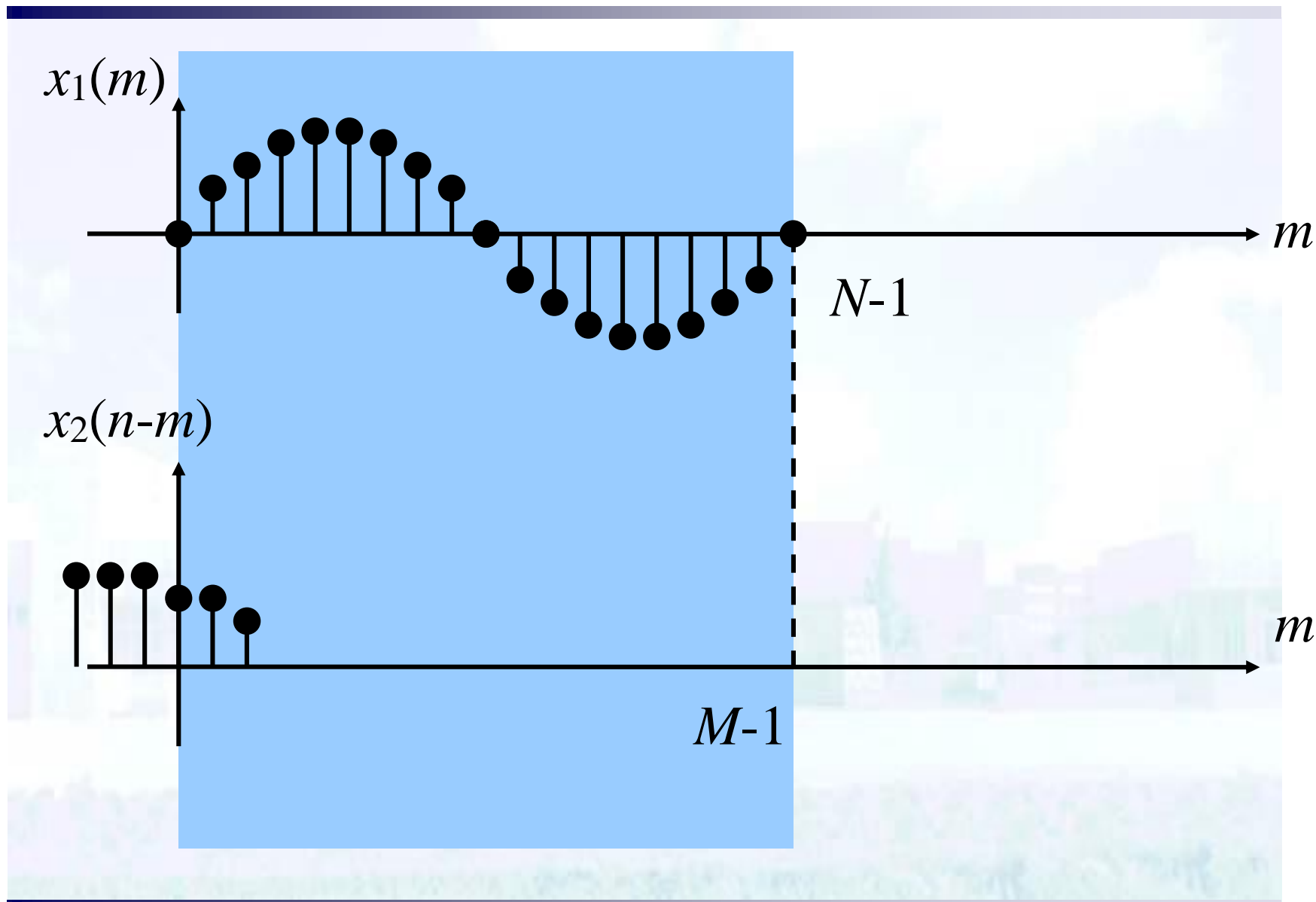
## 2.1 傅氏变换的4种形式



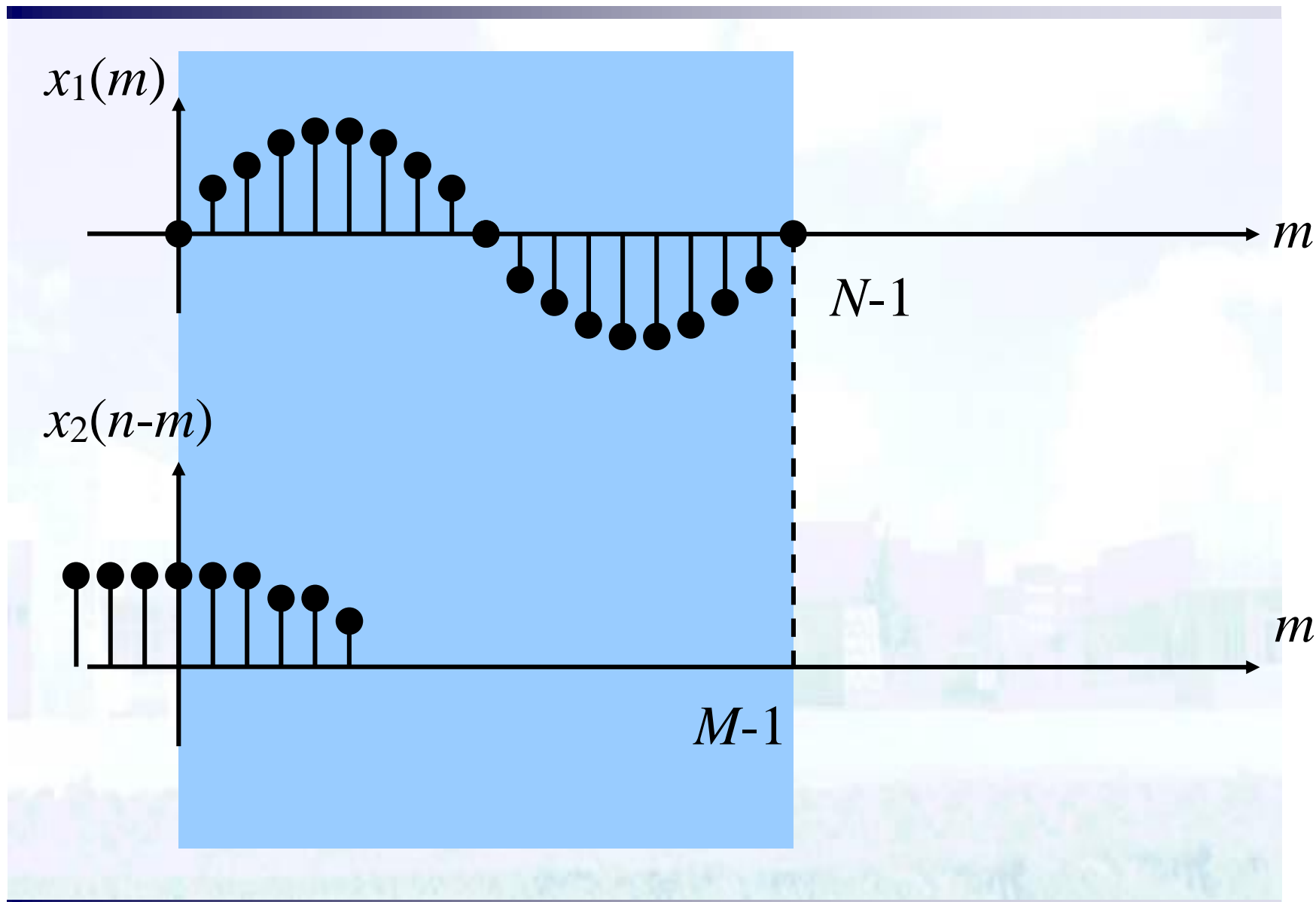
## 2.1 傅氏变换的4种形式



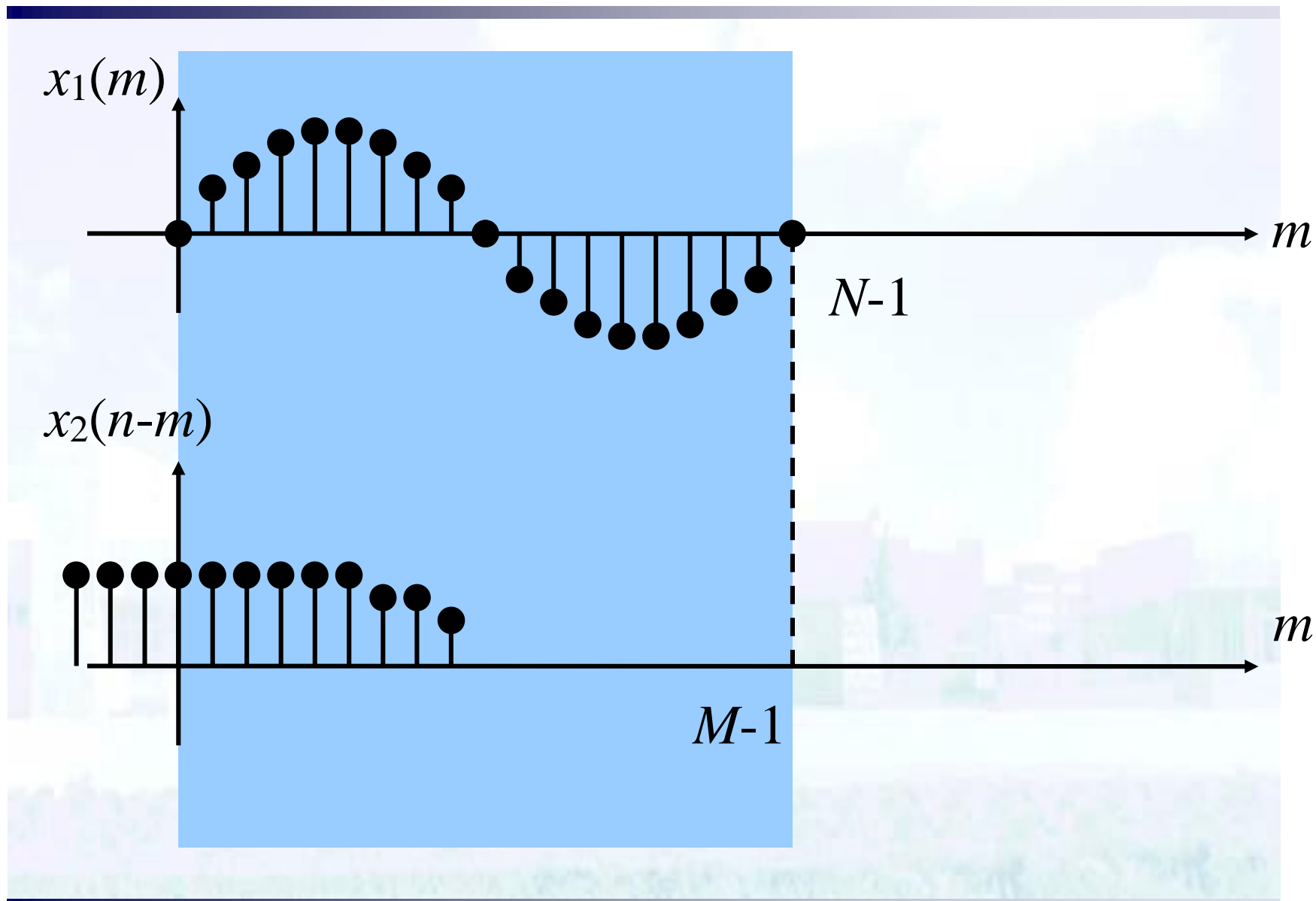
## 2.1 傅氏变换的4种形式



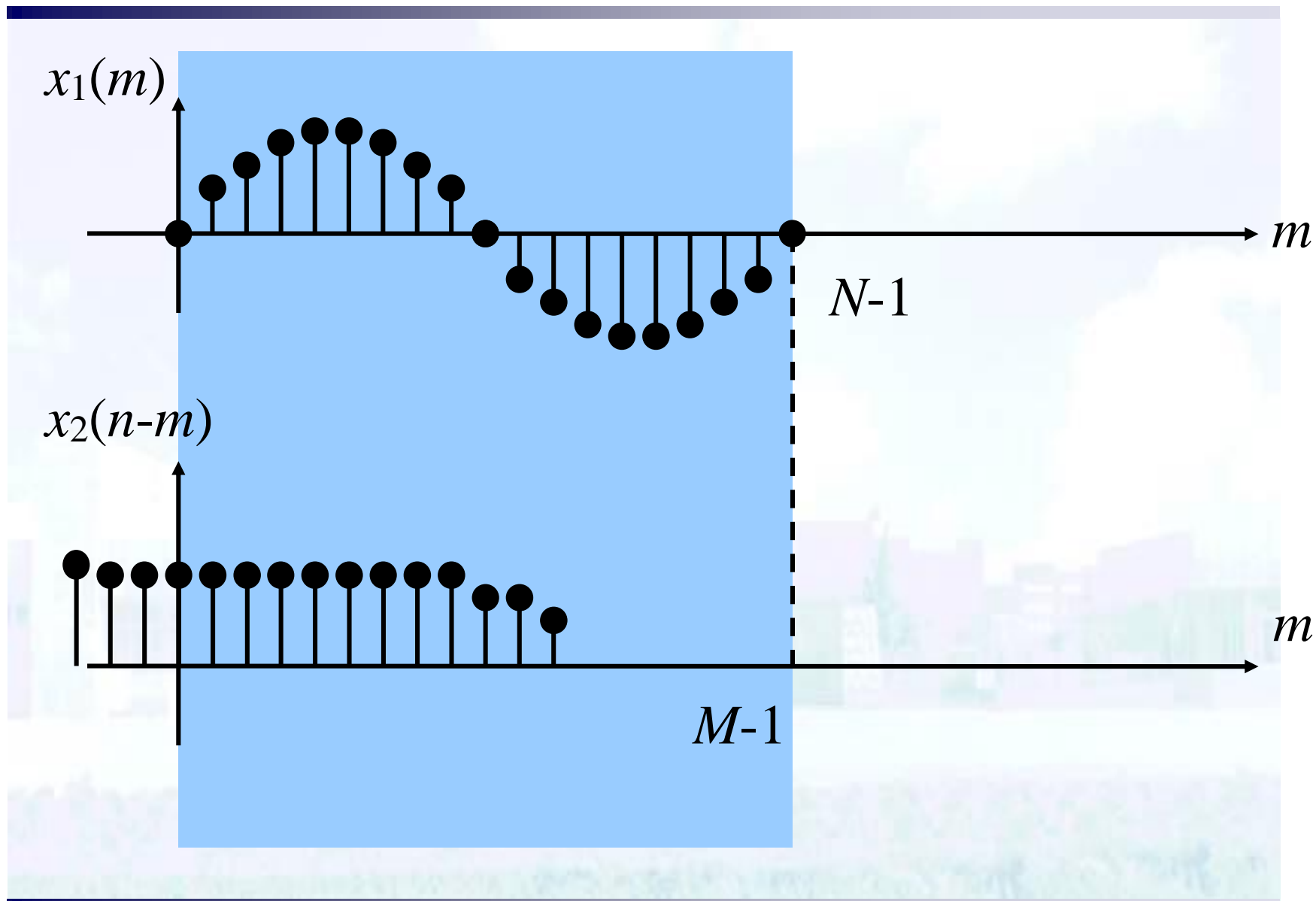
## 2.1 傅氏变换的4种形式



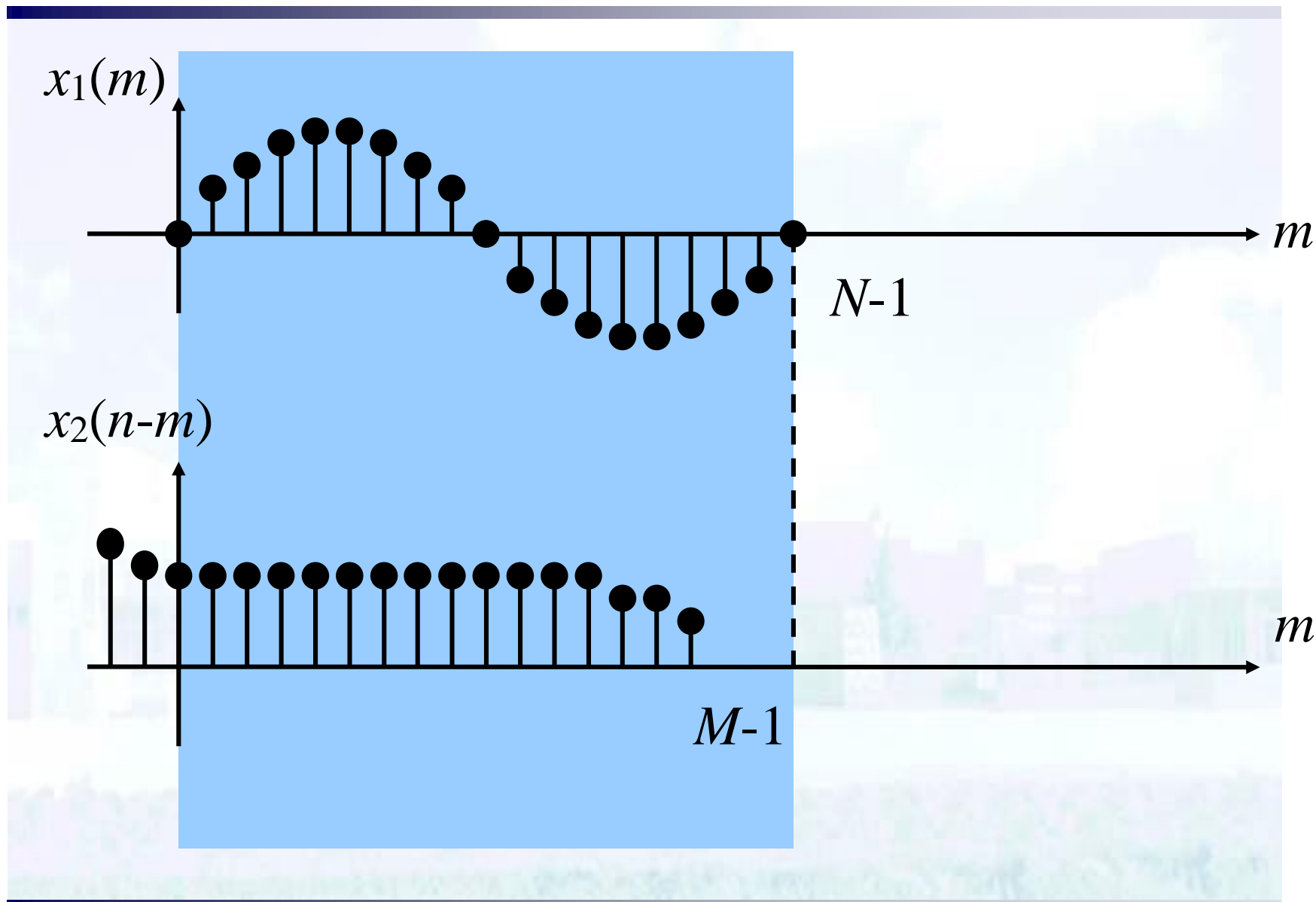
## 2.1 傅氏变换的4种形式



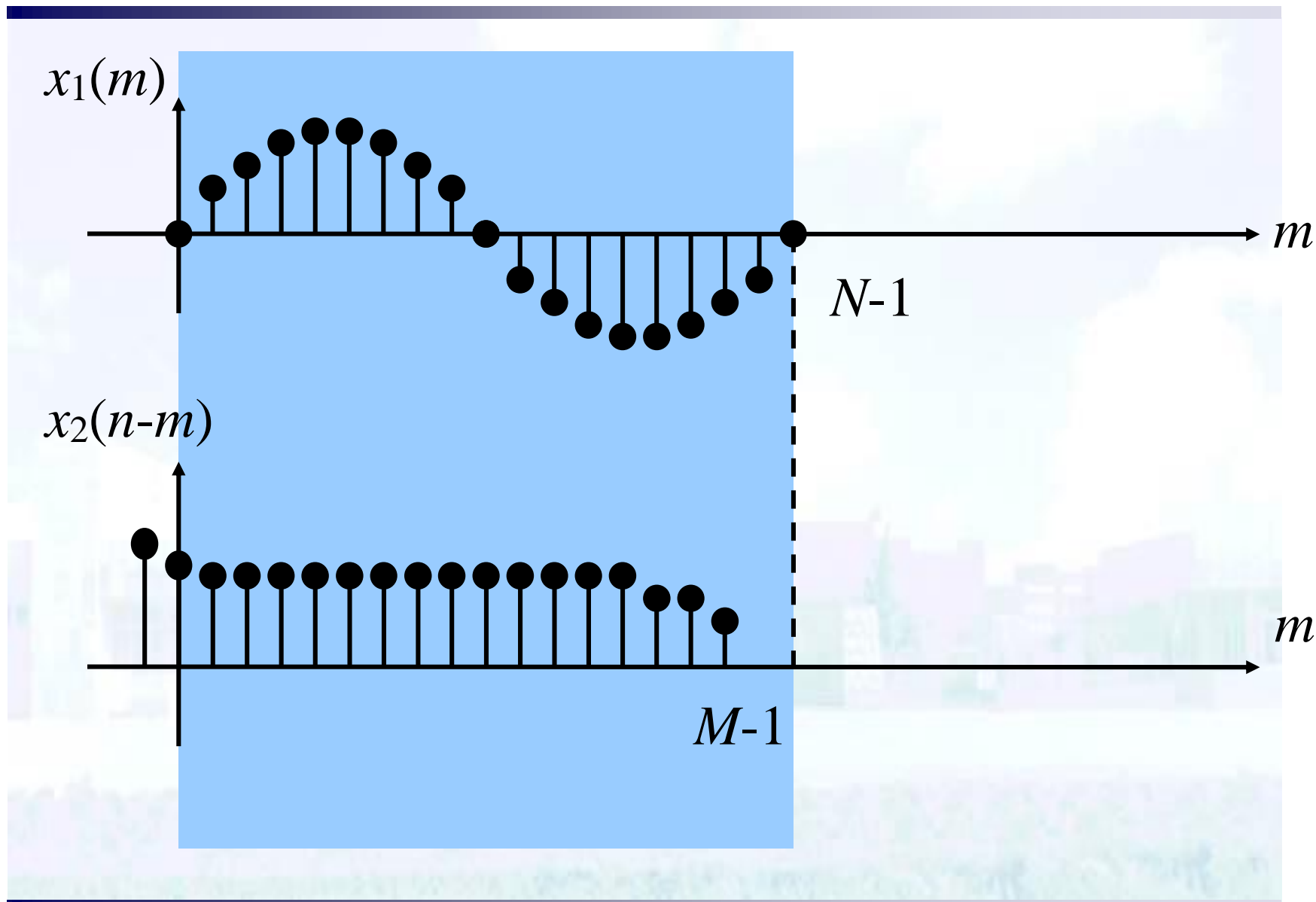
## 2.1 傅氏变换的4种形式



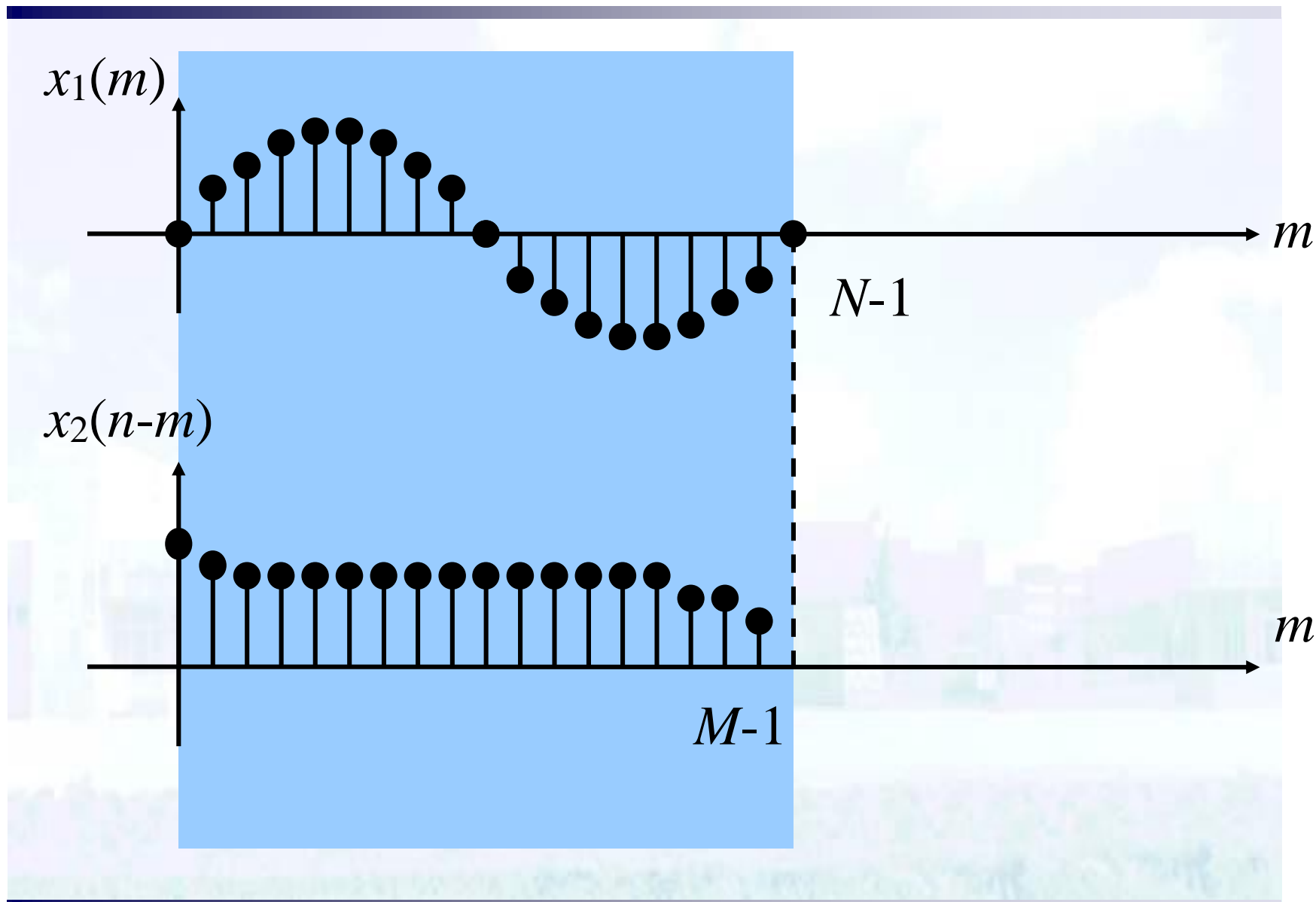
## 2.1 傅氏变换的4种形式



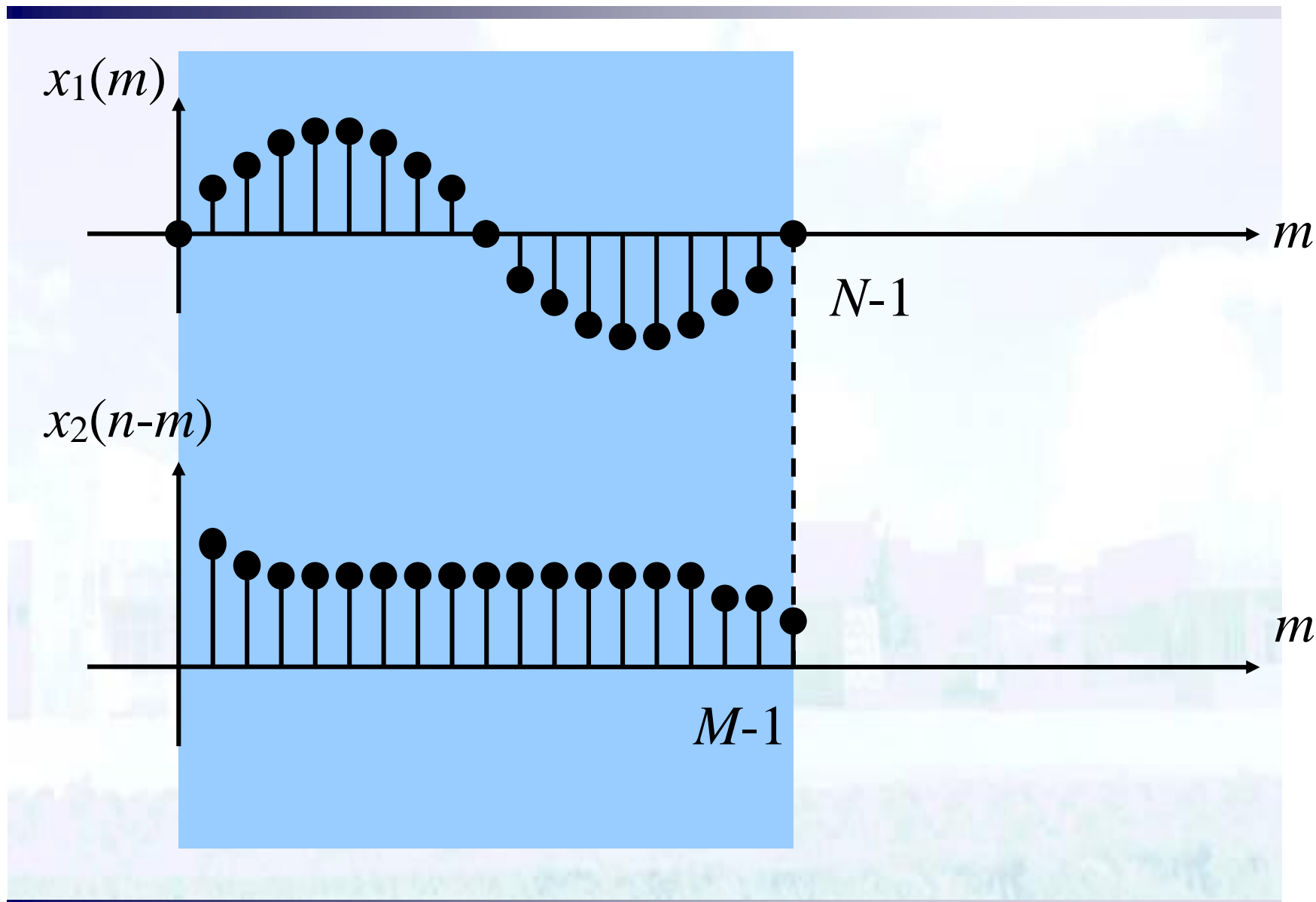
## 2.1 傅氏变换的4种形式



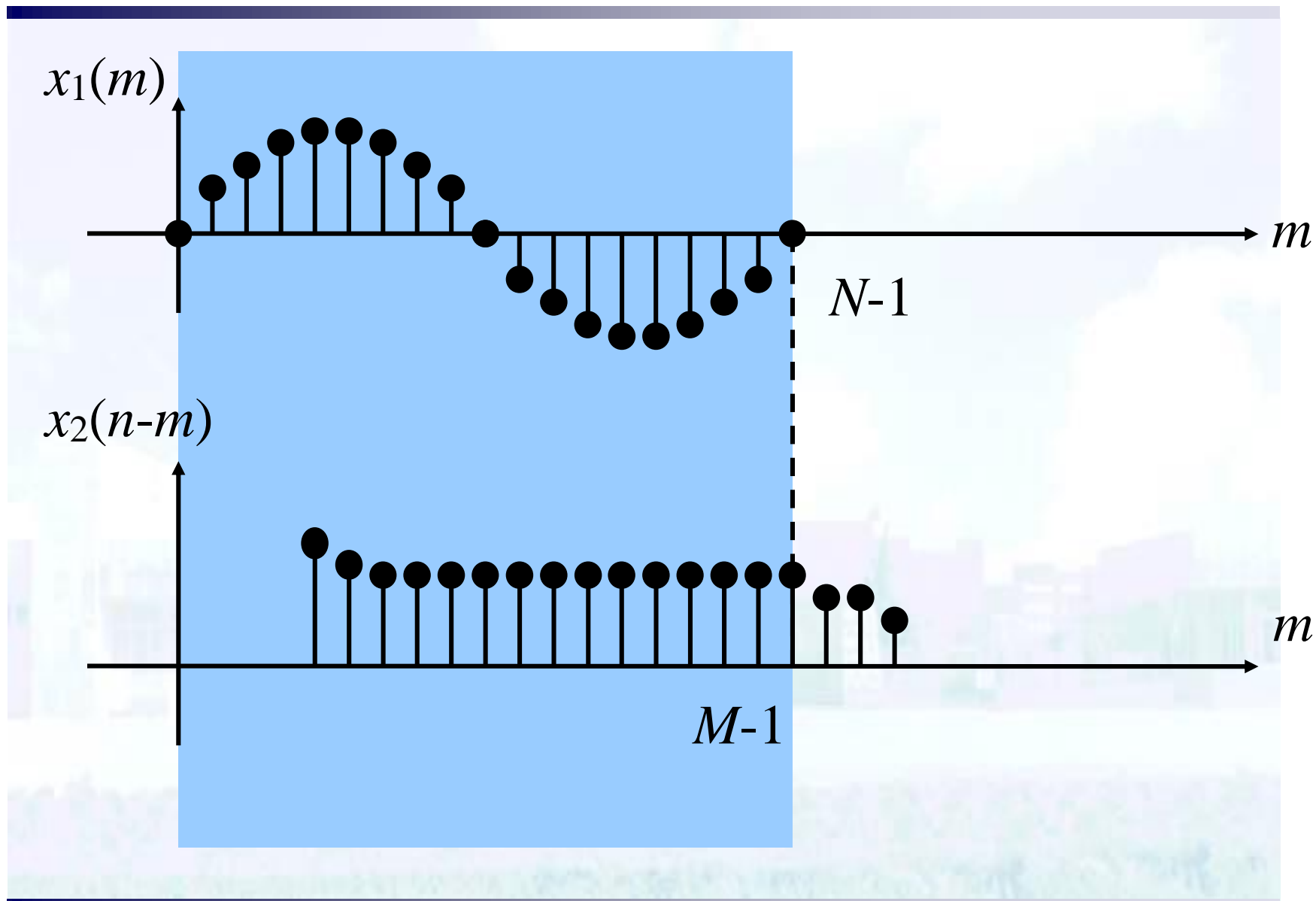
## 2.1 傅氏变换的4种形式



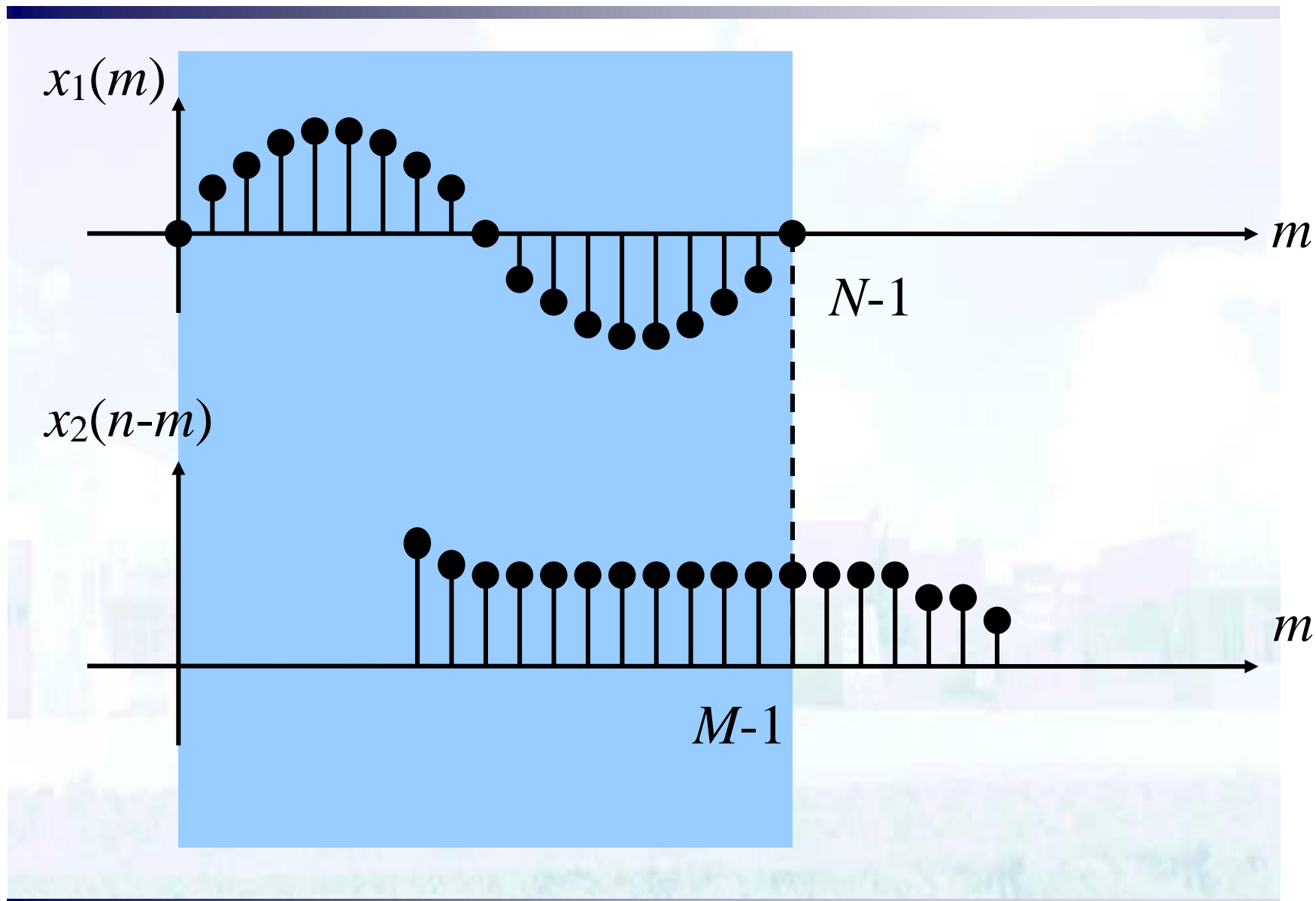
## 2.1 傅氏变换的4种形式



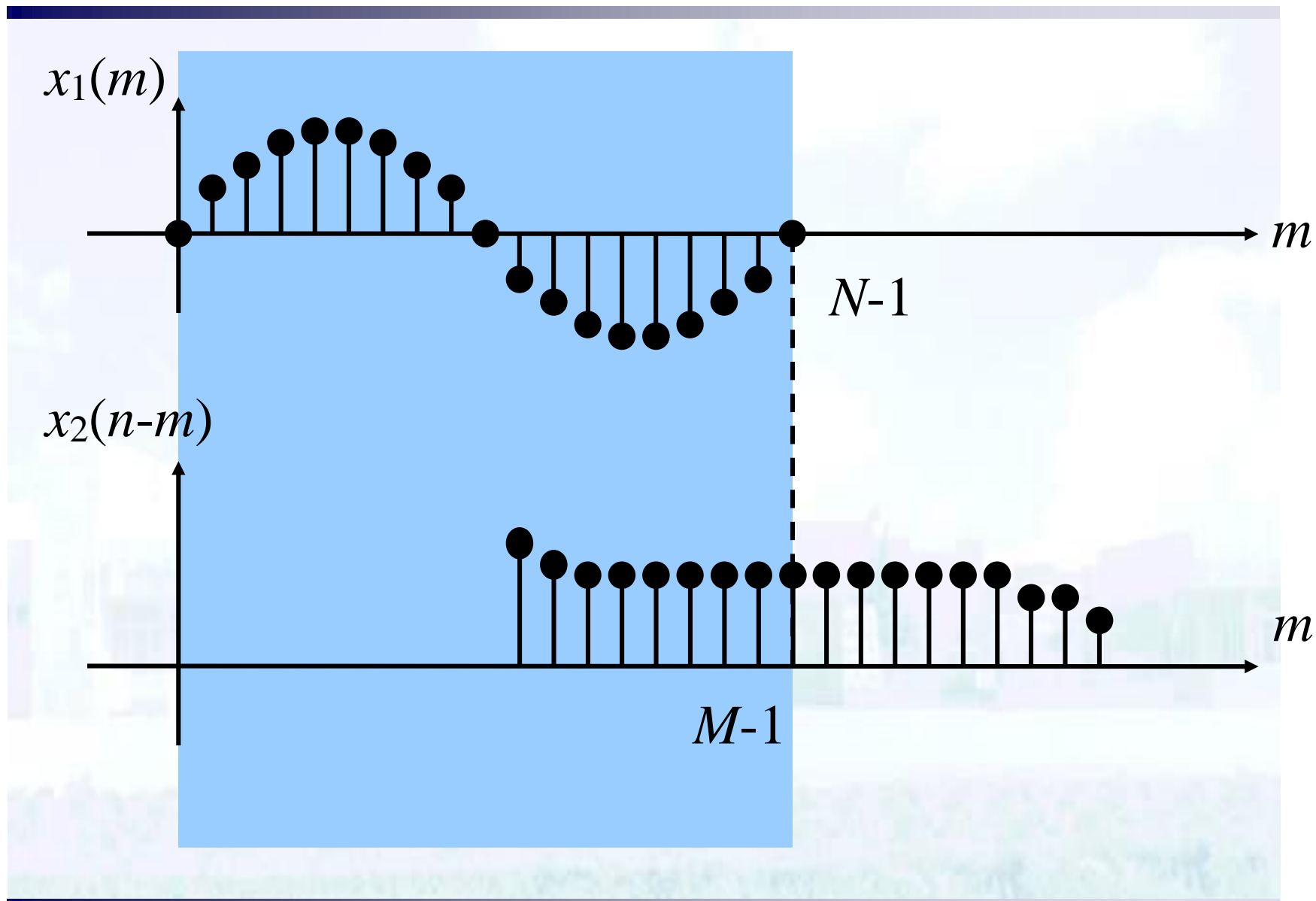
## 2.1 傅氏变换的4种形式



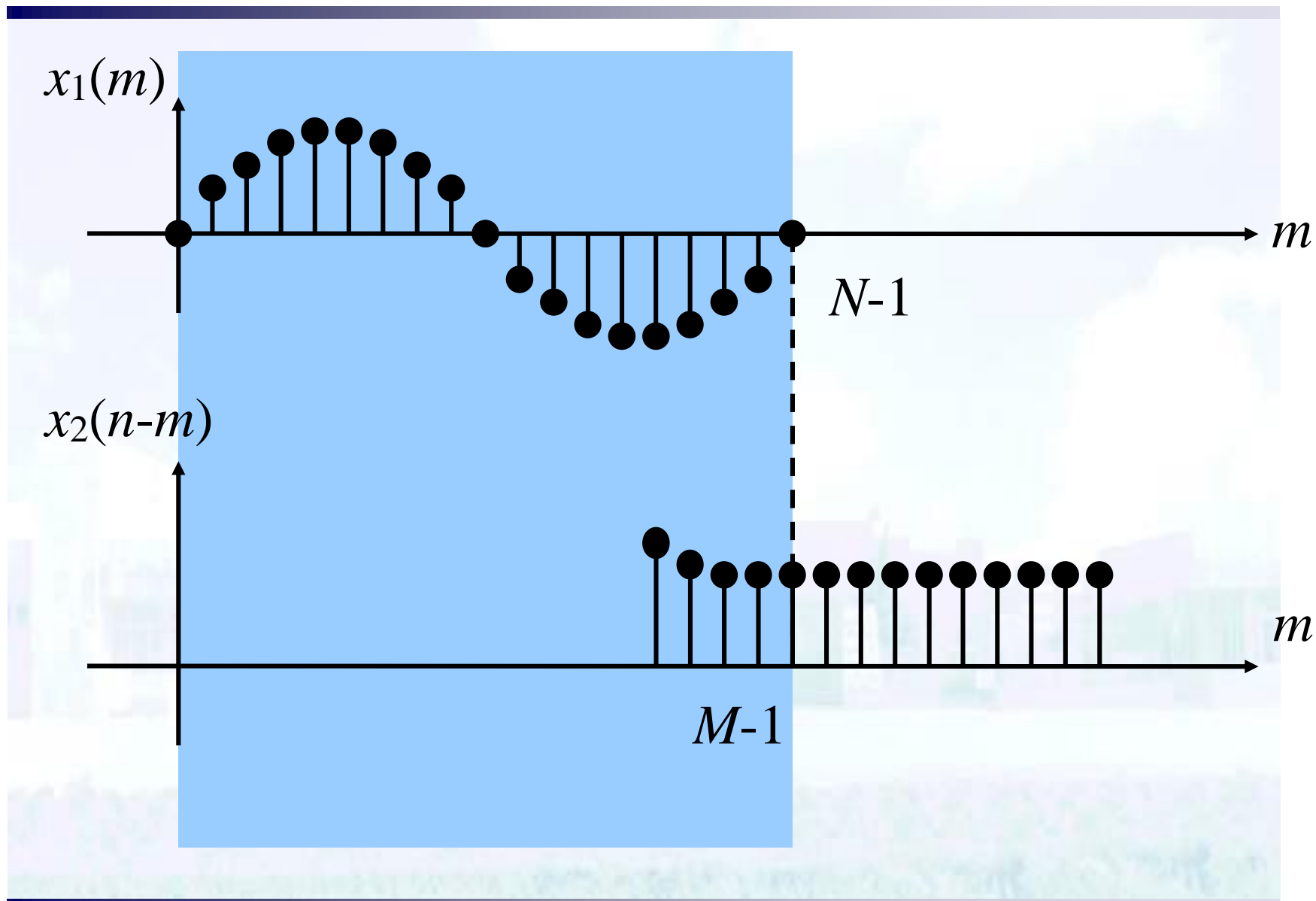
## 2.1 傅氏变换的4种形式



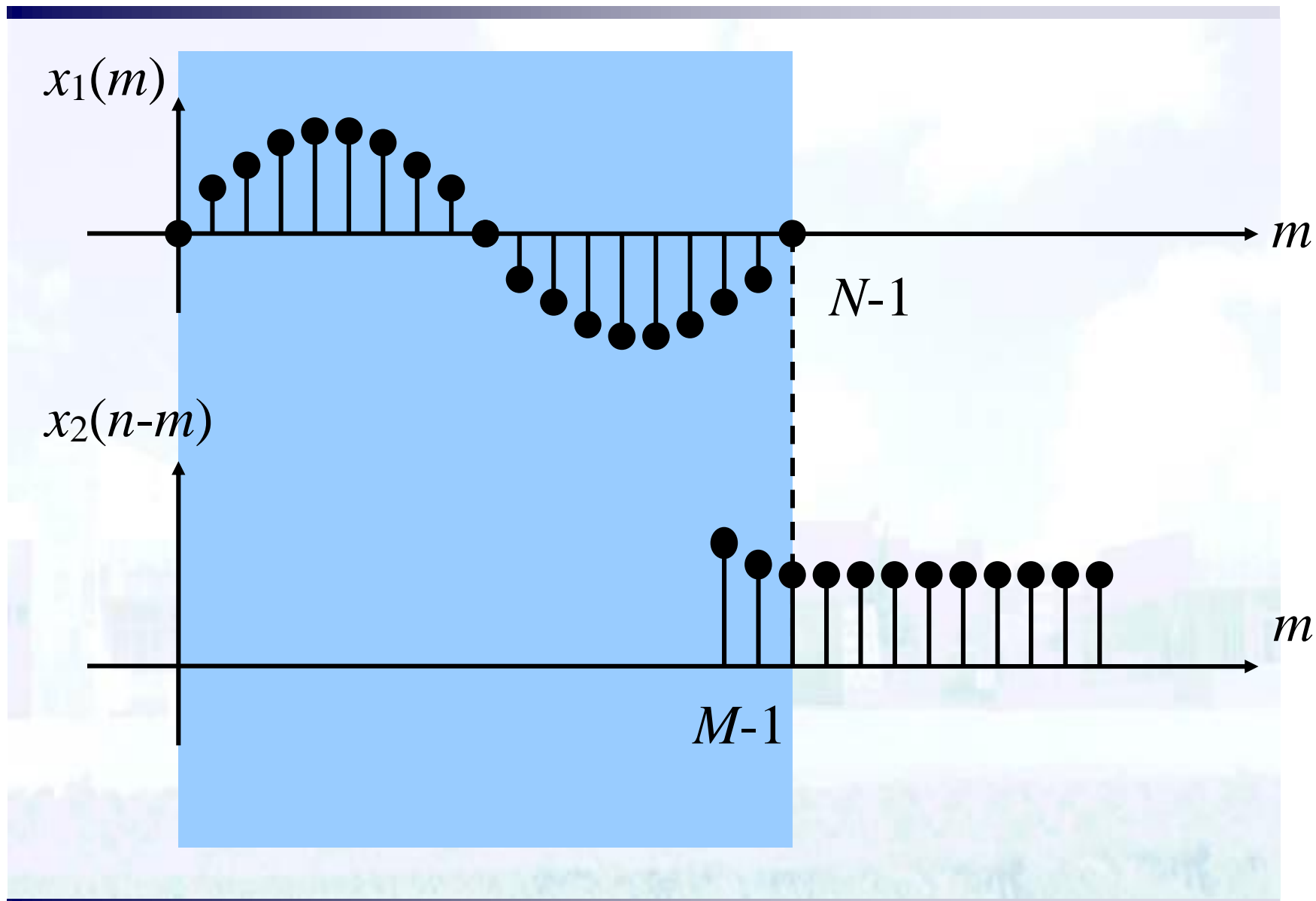
## 2.1 傅氏变换的4种形式



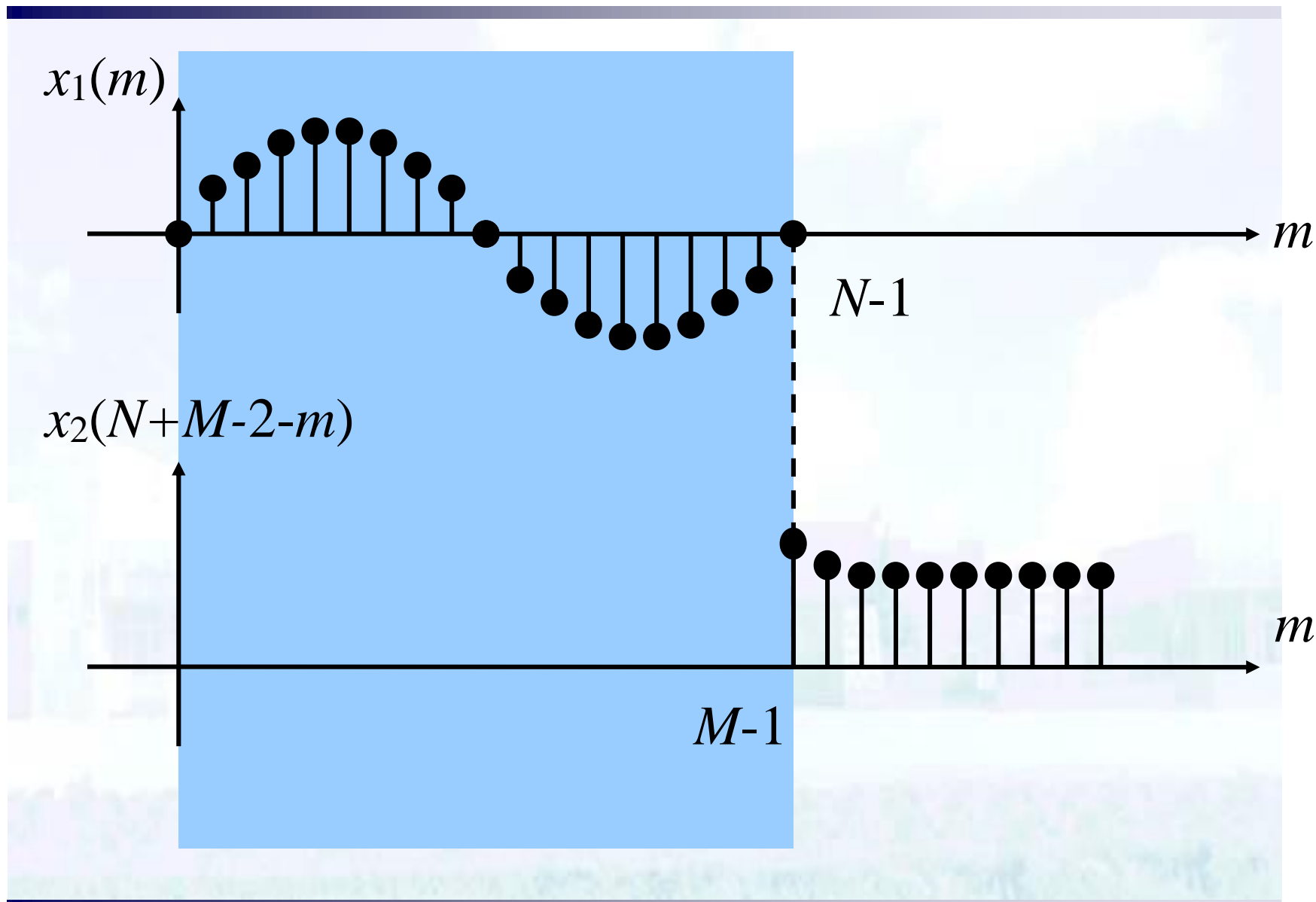
## 2.1 傅氏变换的4种形式



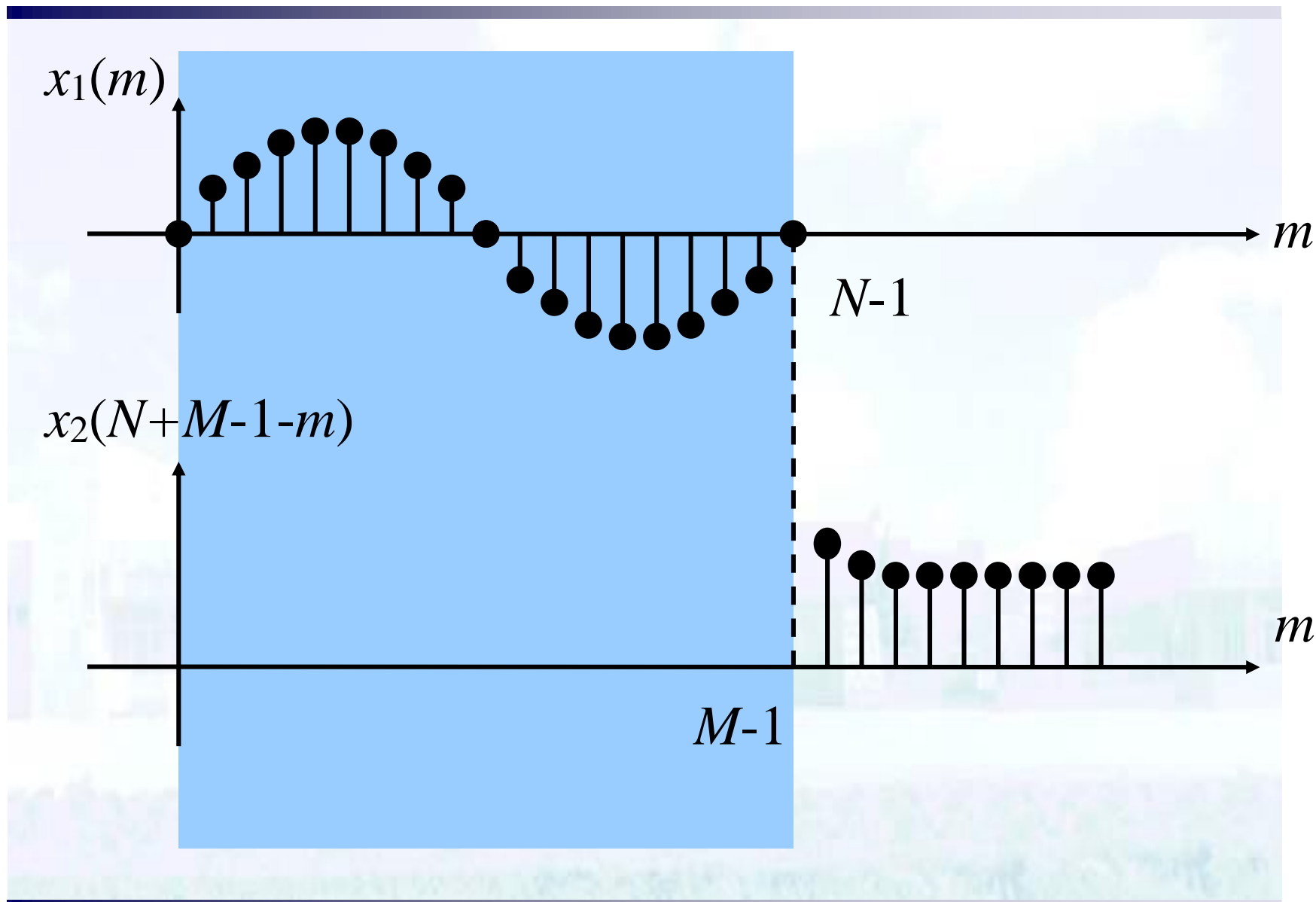
## 2.1 傅氏变换的4种形式



## 2.1 傅氏变换的4种形式



## 2.1 傅氏变换的4种形式



## 2.1 傅氏变换的4种形式

### 周期卷积的性质

时域卷积，若  $\tilde{x}_3(n) = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1(m) \tilde{x}_2(n-m)$

$$\text{则 } \tilde{X}_3(k) = \tilde{X}_1(k) \cdot \tilde{X}_2(k)$$

频域卷积，若  $\tilde{x}_3(n) = \tilde{x}_1(n) \cdot \tilde{x}_2(n)$

$$\text{则 } \tilde{X}_3(k) = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \tilde{X}_1(l) \tilde{X}_2(k-l)$$

## 2.1 傅氏变换的4种形式

### (4) 对称性质

共轭对称分量  $x_e(n) = \frac{1}{2}(x(n) + x^*(-n))$

$$x_e(-n) = x_e^*(n)$$

共轭反对称分量  $x_o(n) = \frac{1}{2}(x(n) - x^*(-n))$

$$x_o(-n) = -x_o^*(n)$$

$$x(n) = x_e(n) + x_o(n)$$

## 2.1 傅氏变换的4种形式

$$\begin{aligned} DFS[\tilde{x}^*(n)] &= \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{x}^*(n) W_N^{nk} \\ &= \left[ \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{x}(n) W_N^{n(-k)} \right]^* \\ &= \tilde{X}^*(-k) \end{aligned}$$

$$\therefore \tilde{x}^*(n) \leftrightarrow \tilde{X}^*(-k)$$

同理，  $\tilde{x}^*(-n) \leftrightarrow \tilde{X}^*(k)$

## 2.1 傅氏变换的4种形式

$$\begin{aligned} DFS[\tilde{x}_e(n)] &= \frac{1}{2} DFS[\tilde{x}(n)] + \frac{1}{2} DFS[\tilde{x}^*(-n)] \\ &= \frac{1}{2} X(k) + \frac{1}{2} X^*(k) \\ &= \operatorname{Re}\{X(k)\} \end{aligned}$$

$$\therefore \tilde{x}_e(n) \leftrightarrow \operatorname{Re}\{\tilde{X}(k)\}$$

同理,  $\tilde{x}_o(n) \leftrightarrow j \operatorname{Im}\{\tilde{X}(k)\}$

## 2.1 傅氏变换的4种形式

$$\begin{aligned} DFS[\operatorname{Re}\{\tilde{x}(n)\}] &= \frac{1}{2} DFS[\tilde{x}(n)] + \frac{1}{2} DFS[\tilde{x}^*(n)] \\ &= \frac{1}{2} \tilde{X}(k) + \frac{1}{2} \tilde{X}^*(-k) \\ &= \tilde{X}_e(k) \end{aligned}$$

$$\therefore \operatorname{Re}\{\tilde{x}(n)\} \leftrightarrow \tilde{X}_e(k)$$

$$\text{同理, } j \operatorname{Im}\{\tilde{x}(n)\} \leftrightarrow \tilde{X}_o(k)$$

## 2.1 傅氏变换的4种形式

### 结果汇总

$$\tilde{x}^*(n) \leftrightarrow \tilde{X}^*(-k)$$

$$\tilde{x}^*(-n) \leftrightarrow \tilde{X}^*(k)$$

$$\tilde{x}_e(n) \leftrightarrow \operatorname{Re}\{\tilde{X}(k)\}$$

$$\tilde{x}_o(n) \leftrightarrow j \operatorname{Im}\{\tilde{X}(k)\}$$

$$\operatorname{Re}[\tilde{x}(n)] \leftrightarrow \tilde{X}_e(k)$$

$$j \operatorname{Im}[\tilde{x}(n)] \leftrightarrow \tilde{X}_o(k)$$

## 2.1 傅氏变换的4种形式

实序列  $x(n)$

$$\operatorname{Re}[\tilde{X}(-k)] = \operatorname{Re}[\tilde{X}(k)] \quad \text{实部为偶函数}$$

$$\operatorname{Im}[\tilde{X}(-k)] \leftrightarrow -\operatorname{Im}[\tilde{X}(k)] \quad \text{虚部为奇函数}$$

$$|\tilde{X}(-k)| = |\tilde{X}(k)|$$

$$\arg[\tilde{X}(-k)] = -\arg[\tilde{X}(k)]$$



## 2.2 离散傅立叶变换的定义及性质 (DFT)

# 为什么要建立DFT变换关系并研究它？ 用机器分析离散信号的频谱

## 问题

- 机器不能处理连续信号，必须离散化，包括频谱
- 机器的能力有限，处理数据量是有限的

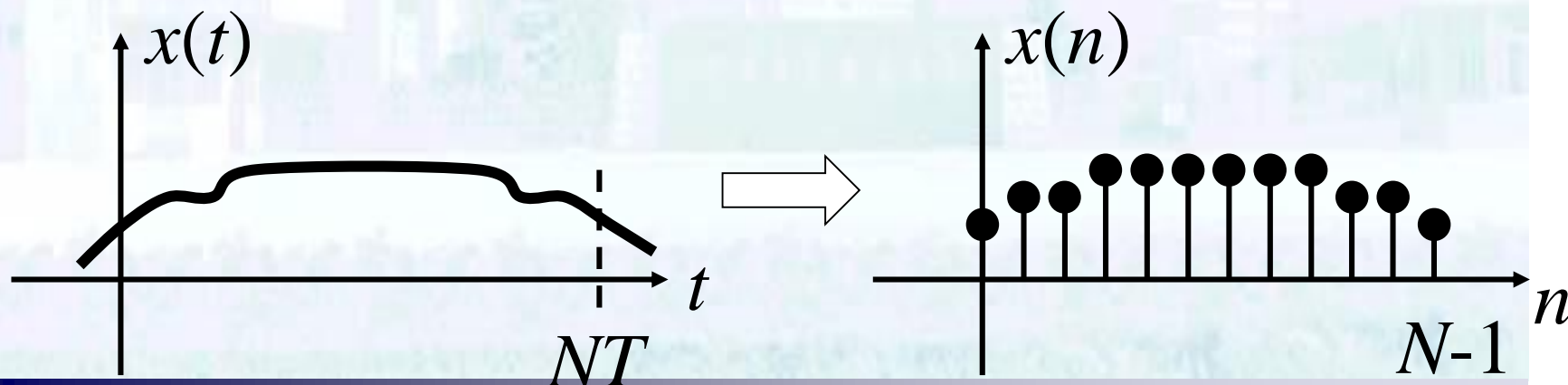
## 2.2 离散傅立叶变换的定义及性质 (DFT)

(1) 对连续时间信号  $x(t)$  取样

取样周期  $T$ , 样本长度  $N$

得到有限长序列  $x(n)$ :

$$x(n) = \begin{cases} x(nT), & n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$



## 2.2 离散傅立叶变换的定义及性质 (DFT)

### (2) 计算 $x(n)$ 的频谱

根据DTFT,

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\omega n}$$

$X(e^{j\omega})$  以  $2\pi$  为周期, 且连续

## 2.2 离散傅立叶变换的定义及性质 (DFT)

将其离散化,  $2\pi$ 周期内取  $M$ 个点:  $\omega_k = \frac{2\pi}{M}k$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{M}nk} \quad k = 0, 1, 2, \dots, M-1$$

$X(k)$ : 有限长序列的离散谱, 以  $M$ 为周期。

## 2.2 离散傅立叶变换的定义及性质 (DFT)

关于 $M$ 的选取:

根据DFS的性质,  $X(k)$ 对应于的时域的周期序列  $x'(n)$  为

$$x'(n) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{M}kn}$$

将  $X(k) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m) e^{-j\frac{2\pi}{M}mk}$  代入

## 2.2 离散傅立叶变换的定义及性质 (DFT)

$$\begin{aligned}x'(n) &= \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \left[ \sum_{m=0}^{N-1} x(m) e^{-j\frac{2\pi}{M}mk} \right] e^{j\frac{2\pi}{M}kn} \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} x(m) \left[ \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} e^{j\frac{2\pi}{M}(n-m)k} \right]\end{aligned}$$

## 2.2 离散傅立叶变换的定义及性质 (DFT)

考虑到 $x(m)$ 在时域上是有限的,

$$\begin{aligned}x'(n) &= \sum_{m=0}^{N-1} x(m) \left[ \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} e^{j\frac{2\pi}{M}(n-m)k} \right] \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \left[ \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} e^{j\frac{2\pi}{M}(n-m)k} \right]\end{aligned}$$

## 2.2 离散傅立叶变换的定义及性质 (DFT)

正弦函数的正交性,

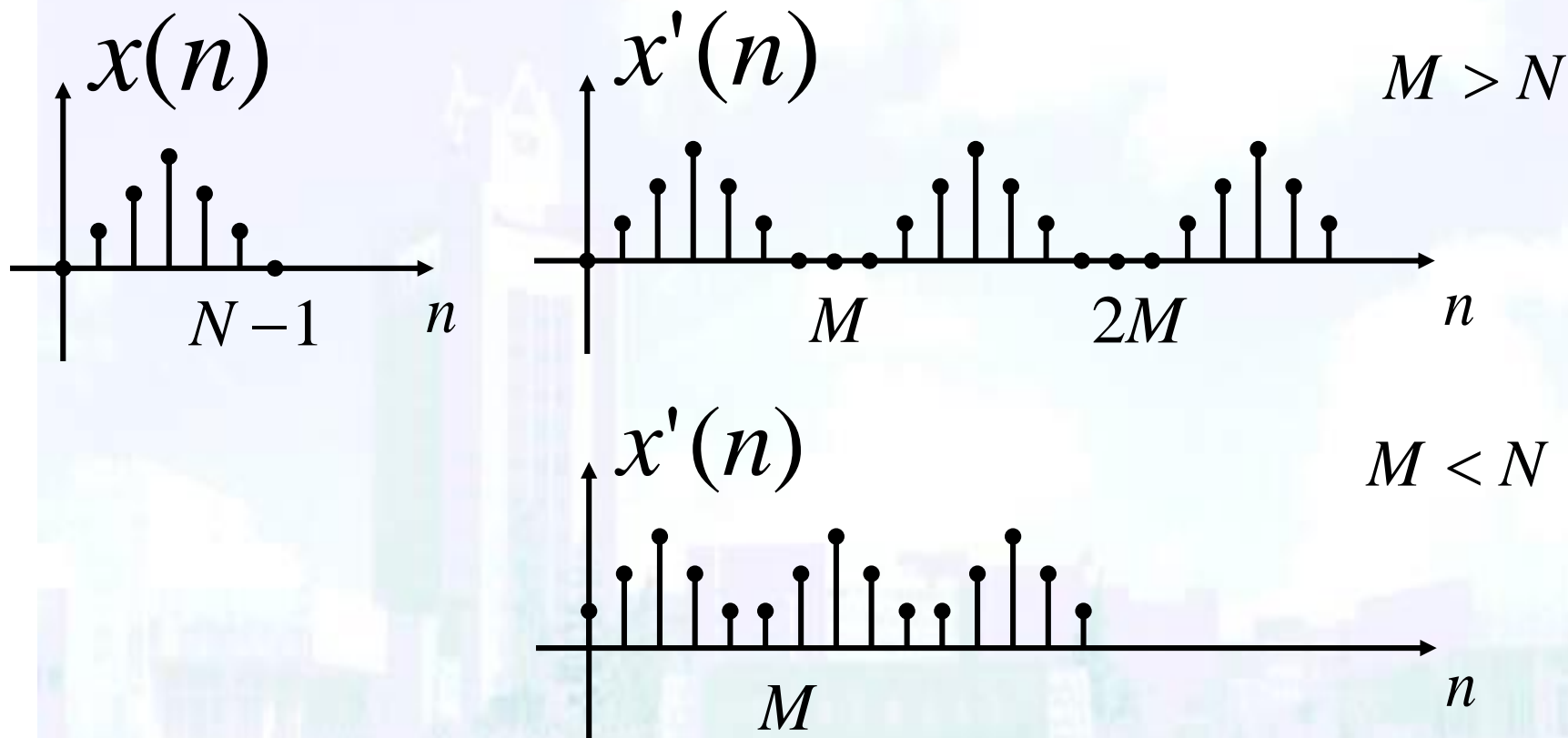
$$\frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} e^{j\frac{2\pi}{M}(n-m)k} = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(m - n - rM)$$
$$= \begin{cases} 1 & m = n + rM \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$r$  为任意整数

## 2.2 离散傅立叶变换的定义及性质 (DFT)

$$\begin{aligned}x'(n) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(m - n - rM) \\&= \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \delta(m - n - rM) \\&= \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(n + rM)\end{aligned}$$

## 2.2 离散傅立叶变换的定义及性质 (DFT)



在时域形成周期延拓  $M > N$  间隔若干零点  
 $M < N$  发生混叠失真

## 2.2 离散傅立叶变换的定义及性质 (DFT)

一般地, 取  $M=N$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1,$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}nk} &= \sum_{k=0}^{N-1} \left[ \sum_{m=0}^{N-1} x(m) e^{-j\frac{2\pi}{N}mk} \right] e^{j\frac{2\pi}{N}nk} \\ &= Nx(n) \end{aligned}$$

$$\therefore x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$$

## 2.2 离散傅立叶变换的定义及性质 (DFT)

离散时间信号DFT变换对:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1,$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}nk}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

在形式上, DFT可以看作是对DFS取主值区间

## 2.2 离散傅立叶变换的定义及性质 (DFT)

DFT的性质:

(1)线性

若  $x_1(n) \leftrightarrow X_1(k)$ ,  $x_2(n) \leftrightarrow X_2(k)$

则  $ax_1(n) + bx_2(n) \leftrightarrow aX_1(k) + bX_2(k)$

## 2.2 离散傅立叶变换的定义及性质 (DFT)

### (2) 对称定理

$$\text{若 } X(k) = \text{DFT}[x(n)]$$

$$\text{则 } \text{DFT}[X(k)] = Nx(-k)$$

即

$$x(n) \xleftrightarrow{\text{DFT}} X(k) \xleftrightarrow{\text{DFT}} Nx(-k)$$

## 2.2 离散傅立叶变换的定义及性质 (DFT)

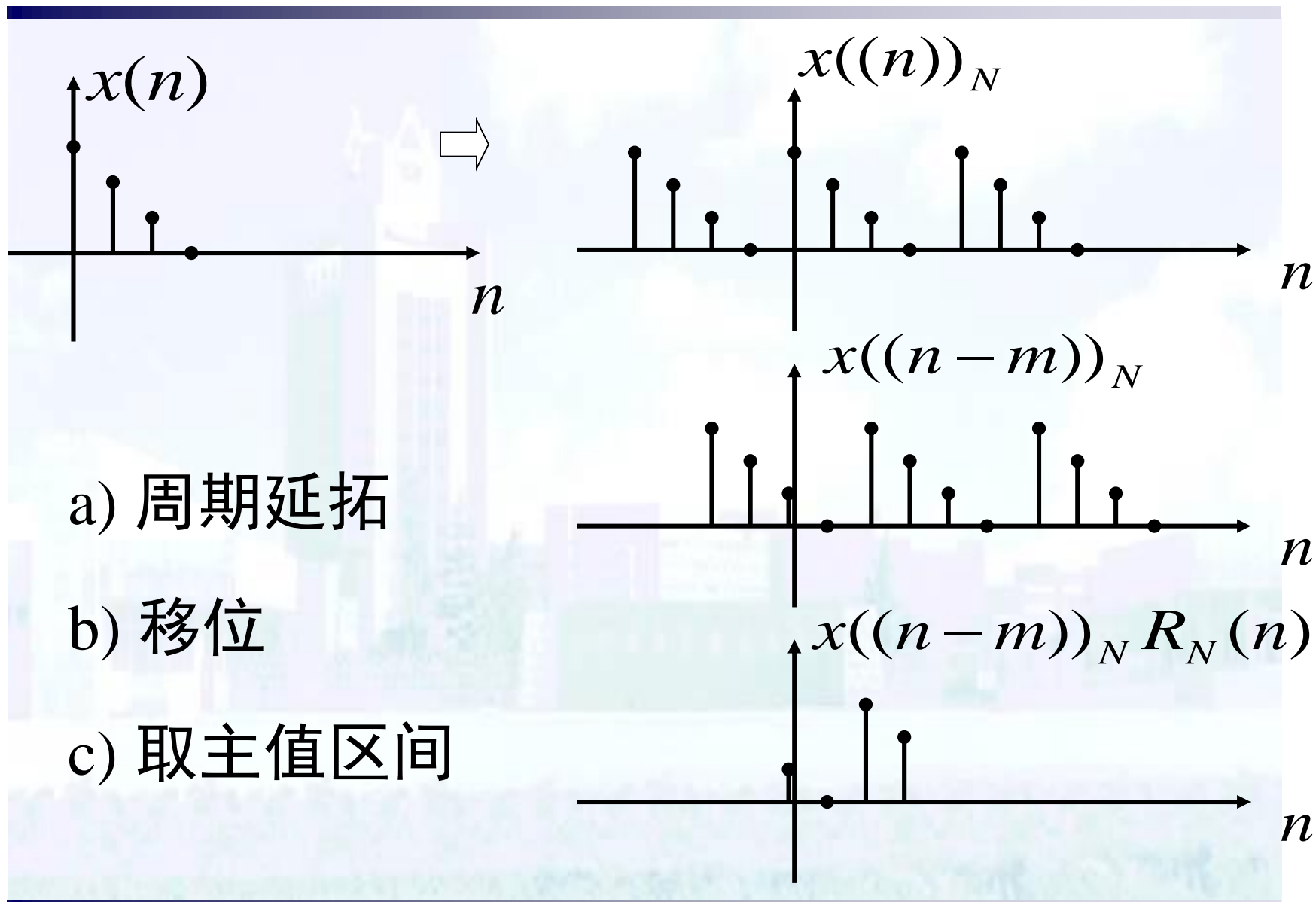
### (3) 序列的圆周移位 (循环移位)

#### 圆周移位的定义

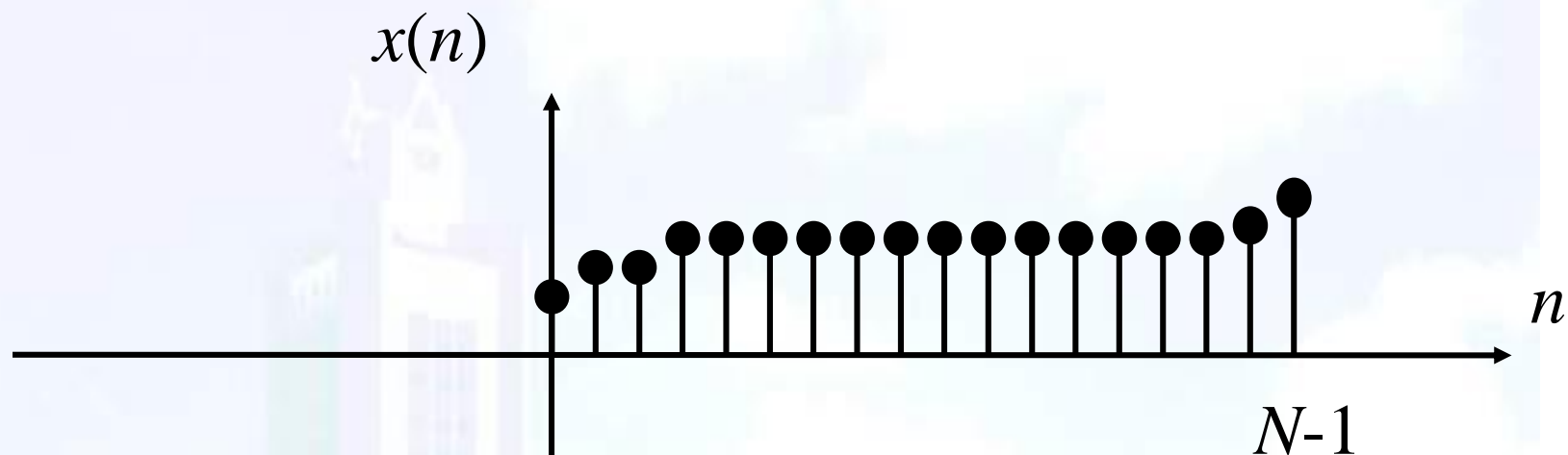
有限长序列  $x(n)$  右移  $m$  位:

$$x_1(n) = x((n - m))_N R_N(n)$$

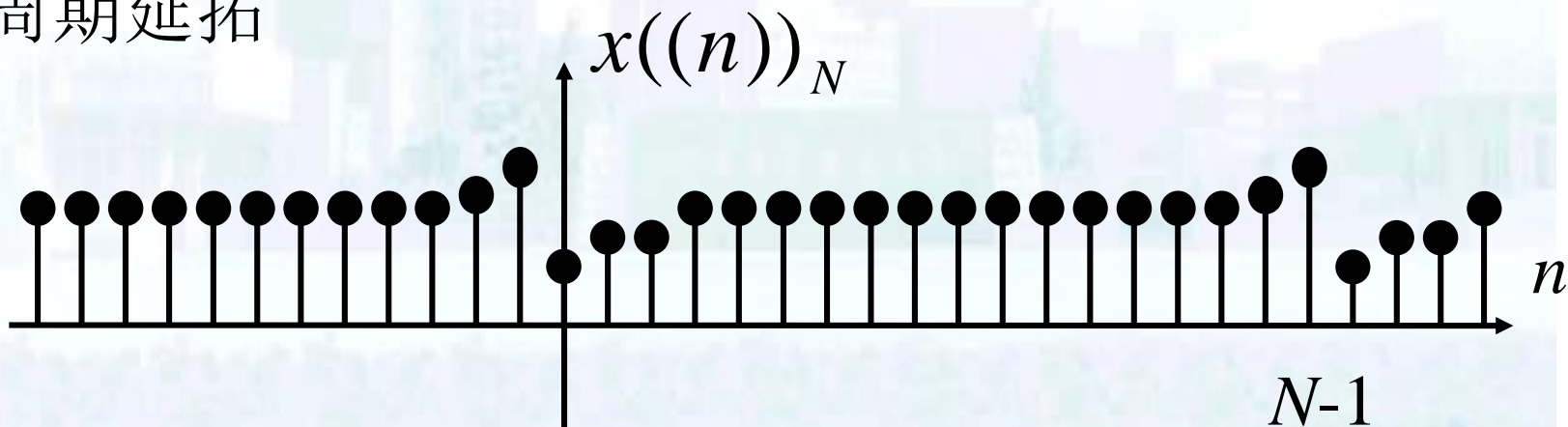
## 2.2 离散傅立叶变换的定义及性质 (DFT)



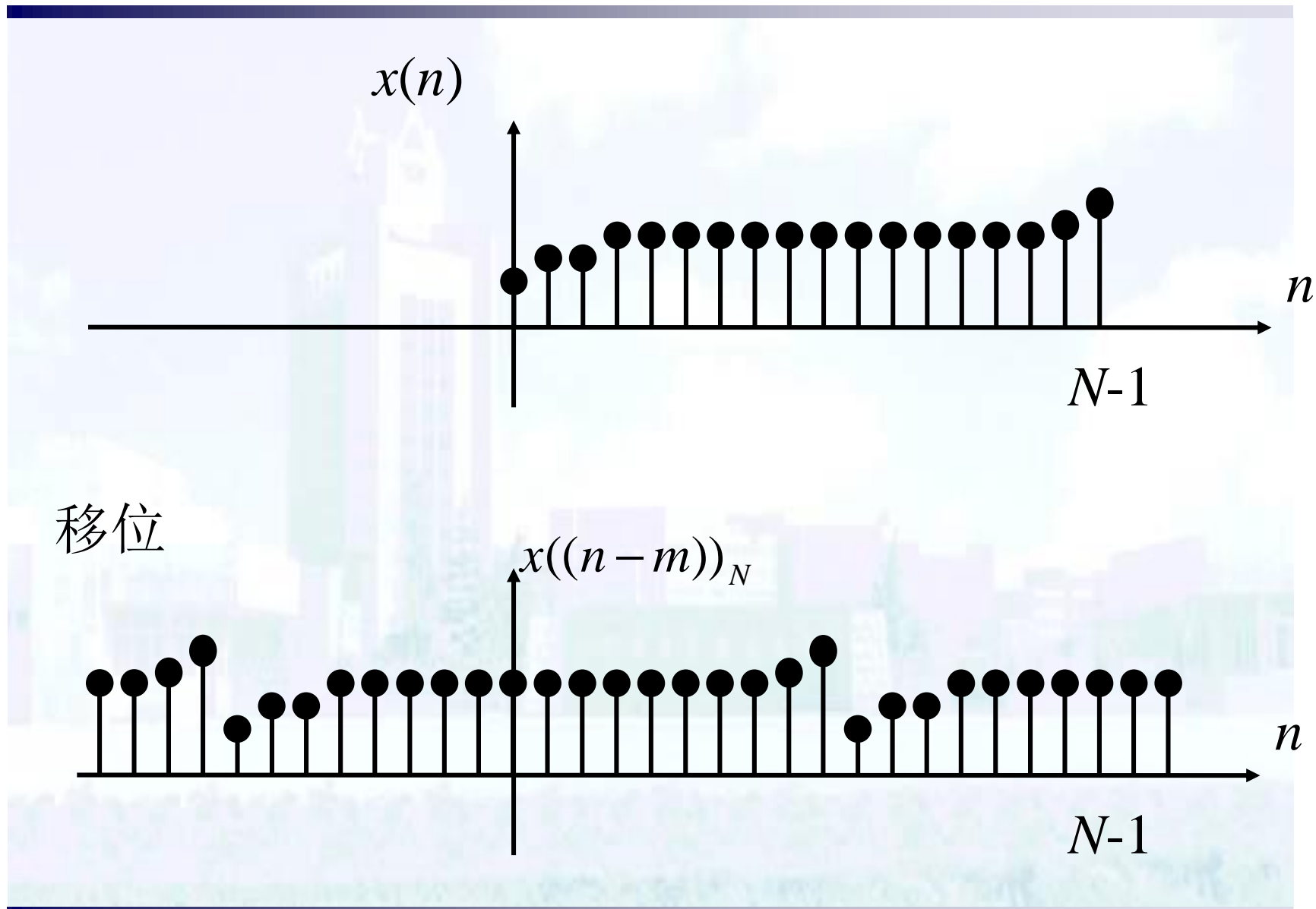
## 2.2 离散傅立叶变换的定义及性质 (DFT)



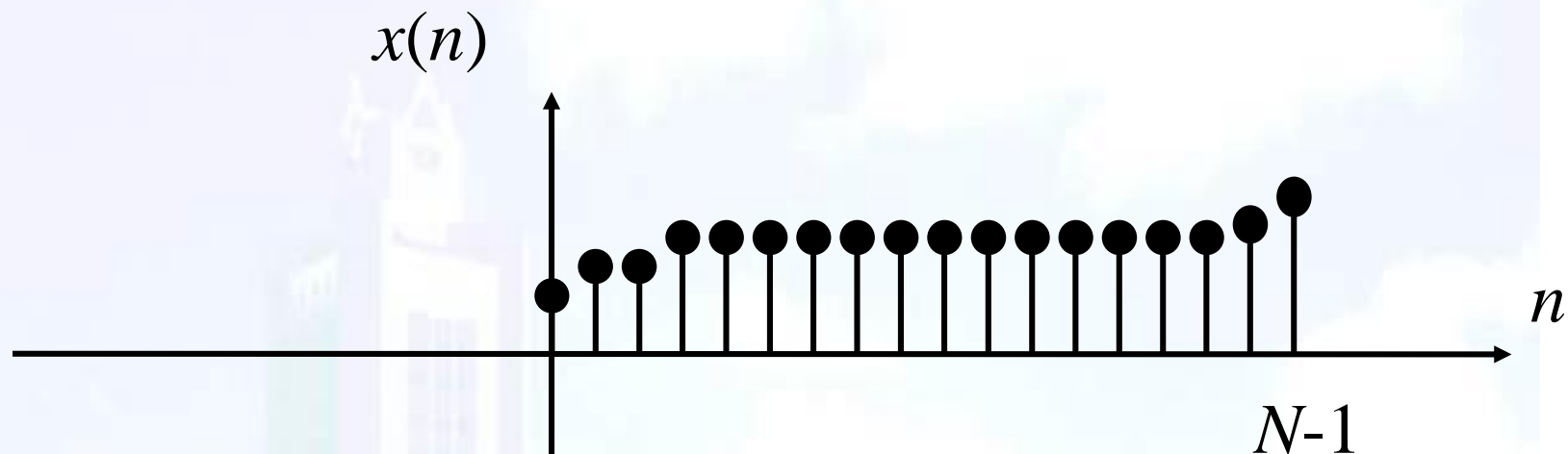
周期延拓



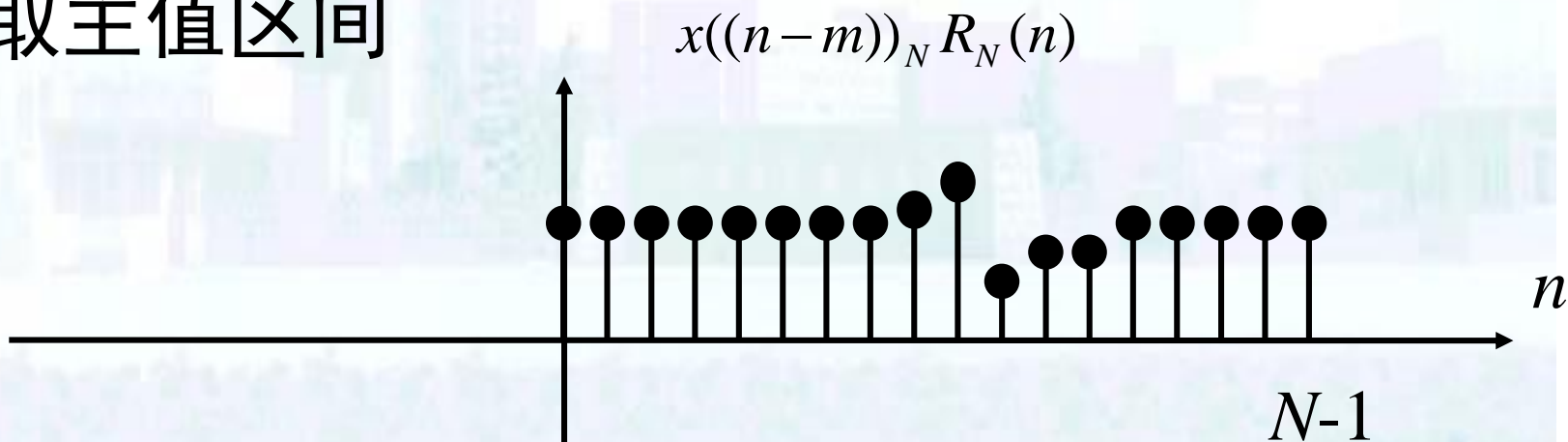
## 2.2 离散傅立叶变换的定义及性质 (DFT)



## 2.2 离散傅立叶变换的定义及性质 (DFT)



取主值区间



## 2.2 离散傅立叶变换的定义及性质 (DFT)

### 有限长序列圆周移位定理

#### 时域移位

$$\text{若 } x_1(n) = x((n-m))_N R_N(n)$$

$$\text{则 } X_1(k) = W_N^{km} X(k)$$

谱线幅度不变，但有相位移动

## 2.2 离散傅立叶变换的定义及性质 (DFT)

### 有限长序列圆周移位定理

#### 频率移位

$$\text{若 } X_1(k) = X((k+l))_N R_N(k)$$

$$\text{则 } x_1(n) = W_N^{nl} x(n)$$

序列  $x(n)$  调制到频率  $l\Omega$  上

## 2.2 离散傅立叶变换的定义及性质 (DFT)

### (4) 圆周卷积

$$x_1(n) \otimes x_2(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) x_2((n-m))_N R_N(m)$$

若  $x_3(n) = x_1(n) \otimes x_2(n)$

则  $X_3(k) = X_1(k) \cdot X_2(k)$

若  $x_3(n) = x_1(n) \cdot x_2(n)$

则  $X_3(k) = X_1(k) \otimes X_2(k)$

圆周卷积后仍为有限长序列，长为 $N$

## 2.2 离散傅立叶变换的定义及性质 (DFT)

对比：有限长序列线性卷积

$x_1(n)$ 序列长 $N$ ,  $x_2(n)$ 序列长 $M$ ,

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x_1(k)x_2(n-k)$$

$$n=0,1,2, \dots, N+M-2$$

## 2.2 离散傅立叶变换的定义及性质 (DFT)

### 与圆周卷积的等价关系

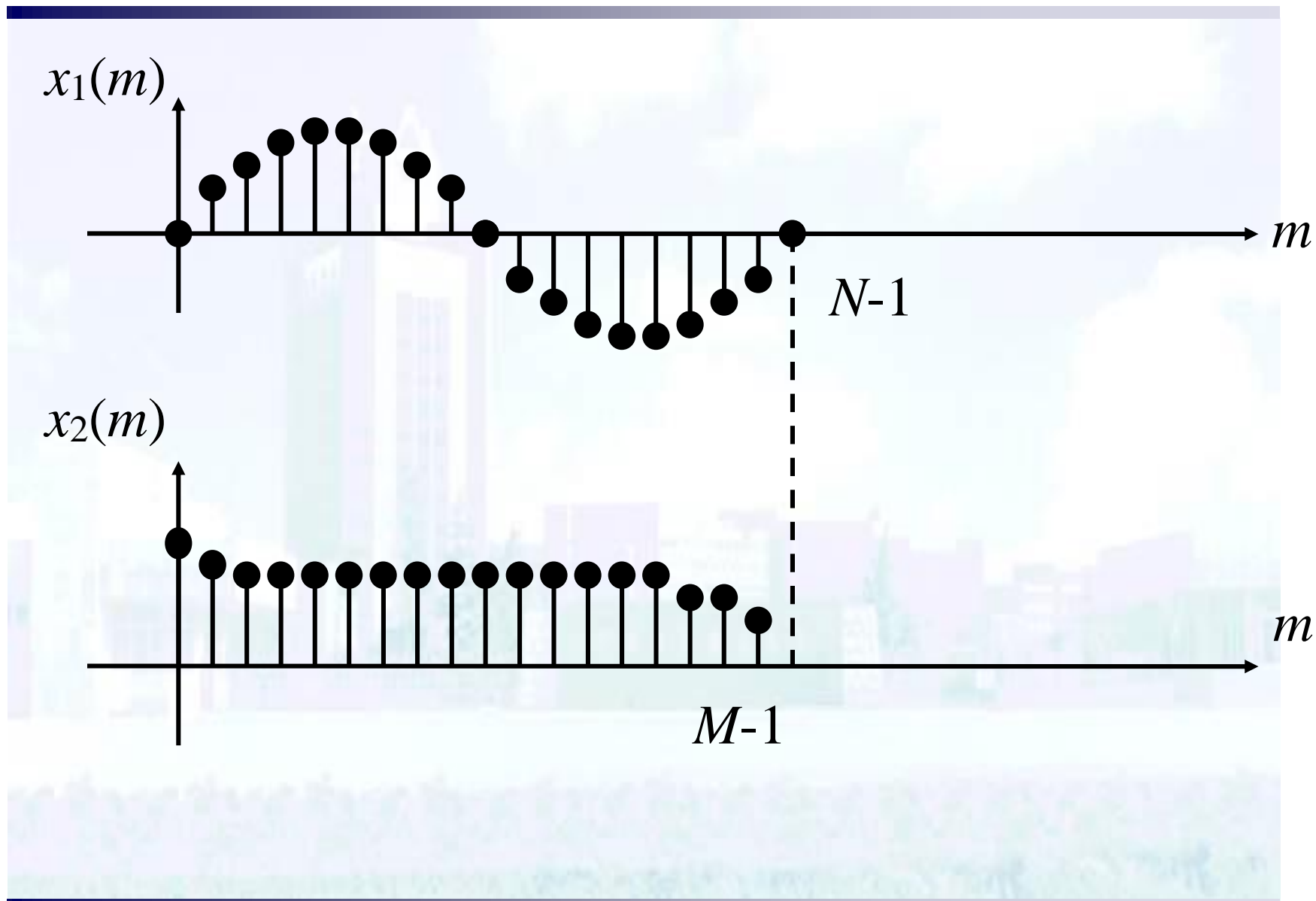
$$x_1'(n) = \begin{cases} x_1(n), & n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \\ 0, & n = N, \dots, N+M-2 \end{cases}$$

$$x_2'(n) = \begin{cases} x_2(n), & n = 0, 1, 2, \dots, M-1 \\ 0, & n = N, \dots, N+M-2 \end{cases}$$

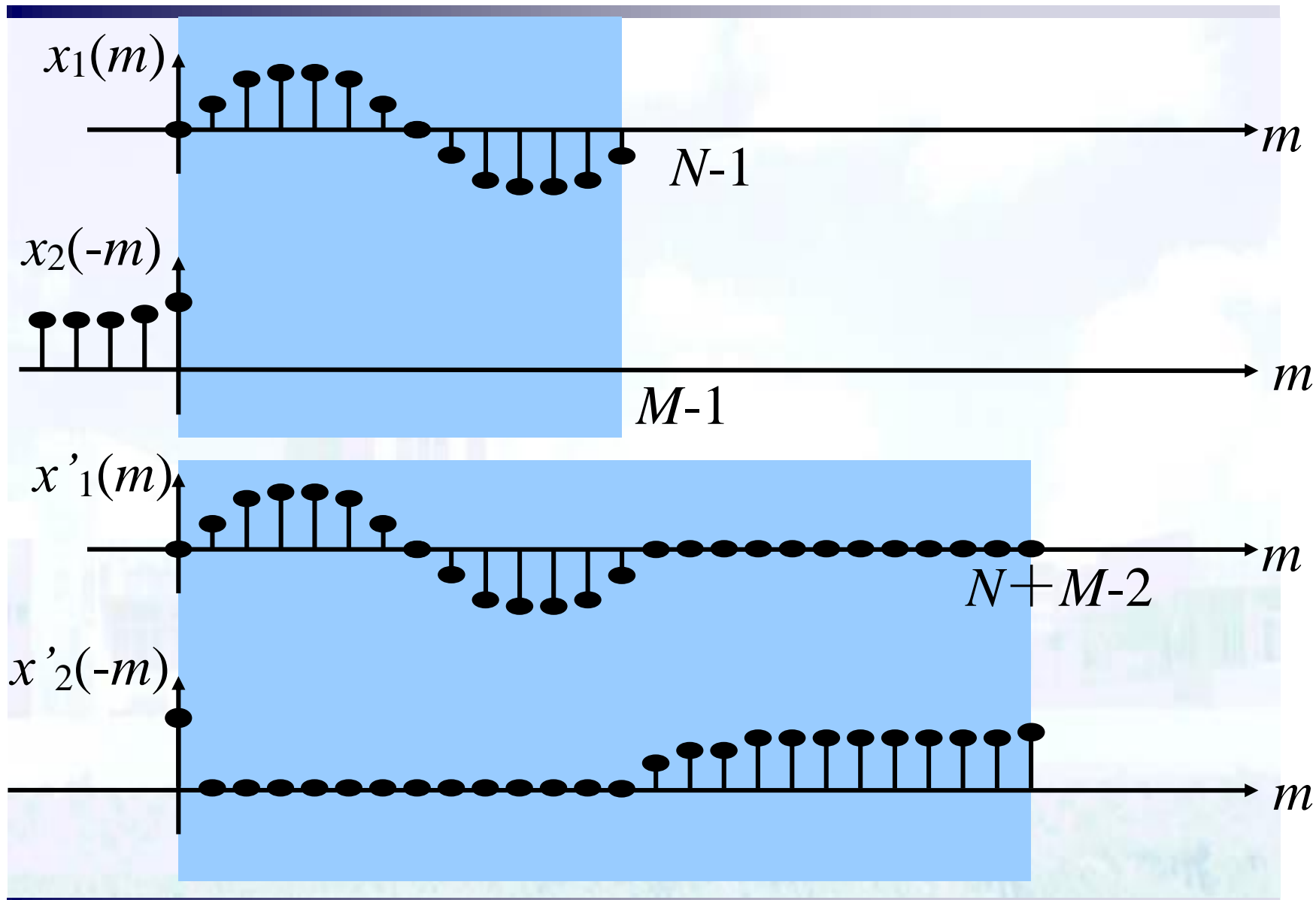
则

$$x_1'(n) \otimes x_2'(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x_1(k) x_2(n-k)$$
$$n=0, 1, 2, \dots, N+M-2$$

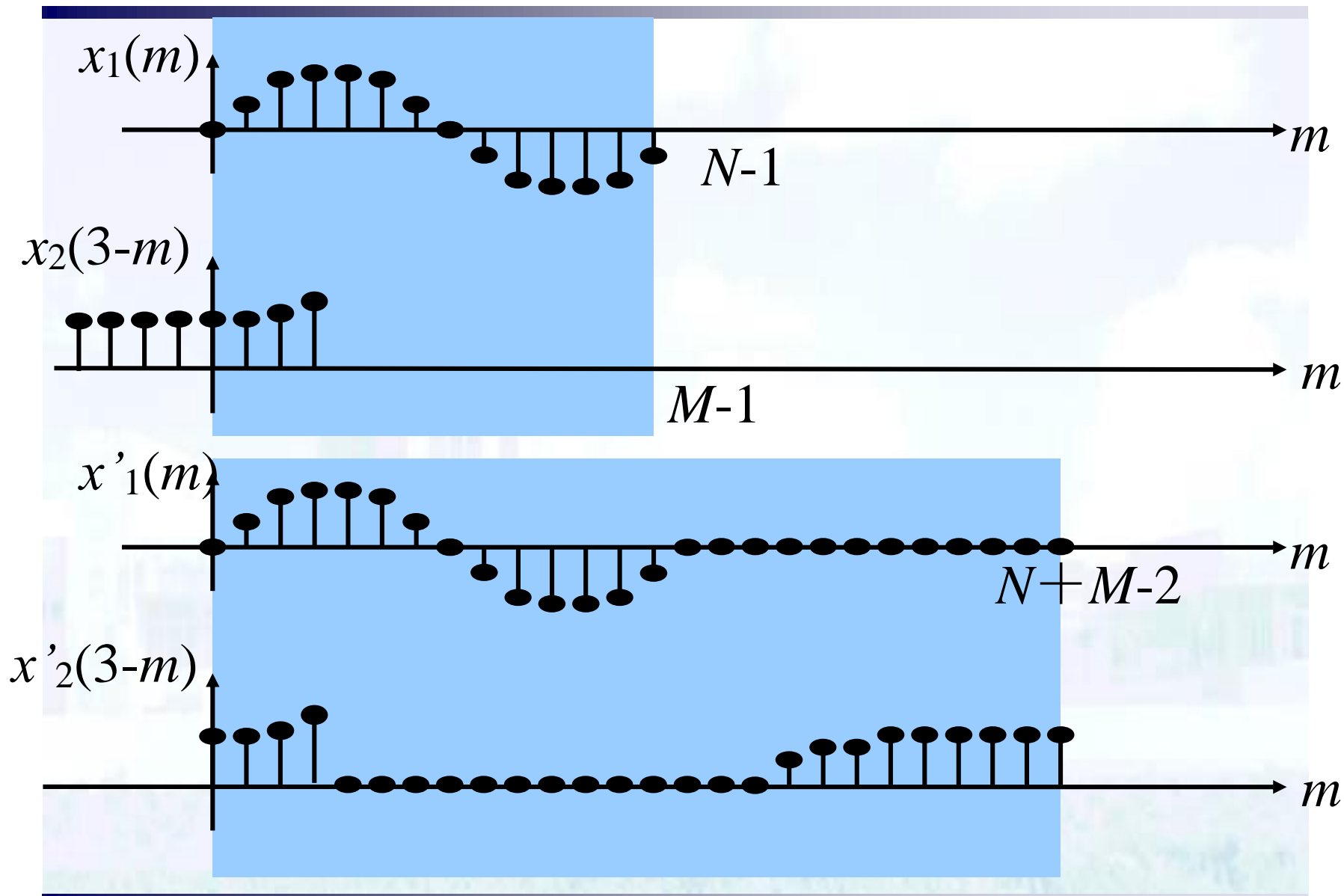
## 2.2 离散傅立叶变换的定义及性质 (DFT)



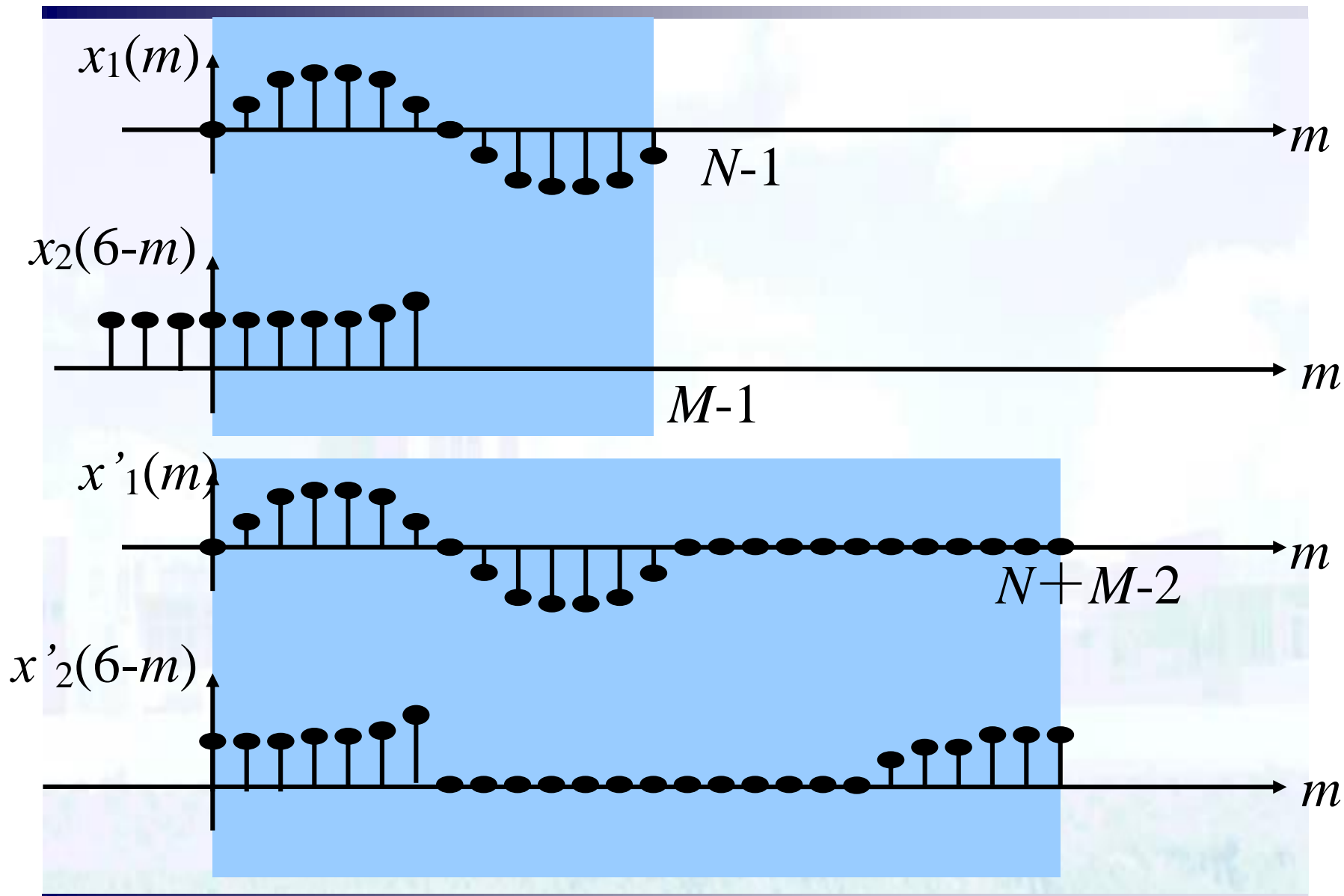
## 2.2 离散傅立叶变换的定义及性质 (DFT)



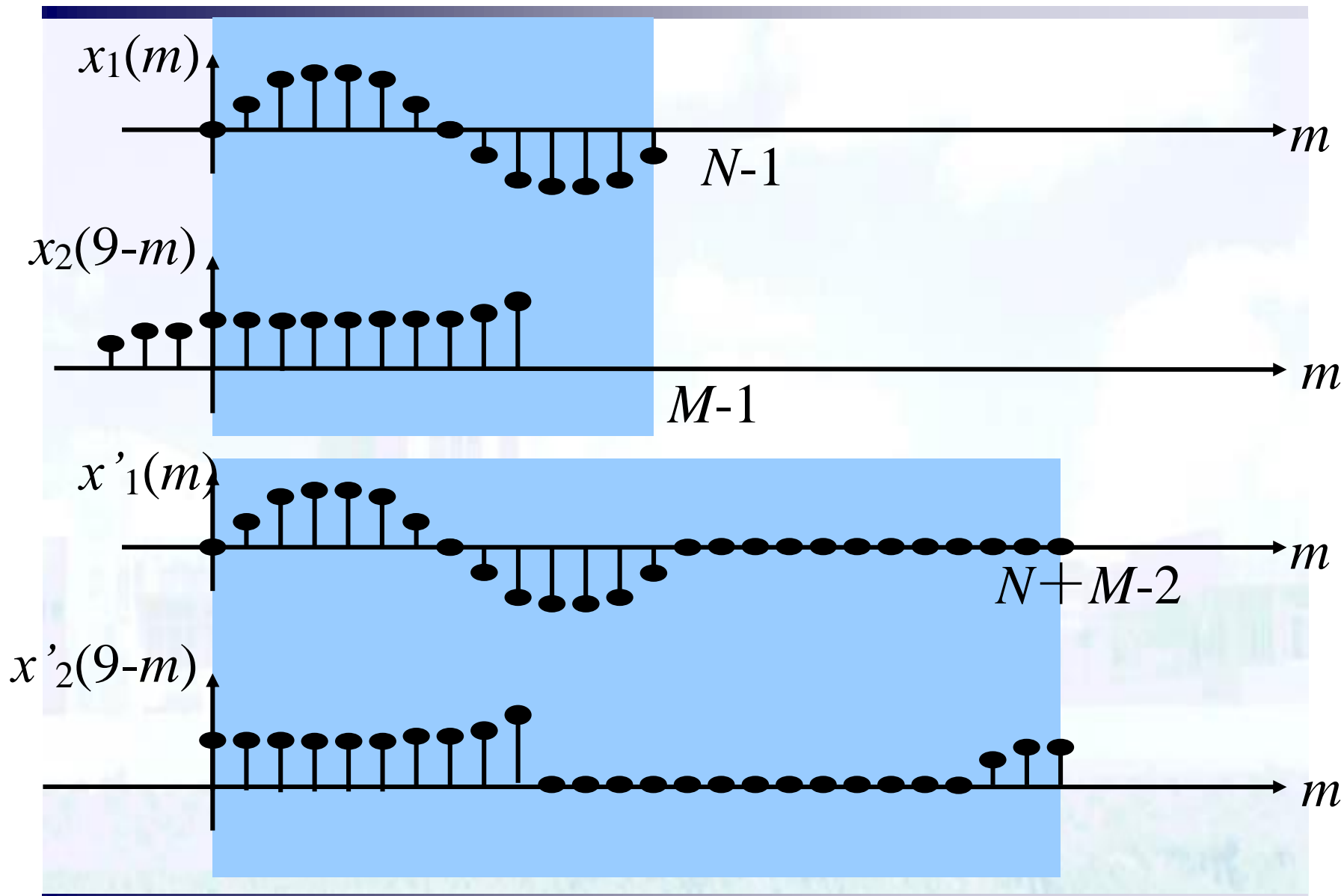
## 2.2 离散傅立叶变换的定义及性质 (DFT)



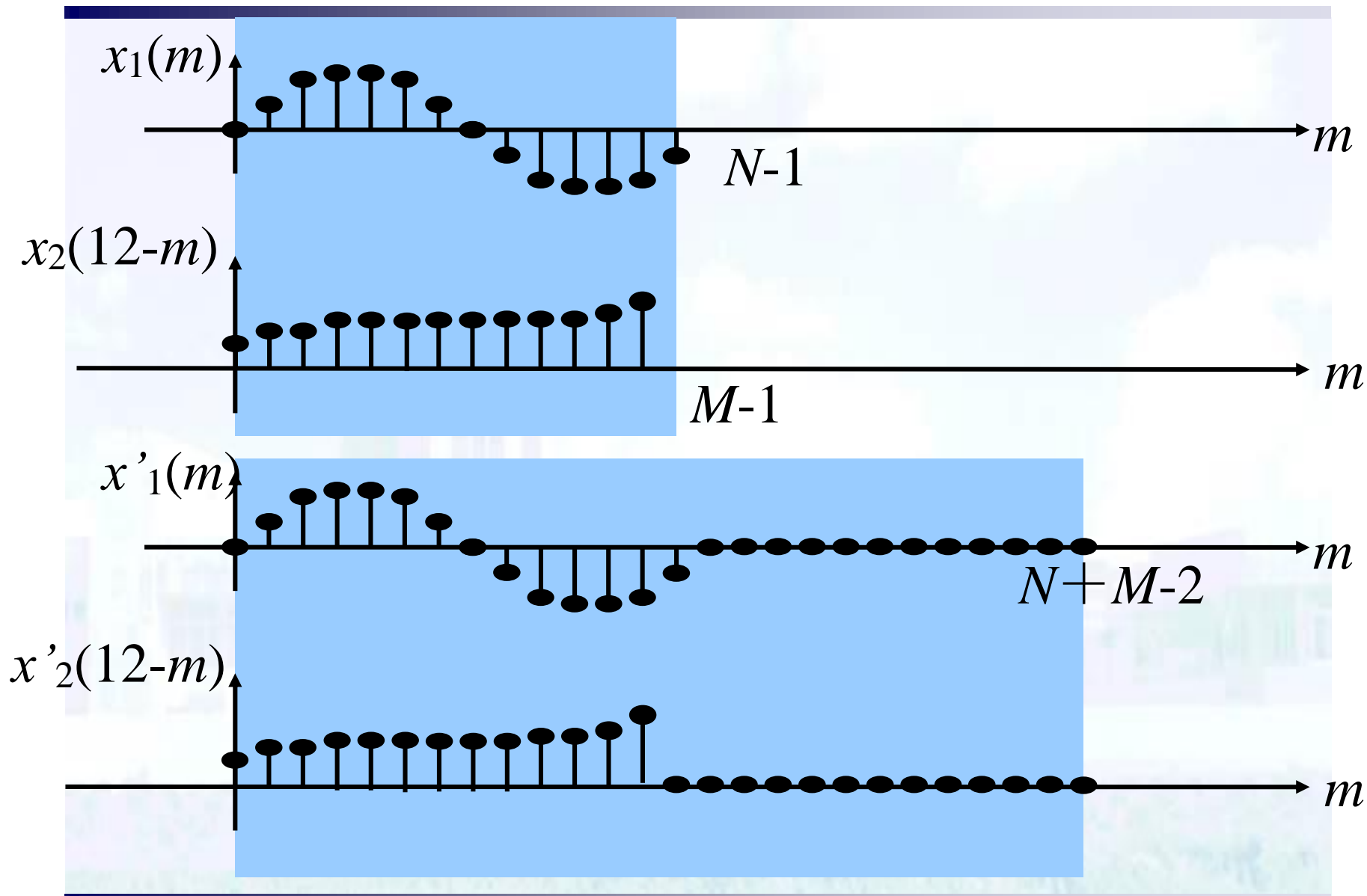
## 2.2 离散傅立叶变换的定义及性质 (DFT)



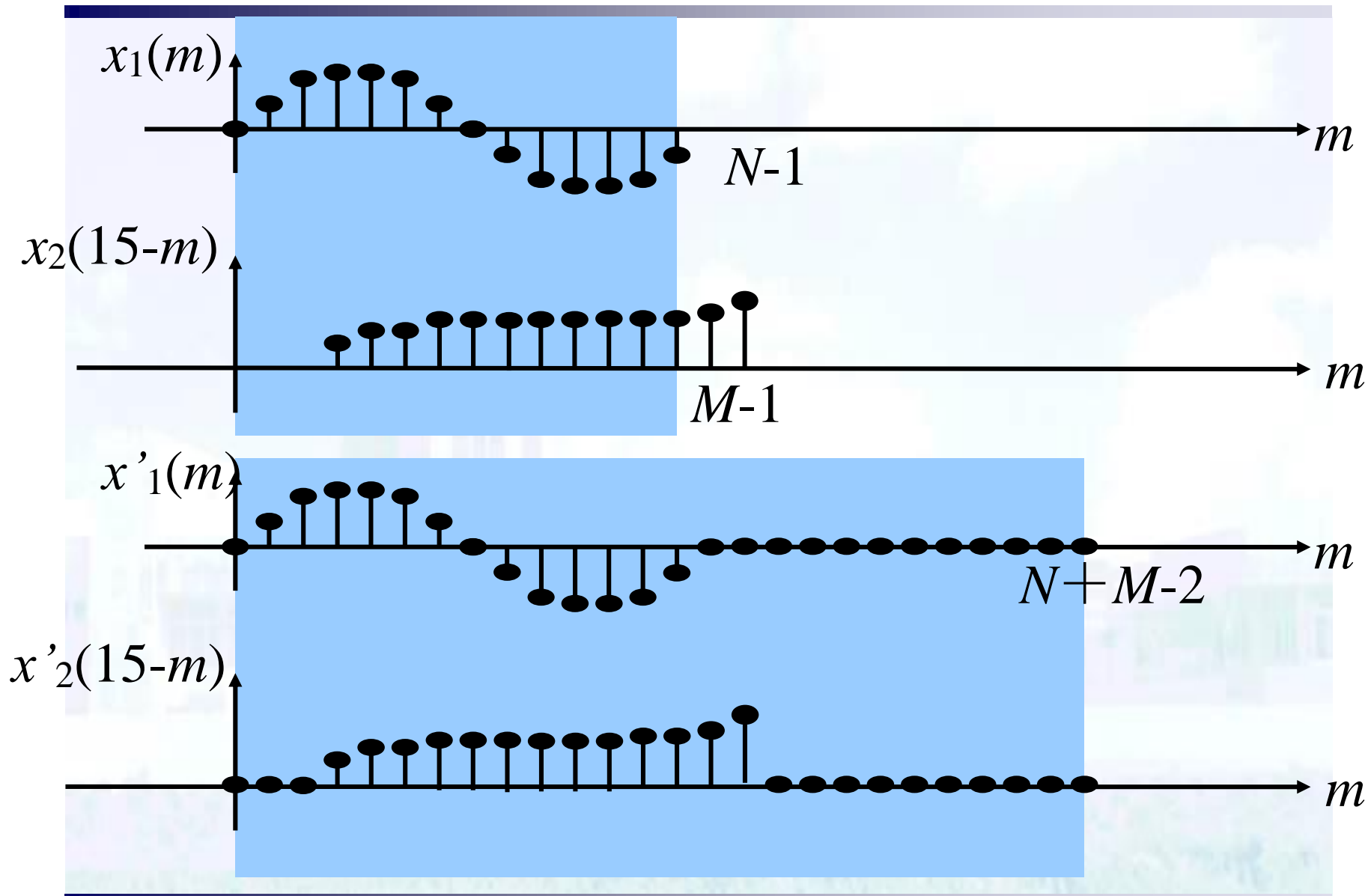
## 2.2 离散傅立叶变换的定义及性质 (DFT)



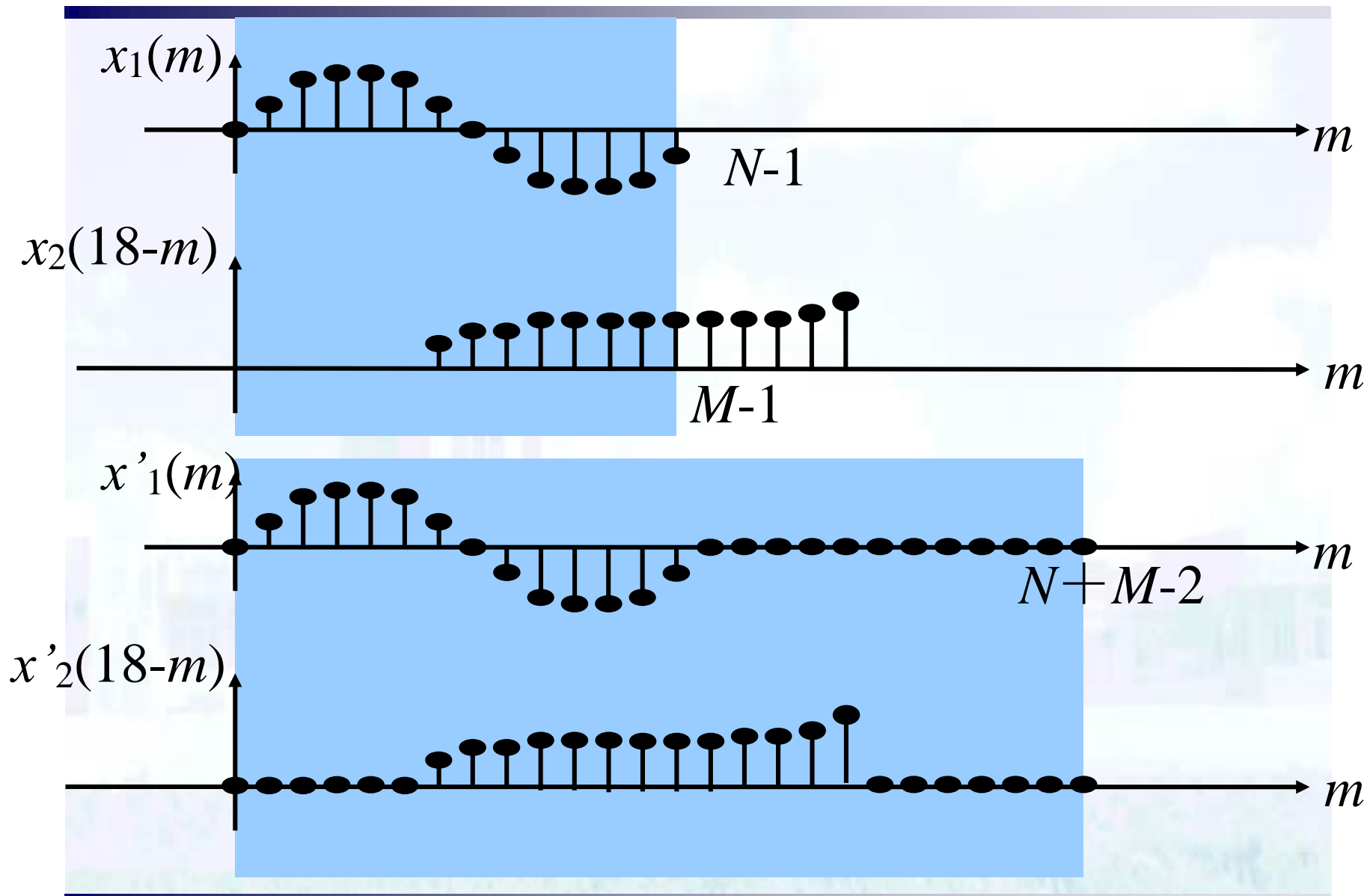
## 2.2 离散傅立叶变换的定义及性质 (DFT)



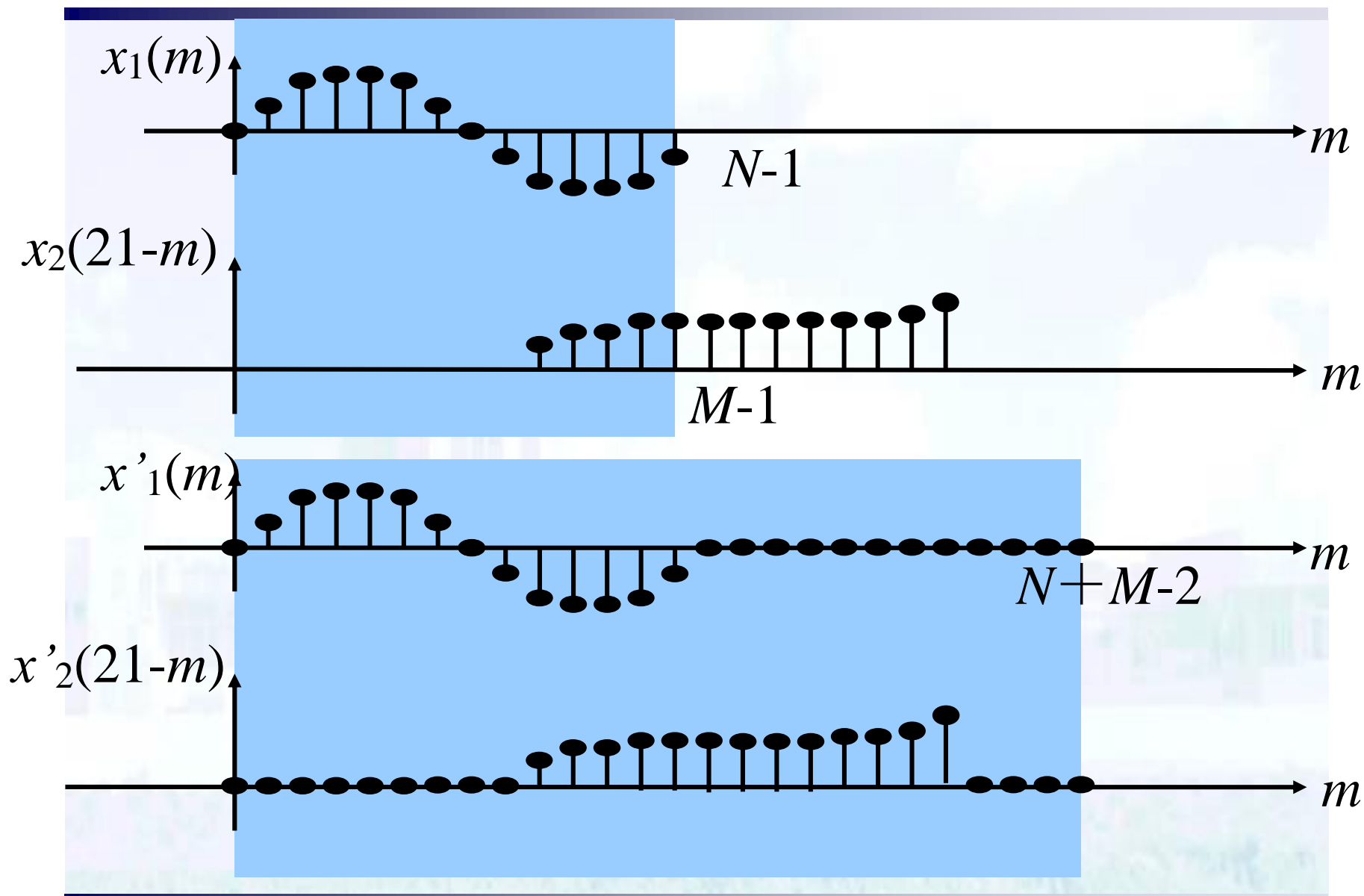
## 2.2 离散傅立叶变换的定义及性质 (DFT)



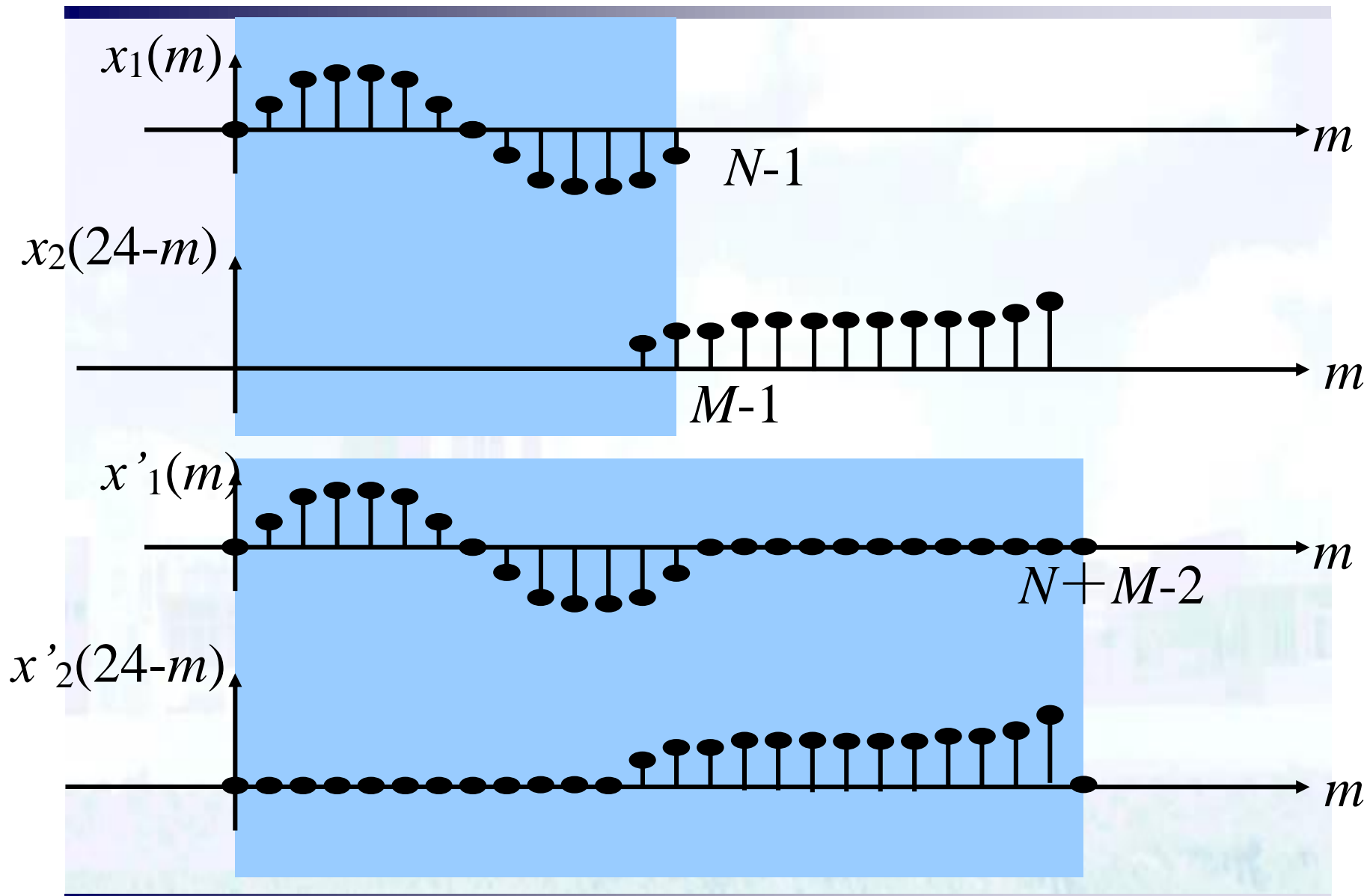
## 2.2 离散傅立叶变换的定义及性质 (DFT)



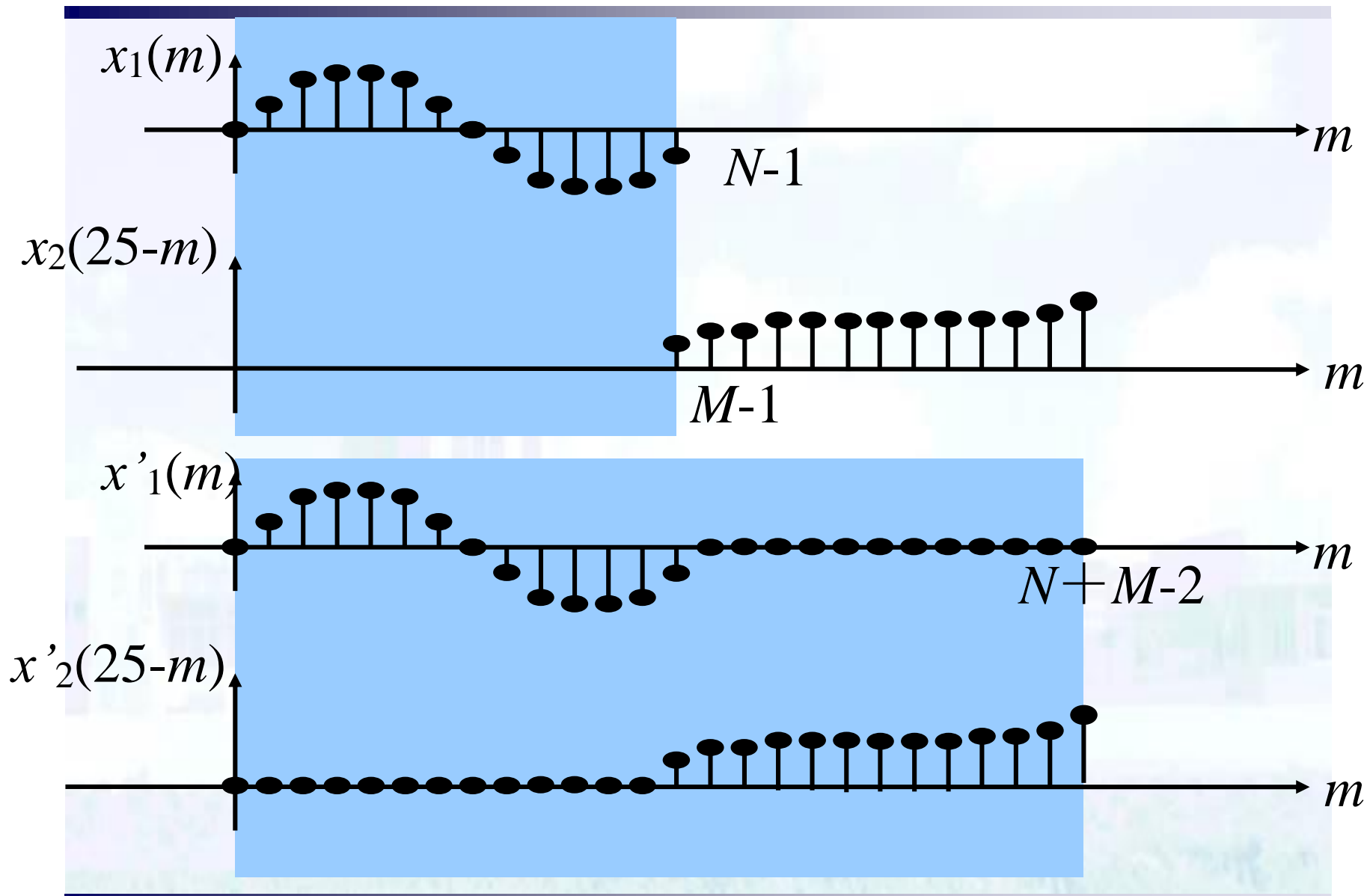
## 2.2 离散傅立叶变换的定义及性质 (DFT)



## 2.2 离散傅立叶变换的定义及性质 (DFT)



## 2.2 离散傅立叶变换的定义及性质 (DFT)



## 2.2 离散傅立叶变换的定义及性质 (DFT)

### (5) 圆周相关定理

若序列  $x_1(n)$ 、 $x_2(n)$  的圆周相关为

$$x_3(n) = \sum_{l=0}^{N-1} x_1(l)^* x_2((l+n))_N R_N(l)$$

则  $X_3(k) = X_1^*(k) X_2(k)$

当时  $x_1(n)=x_2(n)$ ，称为自相关：

$$X_3(k) = |X(k)|^2$$

## 2.2 离散傅立叶变换的定义及性质 (DFT)

### (6) Parseval定理

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2$$

利用圆周相关定理，取 $x(n) = x_1(n) = x_2(n)$

$$\begin{aligned} x_3(n) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X^*(k) X(k) W_N^{-nk} \\ &= \sum_{l=0}^{N-1} x(l)^* x((l+n))_N R_N(l) \end{aligned}$$

## 2.2 离散傅立叶变换的定义及性质 (DFT)

### (7) DFT的奇偶性与对称性

对有限长序列  $x(n)$ , 定义:

周期性共轭对称  $x((N - n))_N = x^*(n)$

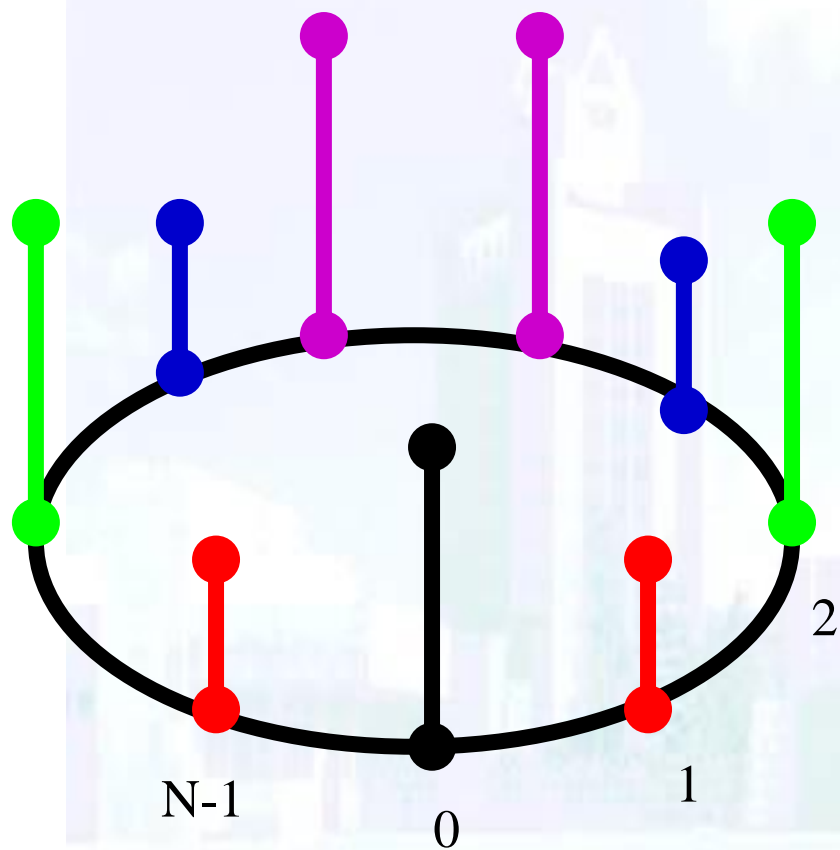
周期性共轭反对称  $x((N - n))_N = -x^*(n)$

周期性偶对称  $x((N - n))_N = x(n)$

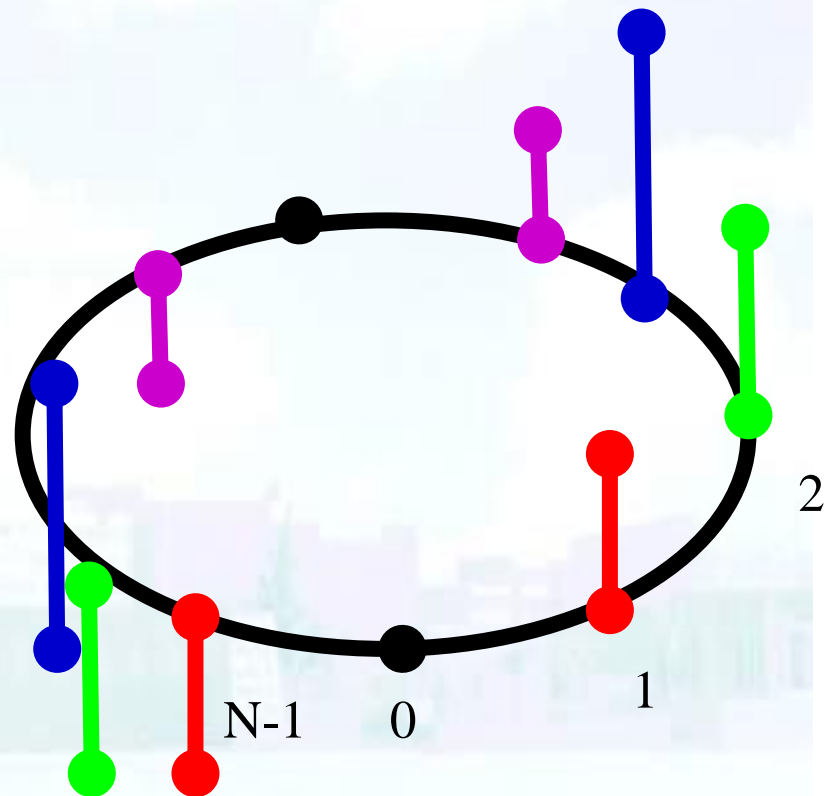
周期性奇对称  $x((N - n))_N = -x(n)$

以上定义对  $X(k)$  也适用。

## 2.2 离散傅立叶变换的定义及性质 (DFT)

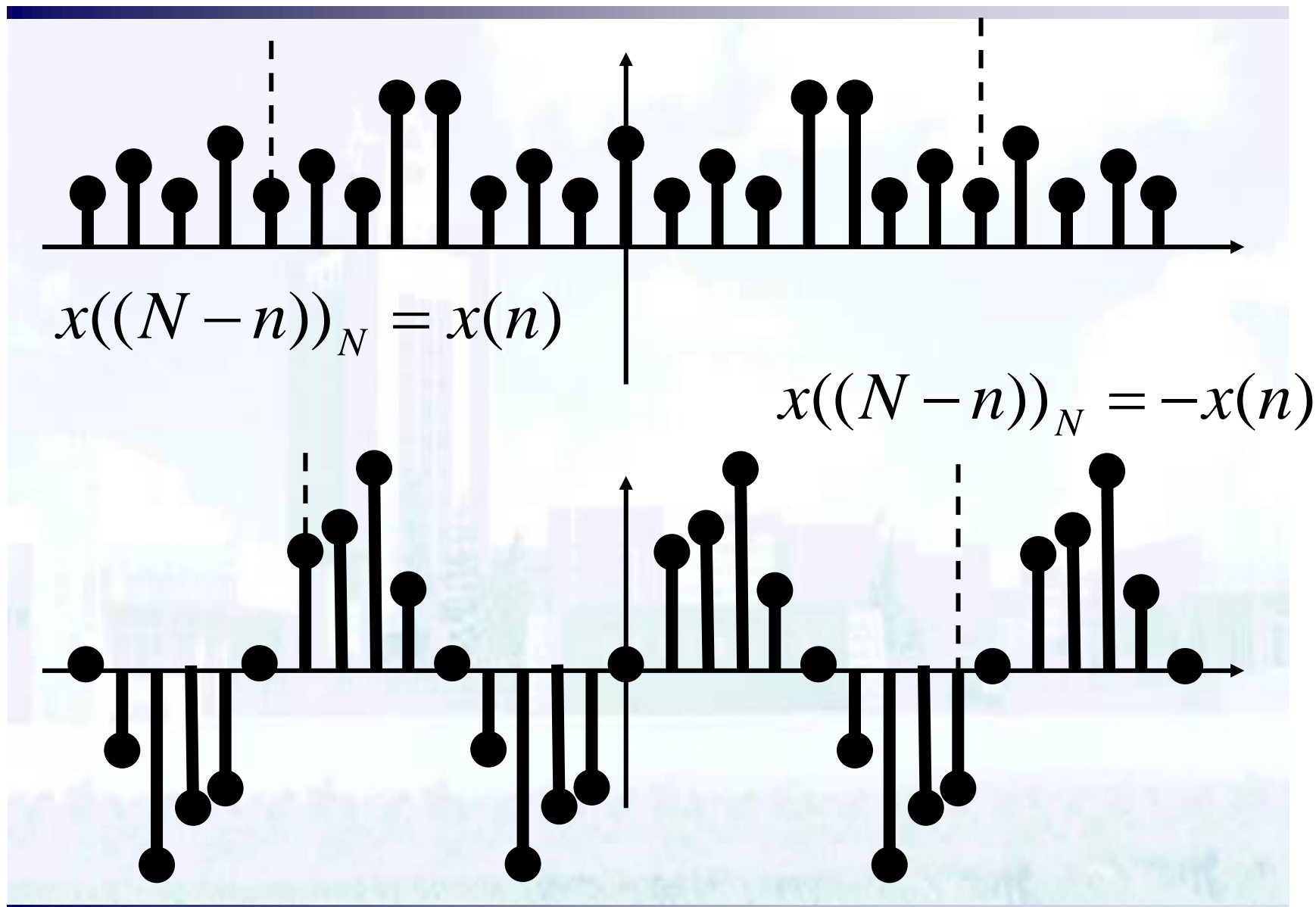


$$x((N - n))_N = x(n)$$



$$x((N - n))_N = -x(n)$$

## 2.2 离散傅立叶变换的定义及性质 (DFT)



## 2.2 离散傅立叶变换的定义及性质 (DFT)

记  $x(N-n)$  为  $x((N-n))_N$

1) 奇偶序列的DFT保持奇偶性不变

$$\text{若 } x(N-n) = \pm x(n)$$

$$\text{则 } X(N-k) = \pm X(k)$$

2) 共轭复序列  $x^*(n) \leftrightarrow X^*(N-k)$

## 2.2 离散傅立叶变换的定义及性质 (DFT)

### 3) 复数序列的实部与虚部

$$x(n) = x_r(n) + jx_i(n)$$

$$x_r(n) \leftrightarrow X_{ep}(k) \quad \text{周期性共轭对称分量}$$

$$jx_i(n) \leftrightarrow X_{op}(k) \quad \text{周期性共轭反对称分量}$$

$$X(k) = X_{ep}(k) + X_{op}(k)$$

$$X_{ep}(N-k) = X_{ep}^*(k)$$

$$X_{op}(N-k) = -X_{op}^*(k)$$

## 2.2 离散傅立叶变换的定义及性质 (DFT)

推论:

实序列  $x(n) \leftrightarrow X(k)$  共轭对称

虚序列  $jx(n) \leftrightarrow X(k)$  共轭反对称

## 2.2 离散傅立叶变换的定义及性质 (DFT)

利用对称性质，节省DFT计算量：

两个实序列  $x_1(n)$ ,  $x_2(n)$

令  $x(n) = x_1(n) + j x_2(n)$ ，计算DFT，得  $X(k)$

根据对称性，有

$$X_1(k) = \frac{1}{2} [X(k) + X^*(N-k)]$$

$$X_2(k) = \frac{1}{2j} [X(k) - X^*(N-k)]$$

## 2.2 离散傅立叶变换的定义及性质 (DFT)

实偶序列 $x(n)$ , 周期性偶对称  $x(N-n) = x(n)$

$$x(n) \text{ 实序列} \rightarrow X(k) = X_{ep}(k)$$

$$\text{有 } X_{ep}(N-k) = X_{ep}^*(k)$$

$$x(n) \text{ 偶对称} \rightarrow X_{ep}(N-k) = X_{ep}(k)$$

$$\text{故有 } X_{ep}(k) = X_{ep}^*(k)$$

$\therefore X(k)$  为实偶序列。

一般地,

$x(n)$	实偶	实奇	虚偶	虚奇
$X(k)$	实偶	虚奇	虚偶	实奇

## 2.2 离散傅立叶变换的定义及性质 (DFT)

### (8) 延长序列的DFT

若 $x(n)$ 长为 $N$ , 定义

$$g(n) = \begin{cases} x(n) & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & N \leq n \leq L-1, \quad L > N \end{cases}$$

则  $G(k) = X\left(\frac{N}{L}k\right), \quad k = 0, 1, 2, \dots, L-1.$

## 2.2 离散傅立叶变换的定义及性质 (DFT)

定义序列 $x(n)$ 的DTFT为  $X'(e^{j\omega})$

$$X'(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\omega n}$$

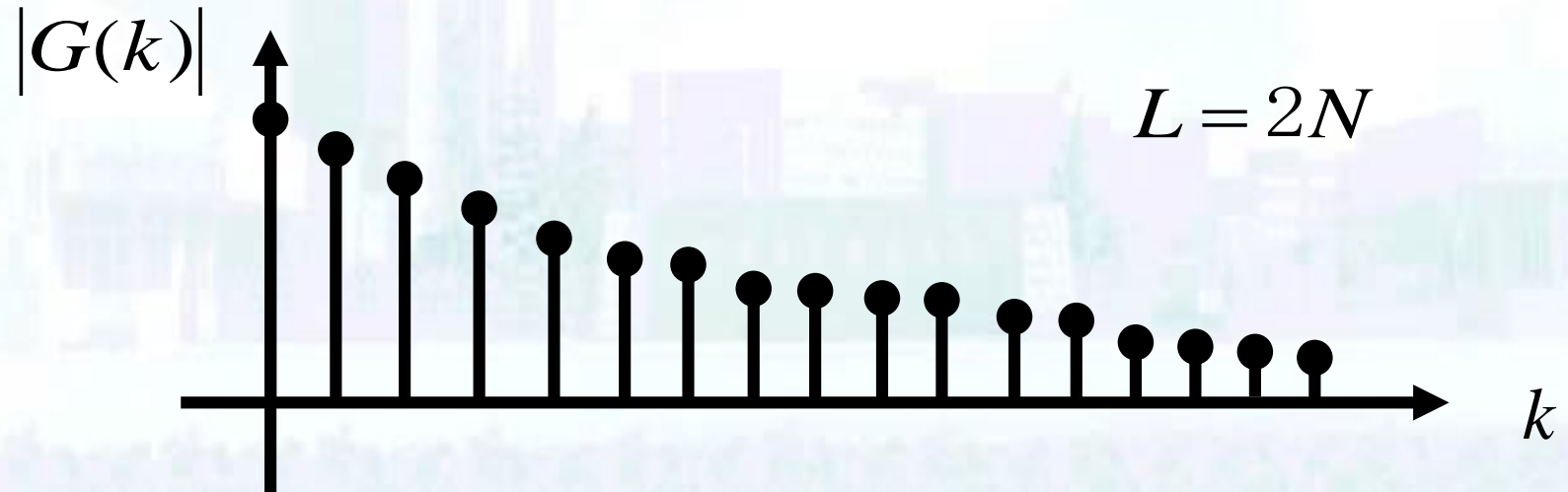
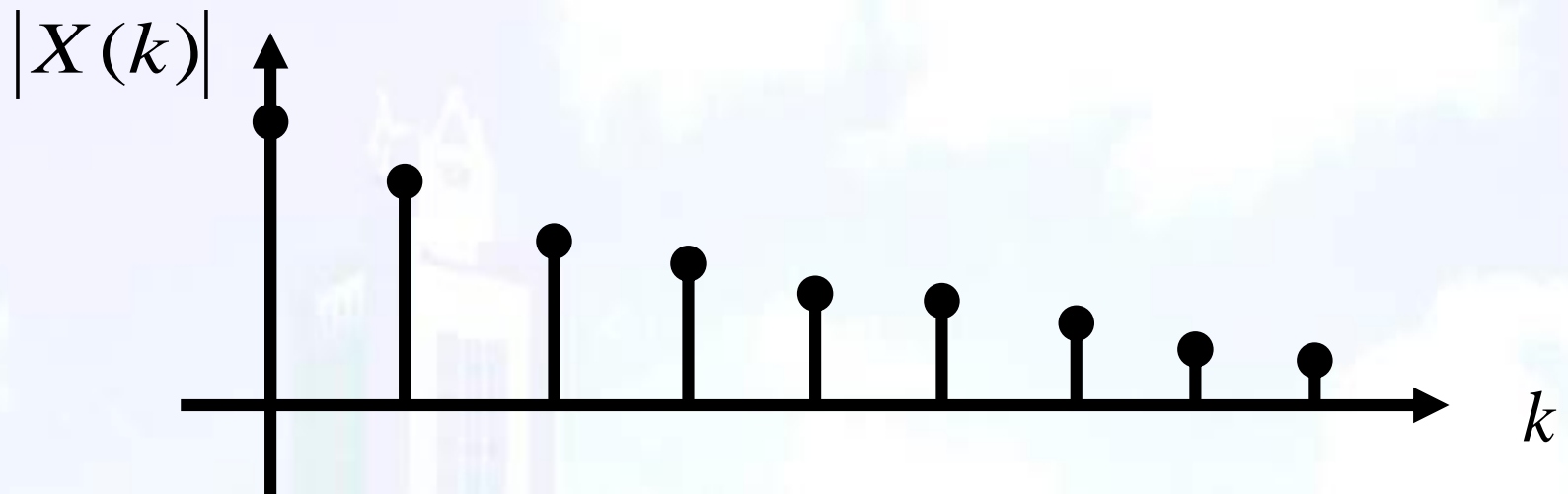
则 
$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-jn\frac{2\pi}{N}k} = X'(e^{j\frac{2\pi}{N}k})$$

$$k = 0, 1, \dots, N-1$$

$$G(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-jn\frac{2\pi}{L}k} = X'(e^{j\frac{2\pi}{L}k})$$

$$k = 0, 1, \dots, L-1$$

## 2.2 离散傅立叶变换的定义及性质 (DFT)





## 2.3 DFT与Z变换

## 2.3 DFT与Z变换

DFT是对Z变换在单位圆上的N点取样

$$X(z_k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) z^{-n} \Big|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}}$$
$$= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1.$$

对Z变换的取样，同样N点取样，可以有不同的取法。上述取法， $Z_0=1$

由取样值(即DFT)可重建Z变换

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) z^{-n} \quad \text{其中 } x(n) \text{ 由IDFT给出}$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}nk}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

## 2.3 DFT与Z变换

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=0}^{N-1} \left( \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn} \right) z^{-n} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \sum_{n=0}^{N-1} (W_N^{-k} \cdot z^{-1})^n \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \cdot \frac{1 - z^{-N}}{1 - W_N^{-k} z^{-1}} \end{aligned}$$

## 2.3 DFT与Z变换

$$X(z) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \phi_k(z)$$

内插函数

$$\phi_k(z) = \frac{1}{N} \cdot \frac{1 - z^{-N}}{1 - W_N^{-k} z^{-1}}$$

## 2.3 DFT与Z变换

在取样点  $z_k = e^{j\frac{2\pi}{N}k}$ ,  $X(z_k) = X(k)$ ,

重建值就是取样值本身

在取样点之外，可由内插公式求得任意一点  $X(z)$  的值。

在单位圆上有

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \phi_k(e^{j\omega})$$

$x(n)$ 的频率响应也可由有限的DFT点来恢复重建

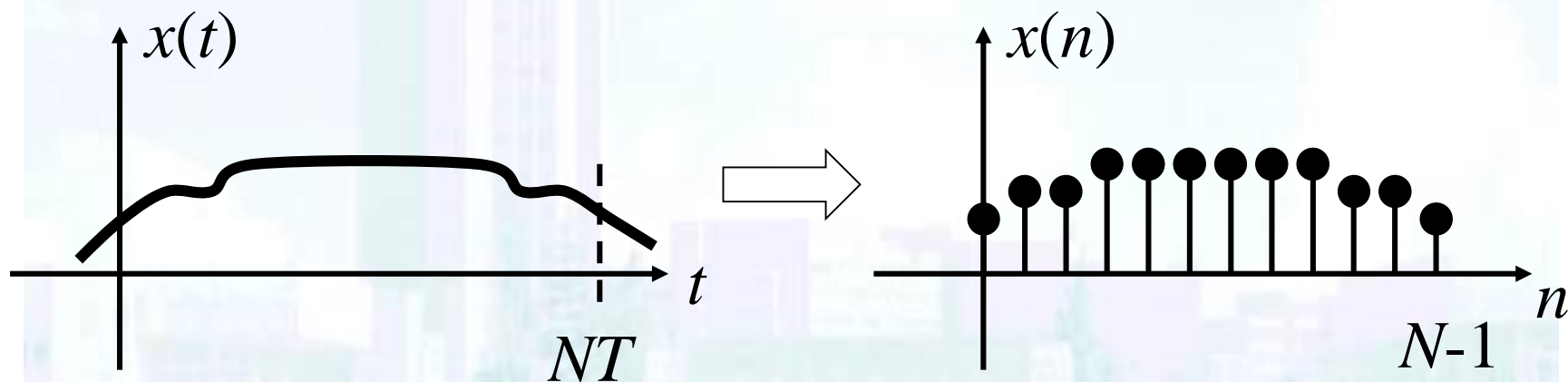


## 2.4 DFT分析要点

## 2.4 DFT分析要点

### DFT对信号的分析过程

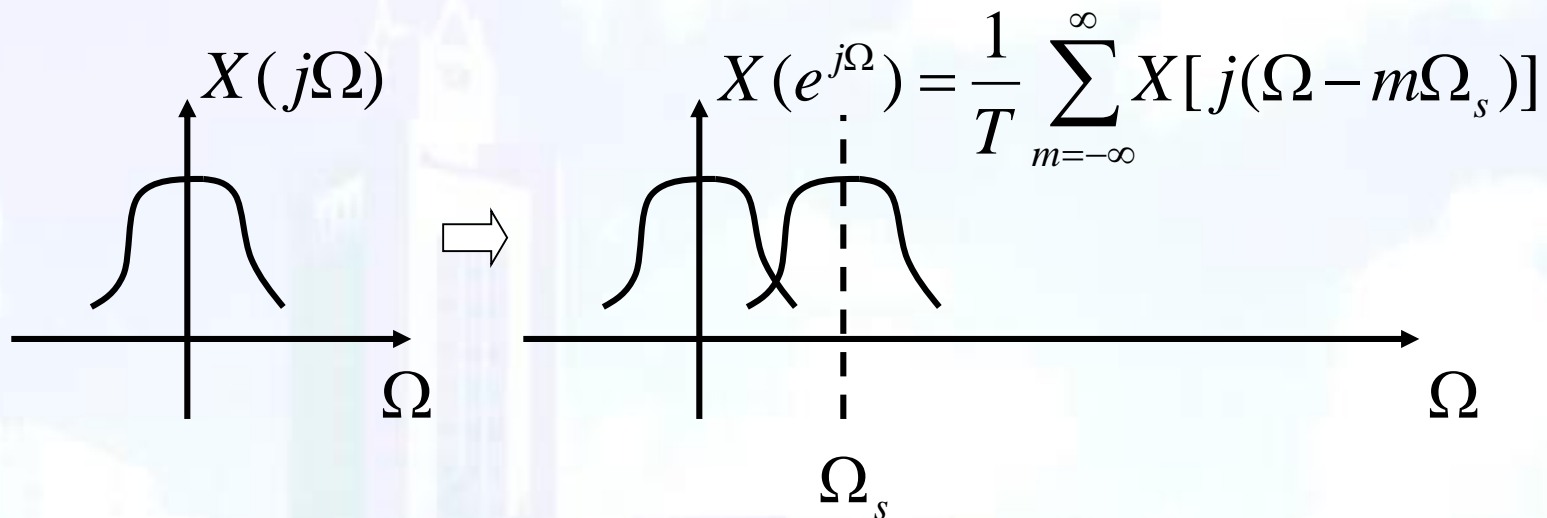
时域：1) 离散化；2) 信号截短， $N$ 点



频域： $X(e^{j\omega})$  离散化， $\Rightarrow X(k)$

## 2.4 DFT分析要点

### 一、时域取样



取样率控制：

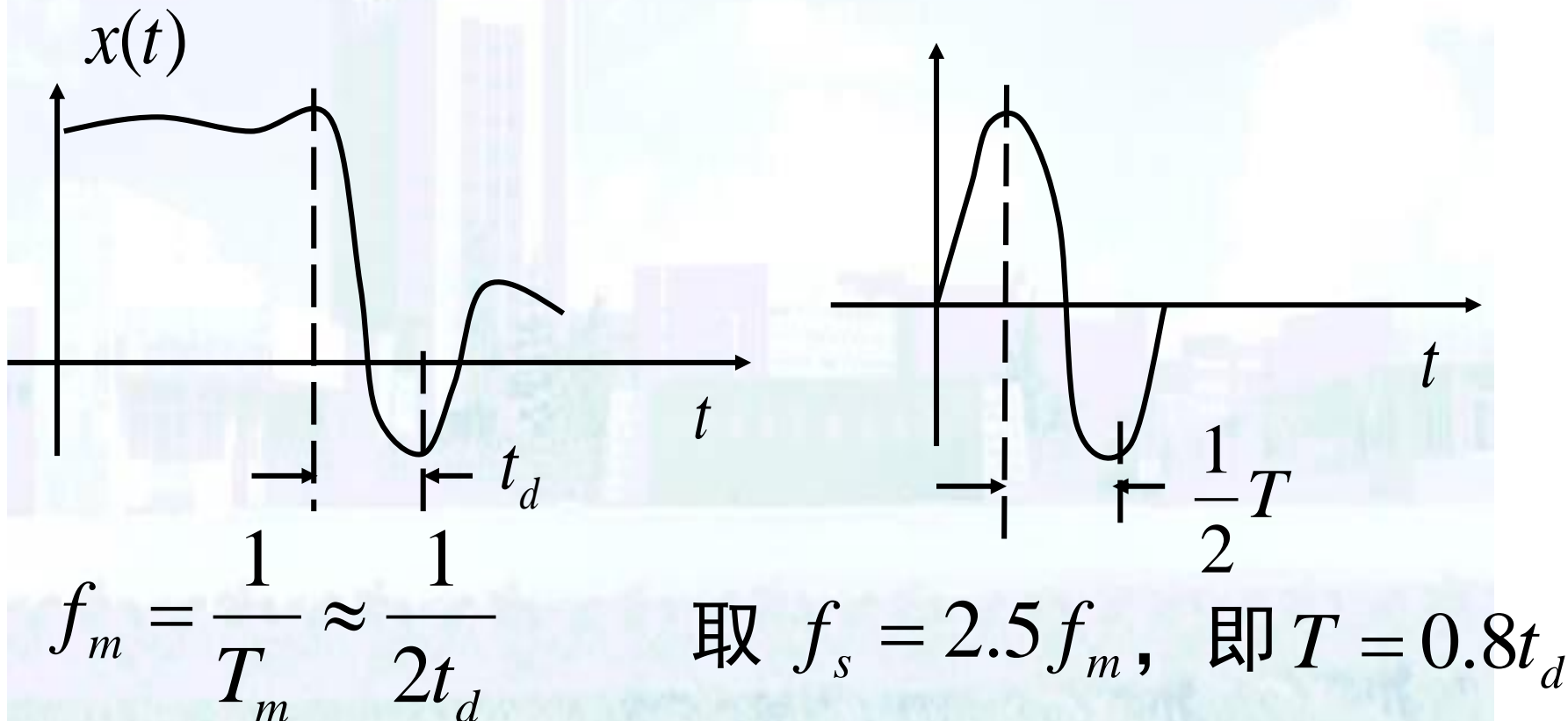
- 1) 取样率过低，导致频谱混迭；
- 2) 较密的取样导致频域频谱周期延长；
- 3) 时域取样率  $\geq 2$ 倍信号最高频率

## 2.4 DFT分析要点

### 时域取样频率的确定

#### 1) 频率未知信号

找出变化最快的相邻2点，以近似确定最高频率



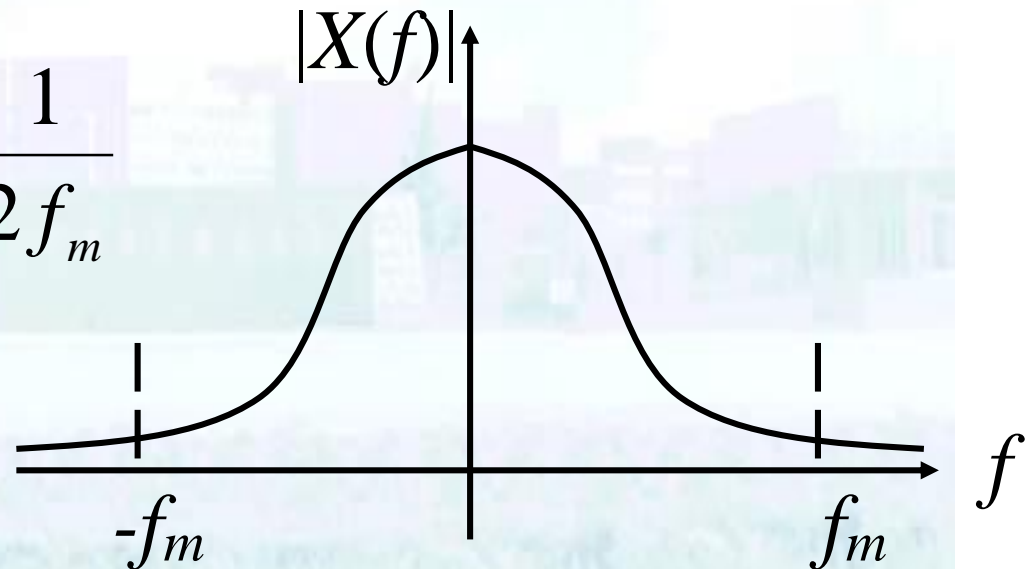
## 2.4 DFT分析要点

### 2) 频带无限信号

取  $f_m$ ，使得总能量的98%左右落在频带宽度  $(-f_m, f_m)$  内

$$\int_{-f_m}^{f_m} |X(f)|^2 df = 0.98 \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$$

取  $f_m$  为最高频率,  $T = \frac{1}{2f_m}$



### 二、频域取样

考虑连续信号,  $x(t) \xleftrightarrow{F} X(j\Omega)$

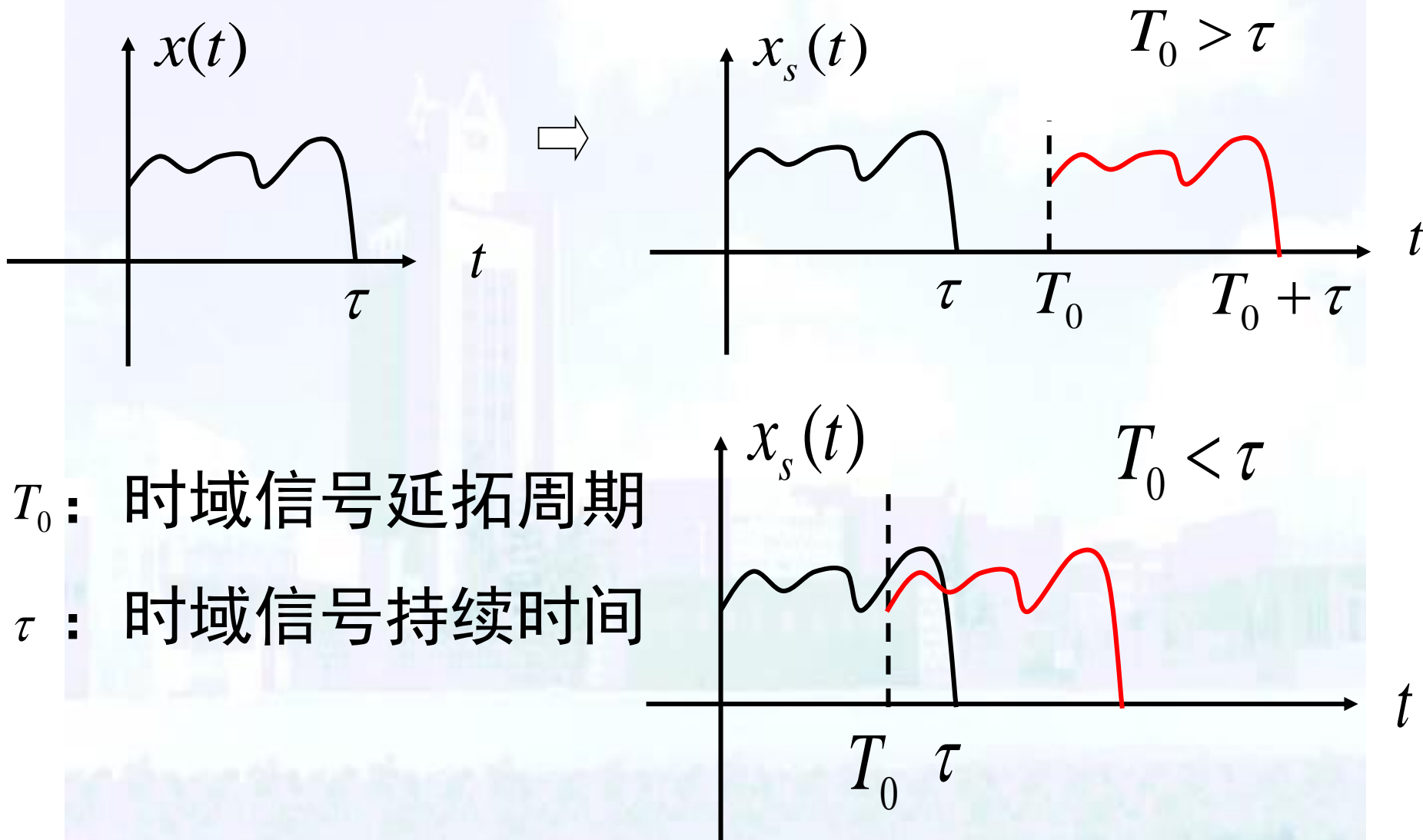
对  $X(j\Omega)$  以取样间隔  $\Omega_0$  进行取样:

$$X_s(j\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j\Omega) \delta(\Omega - k\Omega_0)$$

$$\Rightarrow x_s(t) = \frac{1}{\Omega_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t - kT_0) \quad T_0 = \frac{2\pi}{\Omega_0}$$

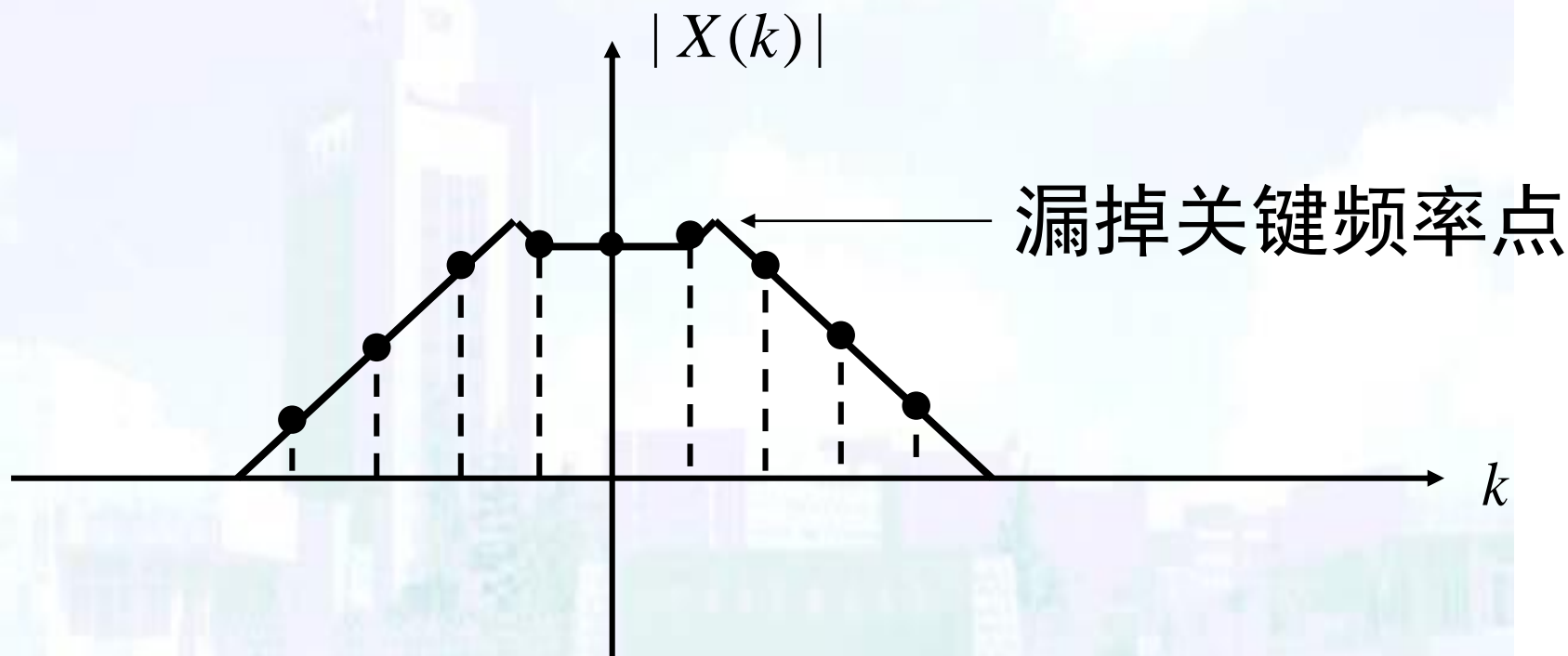
频率取样造成时域信号的周期延拓

## 2.4 DFT分析要点



## 2.4 DFT分析要点

造成时域混迭，在频域上的解释：栅栏效应



频域采样密度不够而导致

## 2.4 DFT分析要点

### 频域取样定理

时间受限信号，时长 $\tau$ ，当频域取样间隔满足

$$\Omega_0 \leq \frac{2\pi}{\tau},$$

能够从频谱样点  $X(jk\Omega_0)$  恢复原连续频谱，

$$X(j\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\Omega_0) \cdot \frac{\sin\left(\frac{\Omega}{\Omega_0} - k\right)\pi}{\left(\frac{\Omega}{\Omega_0} - k\right)\pi}$$

控制因素：频域取样间隔  $\Omega_0$

频域取样导致时域信号周期延拓，  
栅栏效应是否发生取决于频域取样密度

## 2.4 DFT分析要点

### DFT情形

时域信号  $x(t)$  时长有限  $\tau$ ，形成抽样序列  $x(n)$ ，长度  $NT = \tau$

$$\text{频谱周期 } \Omega_s = \frac{2\pi}{T}$$

频域取样点数仍为  $N$ ，则频域取样间隔为

$$\Omega_0 = \frac{\Omega_s}{N} = \frac{2\pi}{NT} = \frac{2\pi}{\tau}$$

$$\text{时域信号延拓周期 } T_0 = \frac{2\pi}{\Omega_0} = NT$$

三、时域上的取样参数： $T$ 与 $N$

频域分辨率

$$\Omega_0 = \frac{\Omega_s}{N} = \frac{2\pi}{NT}$$


取决于时域信号采样范围 $NT$

$T$ 一定，增加采样点数 $N$ ，

⇒ 时域信号采样范围增大

⇒ 频域分辨率提高

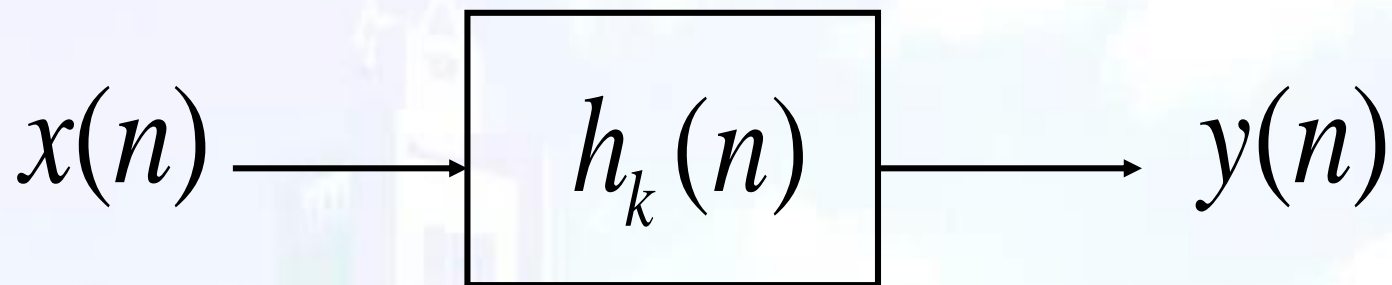
有限长序列补零处理，可提高频域分辨率，  
不提供额外信息量



## 2.5 DFT的滤波特性

## 2.5 DFT的滤波特性

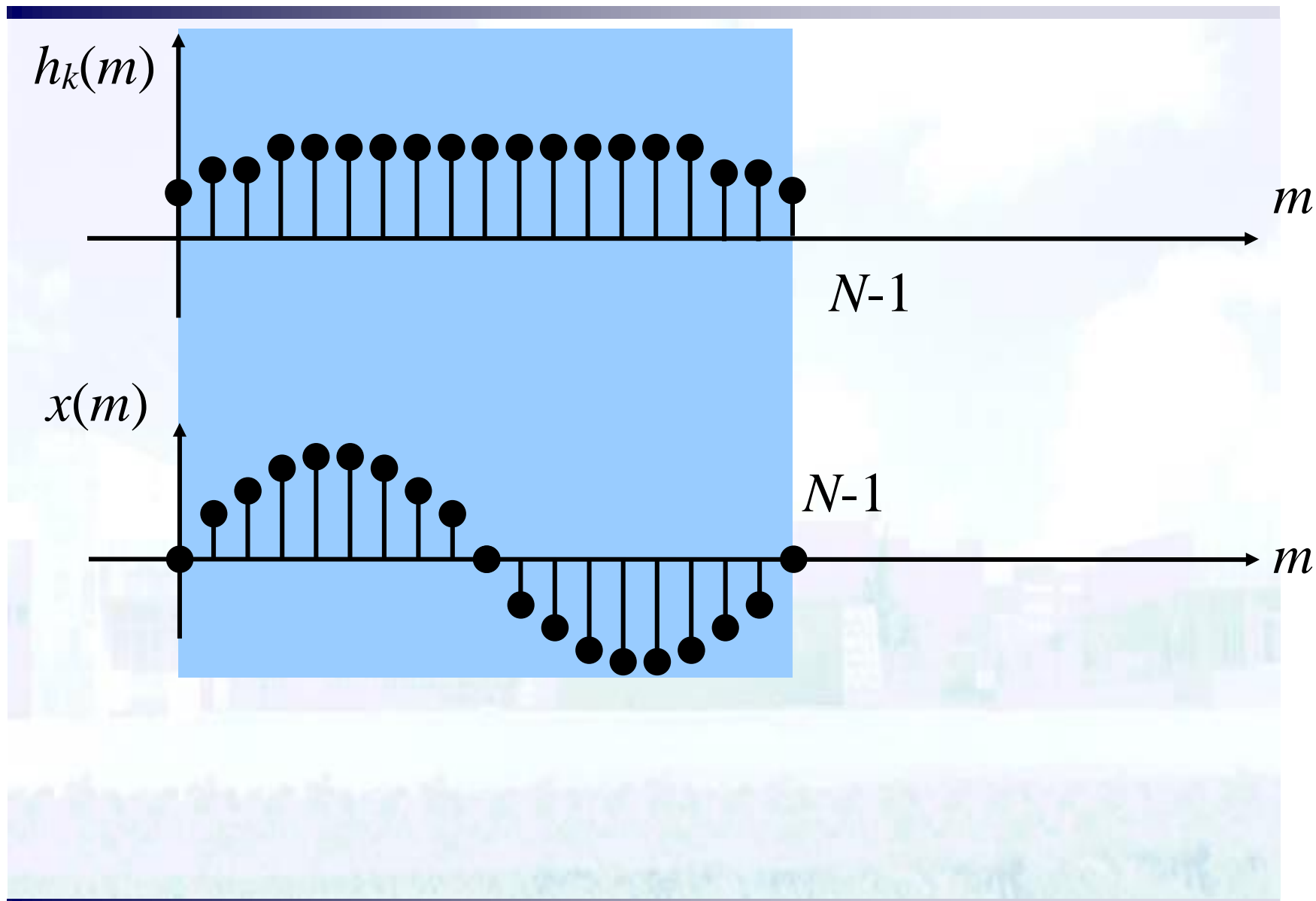
考虑一有限长序列  $x(n)$  通过有限响应滤波器



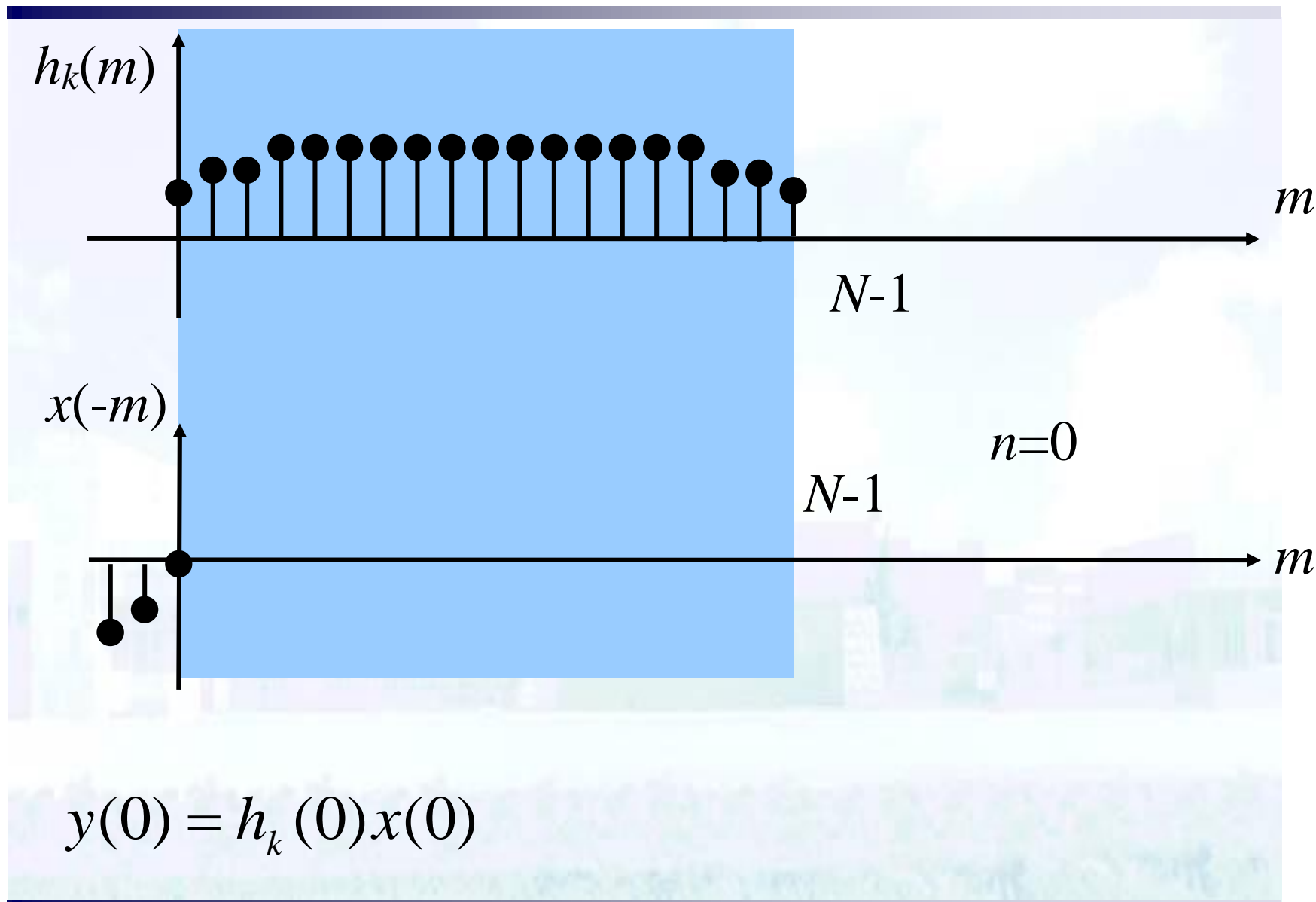
$$h_k(n) = \begin{cases} W_N^{(N-1-n)k} & n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$$y(n) = \sum_{m=0}^{N-1} h_k(m) x(n-m)$$

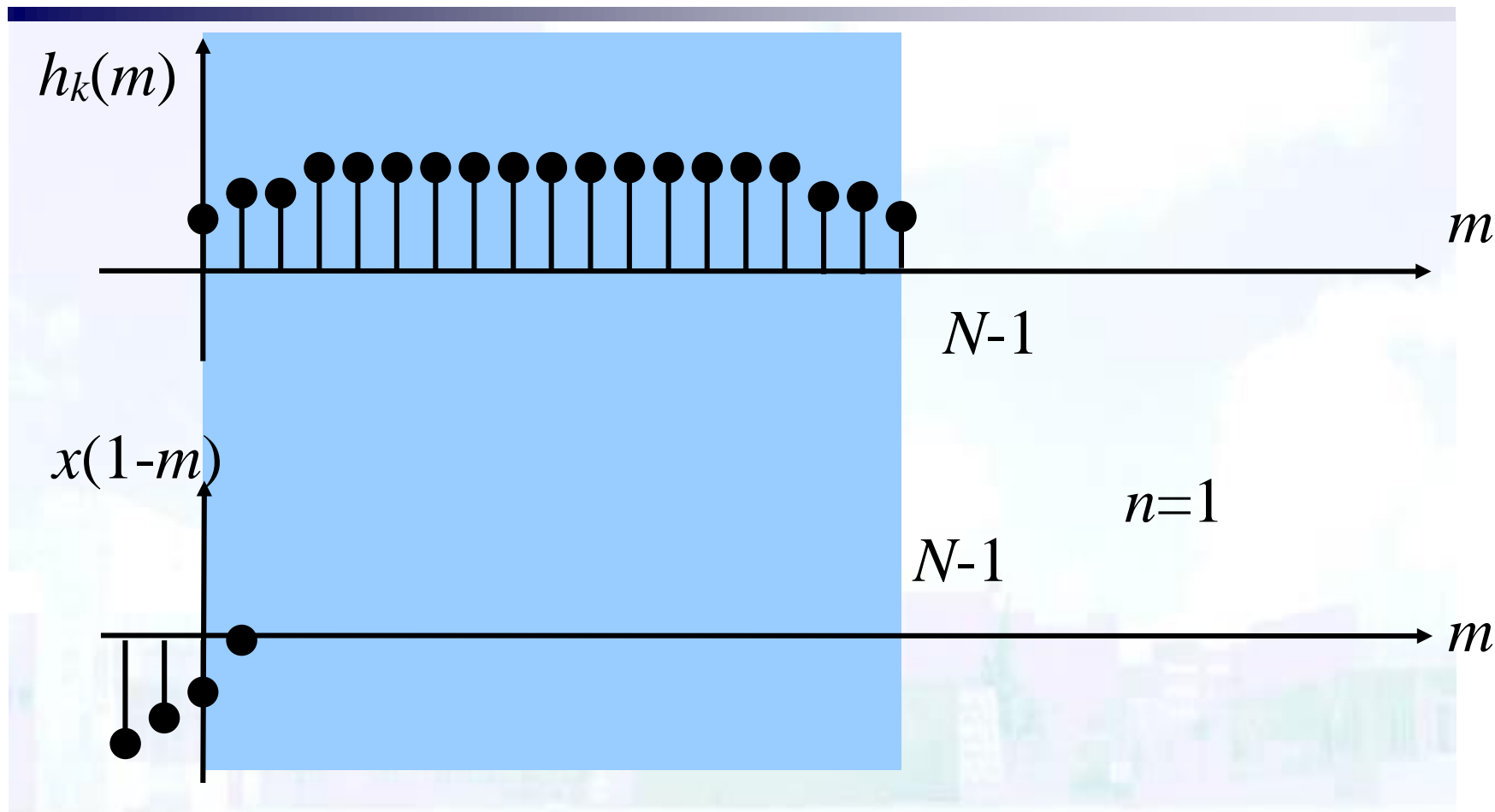
## 2.5 DFT的滤波特性



## 2.5 DFT的滤波特性

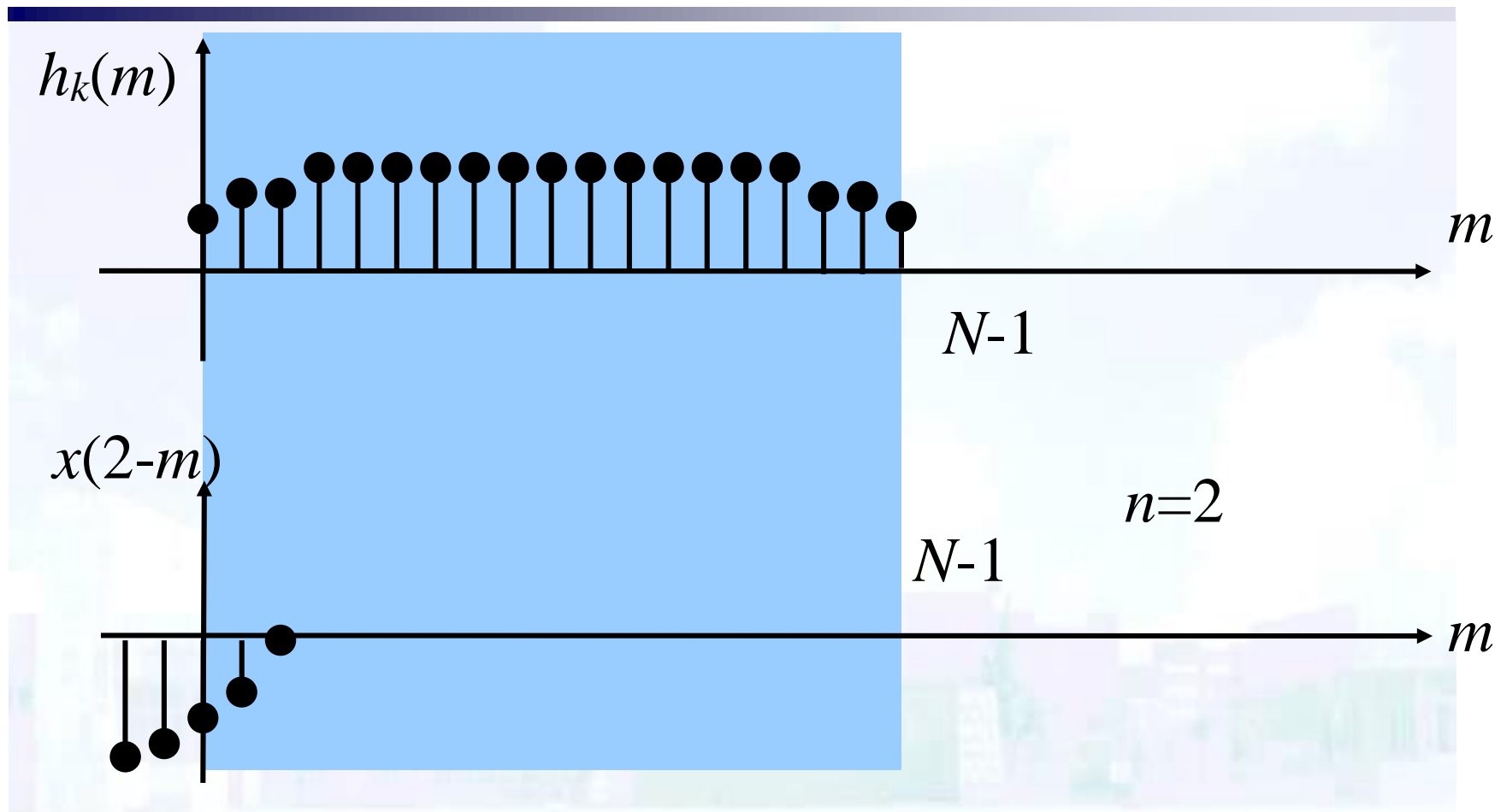


## 2.5 DFT的滤波特性



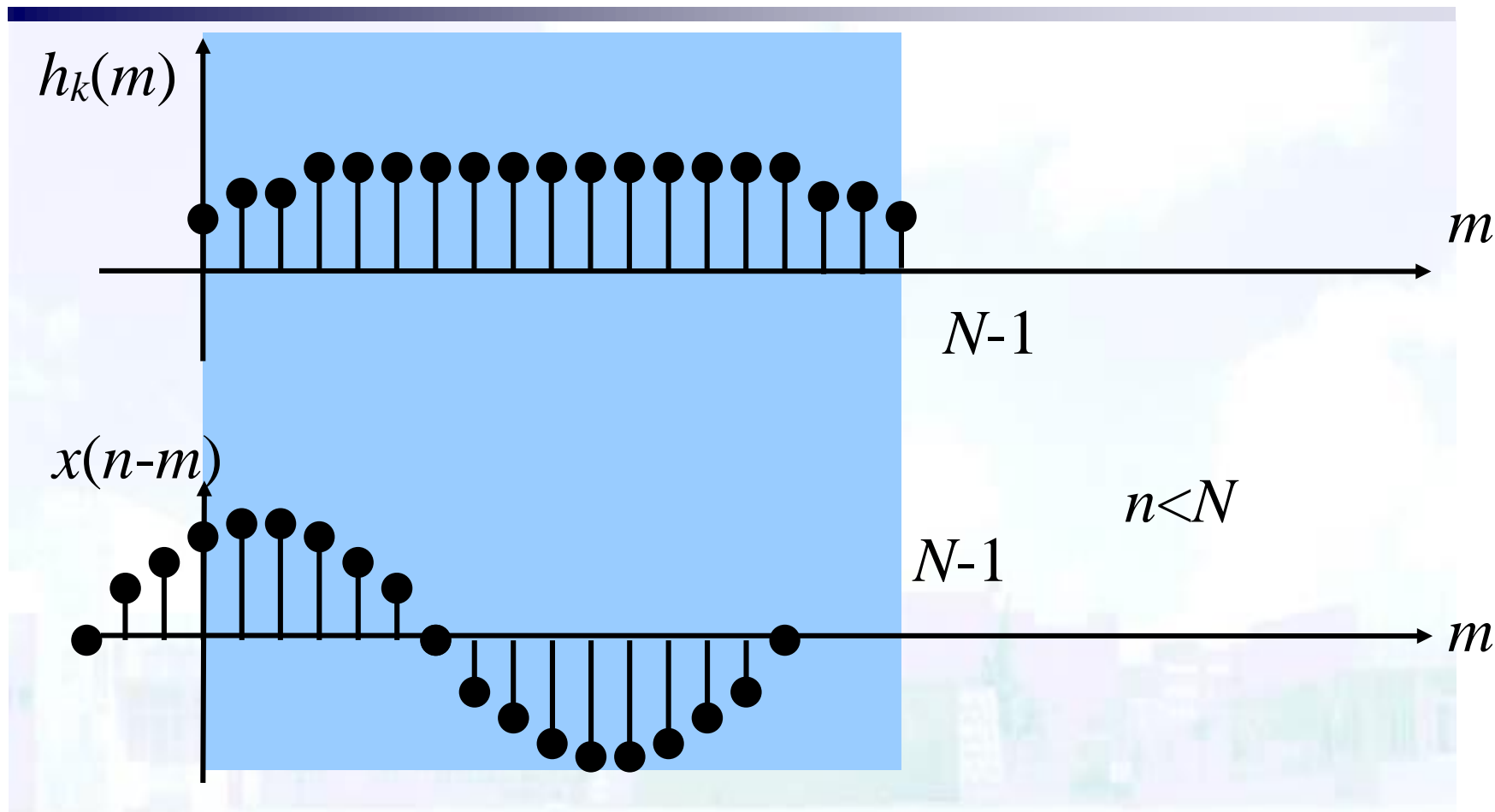
$$y(1) = h_k(0)x(1) + h_k(1)x(0)$$

## 2.5 DFT的滤波特性



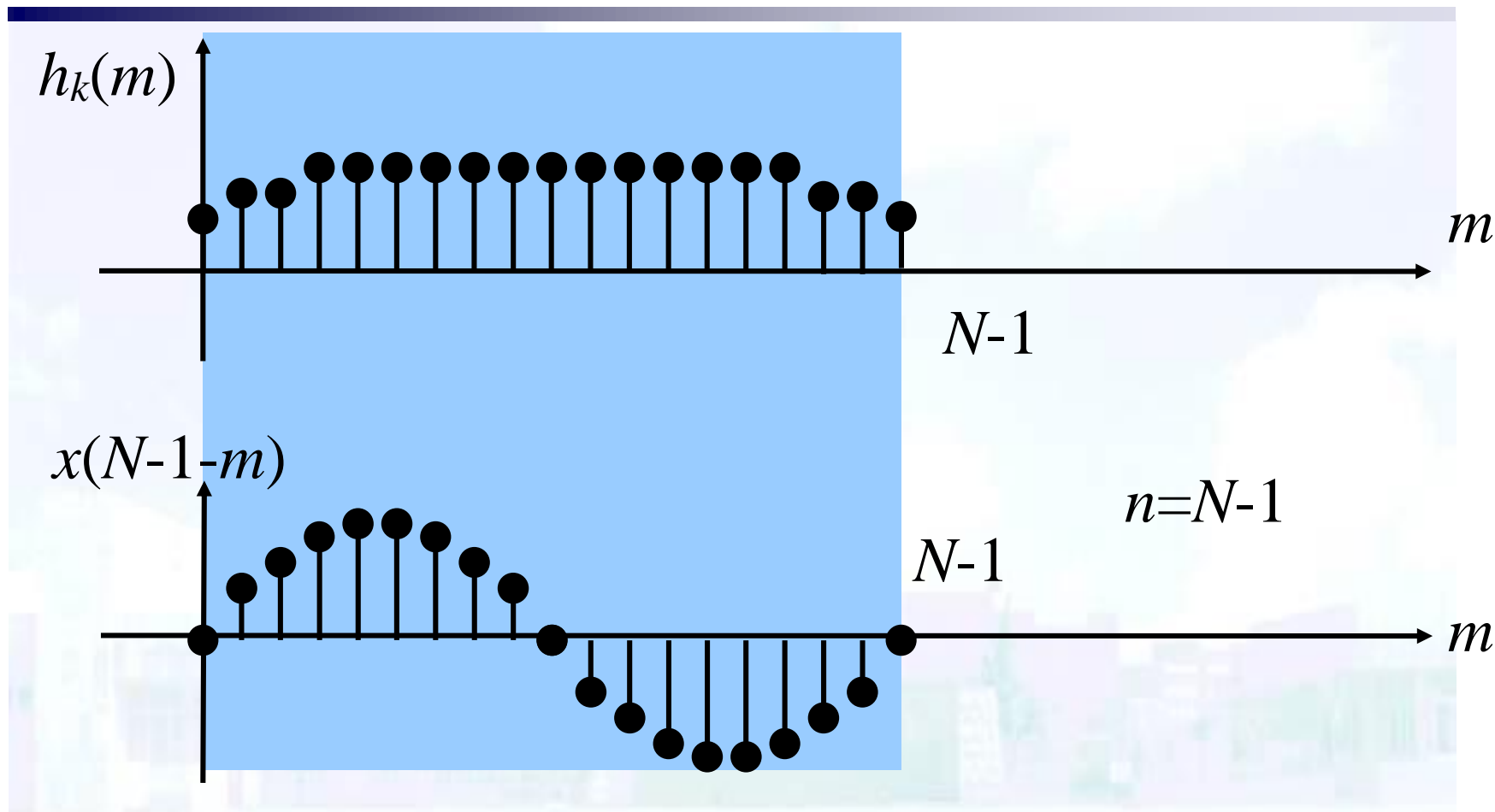
$$y(2) = h_k(0)x(2) + h_k(1)x(1) + h_k(2)x(0)$$

## 2.5 DFT的滤波特性



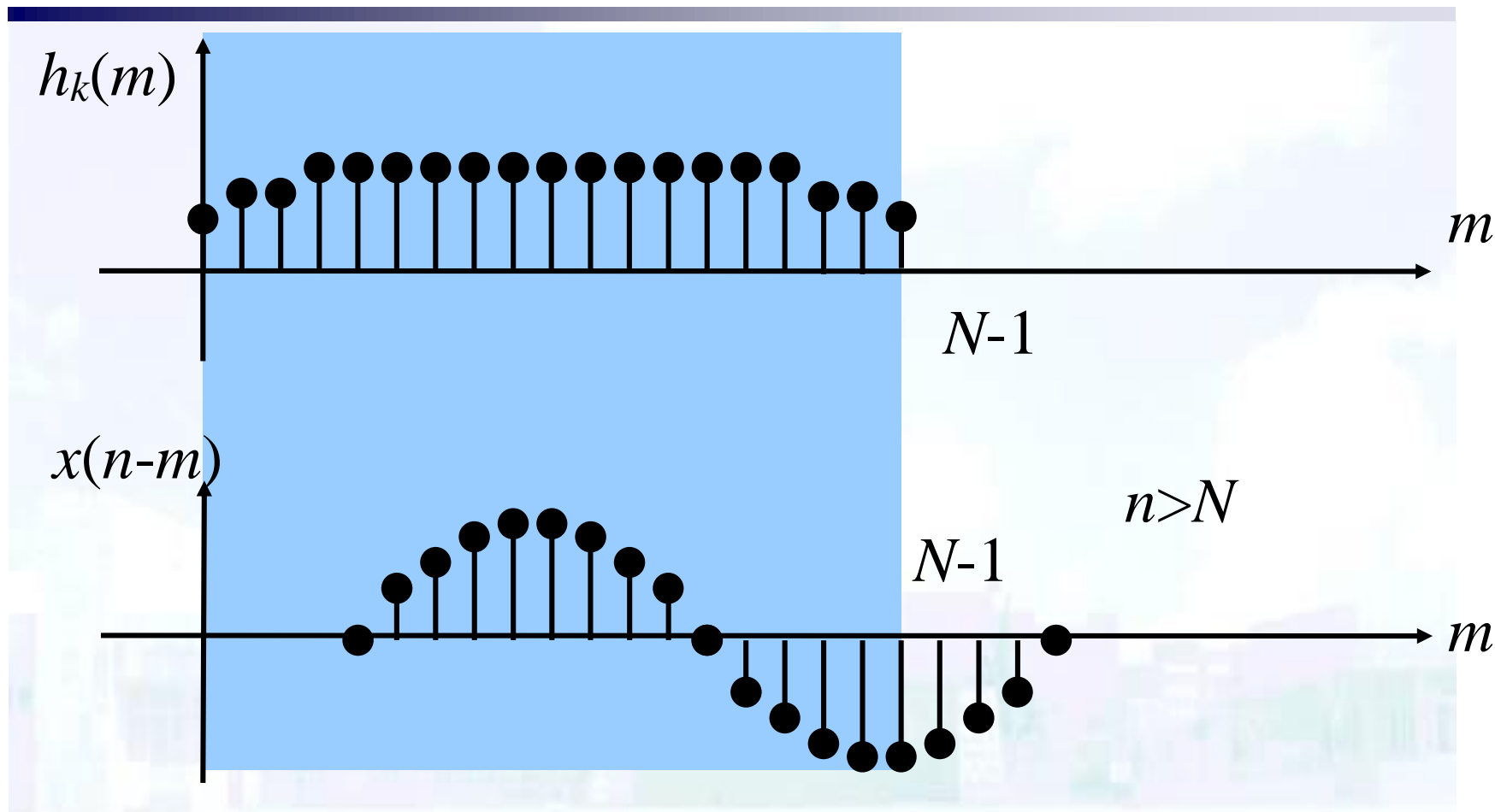
$$y(n) = h_k(0)x(n) + \cdots + h_k(n-1)x(1) + h_k(n)x(0)$$

## 2.5 DFT的滤波特性



$$y(N-1) = \sum_{m=0}^{N-1} h_k(m) x(N-1-m)$$

## 2.5 DFT的滤波特性



$$y(n) = h_k(n - N + 1)x(N - 1) + \cdots + h_k(N - 1)x(n - N + 1)$$

## 2.5 DFT的滤波特性

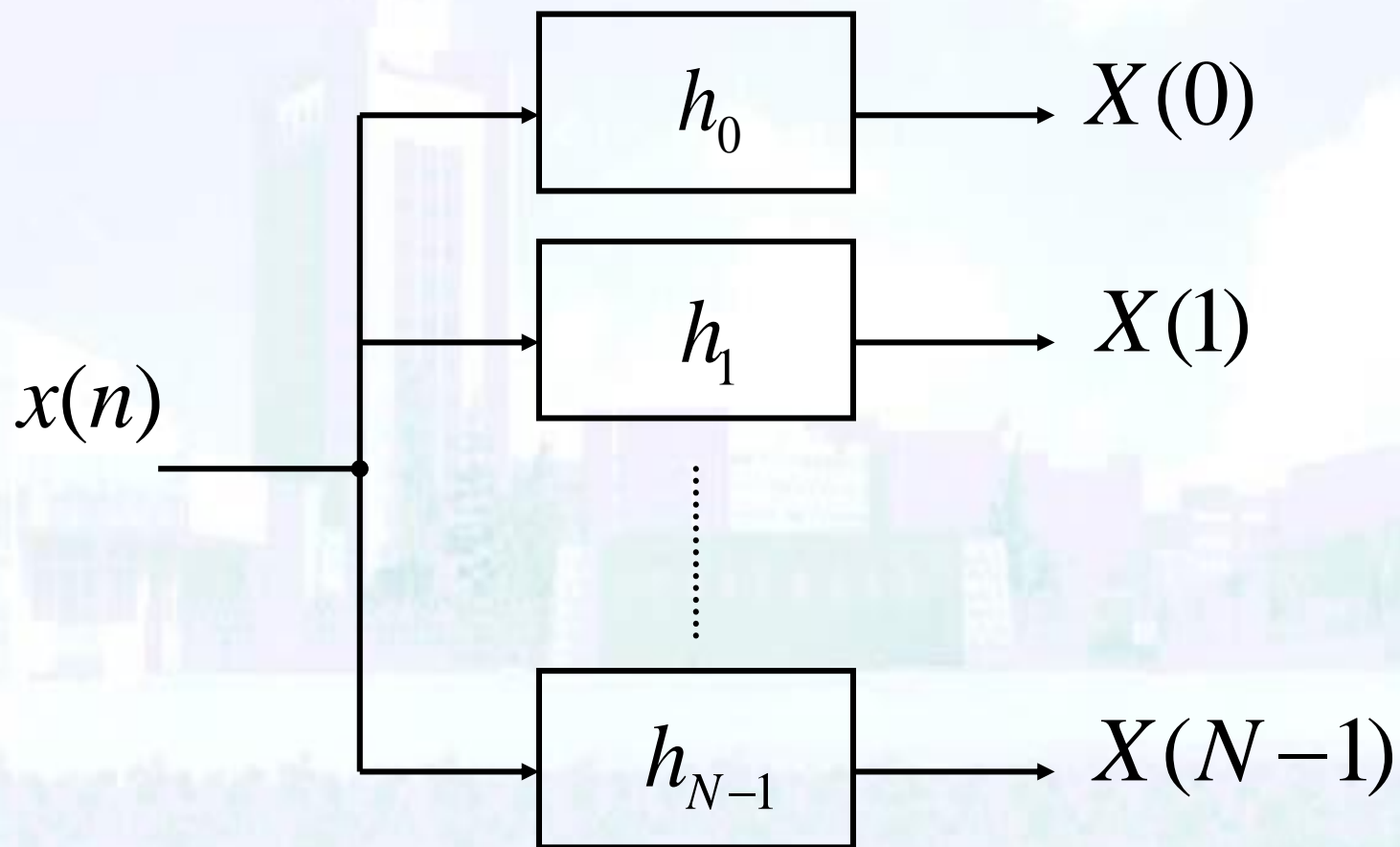
在 $n=N-1$ 时刻的输出为

$$\begin{aligned}y(N-1) &= \sum_{m=0}^{N-1} h_k(m) x(N-1-m) \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} x(m) h_k(N-1-m) \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} x(m) W_N^{mk} \\ &= X(k)\end{aligned}$$

序列  $x(n)$  的DFT的一个值 $X(k)$ ，相当于把  $x(n)$  加载到滤波器  $h_k(n)$  上，在 $(N-1)$ 时刻的输出。

## 2.5 DFT的滤波特性

一个完整的DFT相当于 $N$ 个特性不同的滤波器



## 2.5 DFT的滤波特性

### $h_k(n)$ 的频域特性分析

对  $h_k(n)$  作 Z 变换,

$$\begin{aligned} H_k(z) &= \sum_{n=0}^{N-1} h_k(n) z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{(N-1-n)k} z^{-n} \\ &= W_N^{(N-1)k} \cdot \frac{1 - z^{-N} W_N^{-Nk}}{1 - z^{-1} W_N^{-k}} \end{aligned}$$

## 2.5 DFT的滤波特性

将  $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$  及  $z = e^{j\omega}$  代入

得频域的幅度特性

$$|H_k(e^{j\omega})| = \left| \frac{\sin \frac{N}{2} \left( \omega - \frac{2\pi}{N} k \right)}{\sin \frac{1}{2} \left( \omega - \frac{2\pi}{N} k \right)} \right|$$

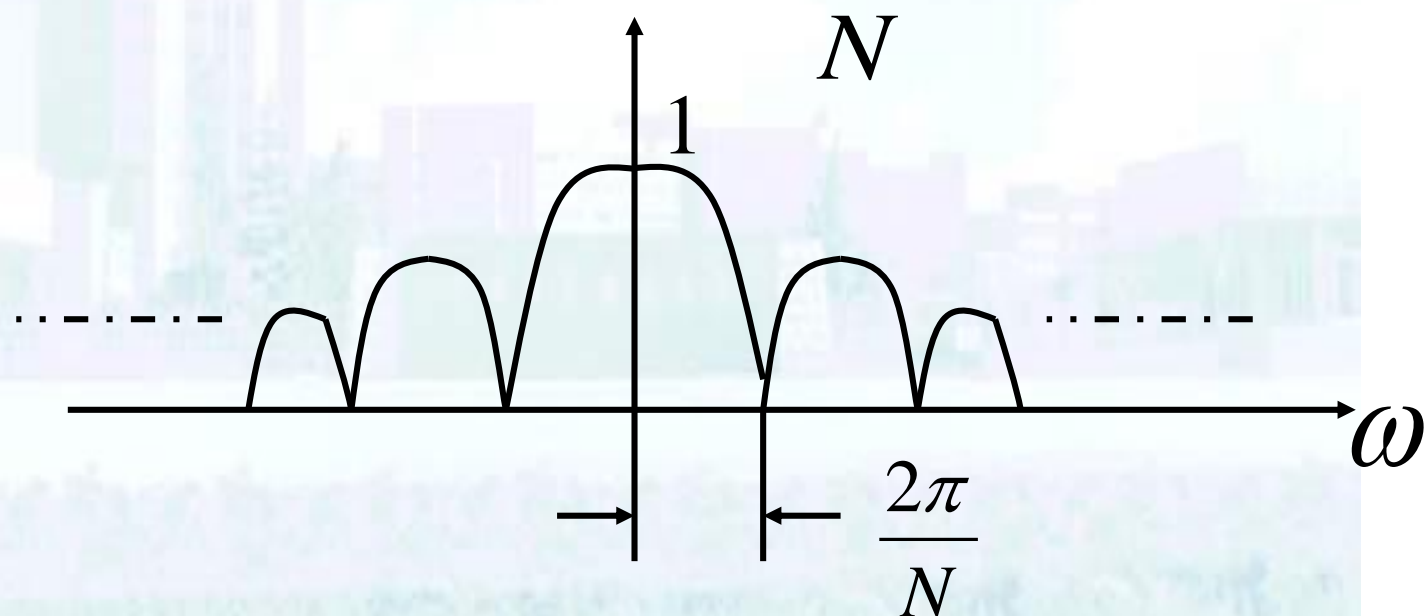
## 2.5 DFT的滤波特性

特别地,  $k=0$ ,

$$|H_0(e^{j\omega})| = \left| \frac{\sin \omega N / 2}{\sin \omega / 2} \right|$$

$$|H_0(e^{j0})| = N$$

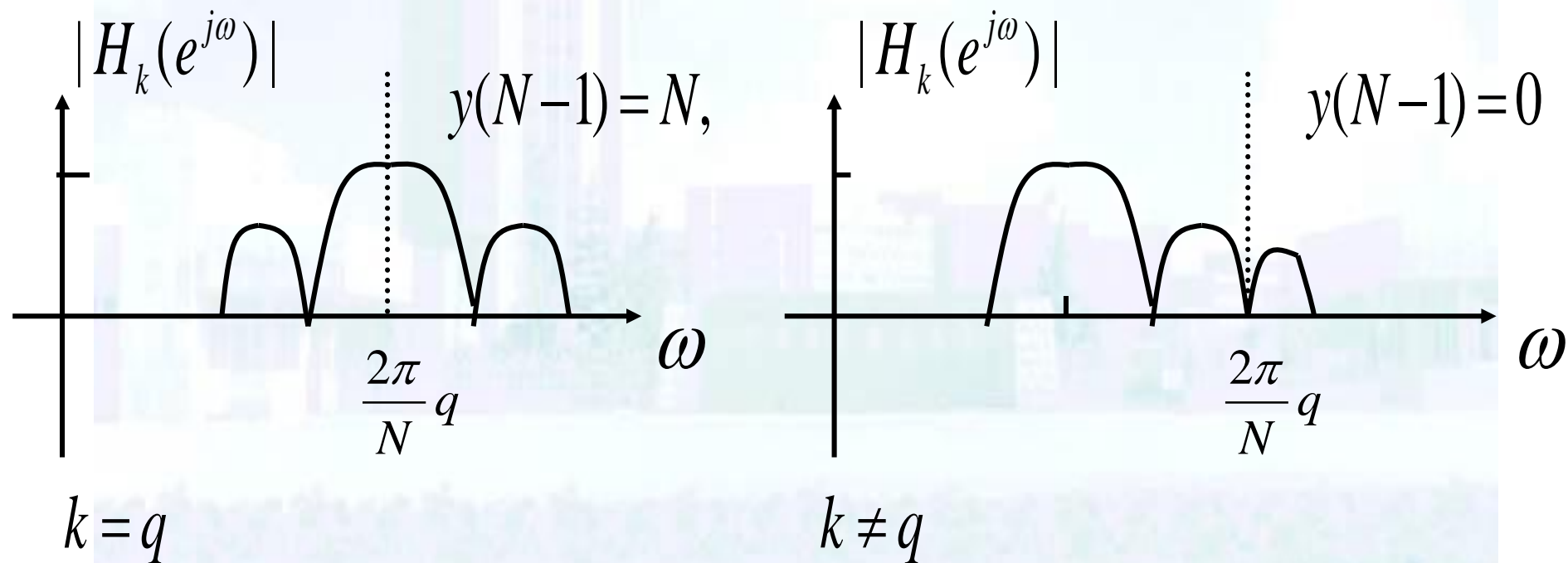
$$\frac{|H_0(e^{j\omega})|}{N}$$



## 2.5 DFT的滤波特性

### 选频特性

$$x(n) = e^{j\frac{2\pi}{N}qn} \quad \text{频率: } \frac{2\pi}{N}q$$





## 2.6 DFT的频谱泄漏问题

## 2.6 DFT的频谱泄漏问题

考虑正弦信号，频率 $\Omega_1$   $x(t) = e^{j\Omega_1 t}$

对其取样

$$x(n) = e^{j\Omega_1 nT} = e^{j\omega_1 n}, \quad \omega_1 = \Omega_1 T$$

作DFT,

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j(\omega_1 - \frac{2\pi}{N}k)n} = \frac{1 - e^{j\omega_1 N}}{1 - e^{j(\omega_1 - \frac{2\pi}{N}k)}}$$

## 2.6 DFT的频谱泄漏问题

若  $\omega_1 = \frac{2\pi}{N}q$ ,  $q$  为正整数,

$$\text{则 } X(k) = \begin{cases} N & k = q(\text{mod } N) \\ 0 & k \neq q(\text{mod } N) \end{cases}$$

信号  $x(t)$  的频率经过DFT后被正确分析。

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{N} \cdot q \text{ 意味着什么?}$$

## 2.6 DFT的频谱泄漏问题

根据定义：

$$\Omega_1 = \frac{\omega_1}{T} = \frac{2\pi}{NT} \cdot q = \frac{2\pi}{T_0} \cdot q, \quad T_0 = NT \quad \text{为样本长度。}$$

另一方面， $\Omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$   $T_1$ 为正弦信号  $x(t)$  的周期

$$\text{即 } T_0 = qT_1$$

对周期信号，取样本长度为信号周期的整数倍，DFT能够正确分析频率。

## 2.6 DFT的频谱泄漏问题

若  $\omega_1 \neq \frac{2\pi}{N} \cdot q$  样本长度不是信号周期的整数倍

则

$$X(k) = \frac{e^{j\frac{1}{2}\omega_1 N}}{e^{j(\omega_1 - \frac{2\pi}{N}k)}} \cdot \frac{\sin\frac{1}{2}\omega_1 N}{\sin\frac{1}{2}(\omega_1 - \frac{2\pi}{N}k)} \neq 0$$

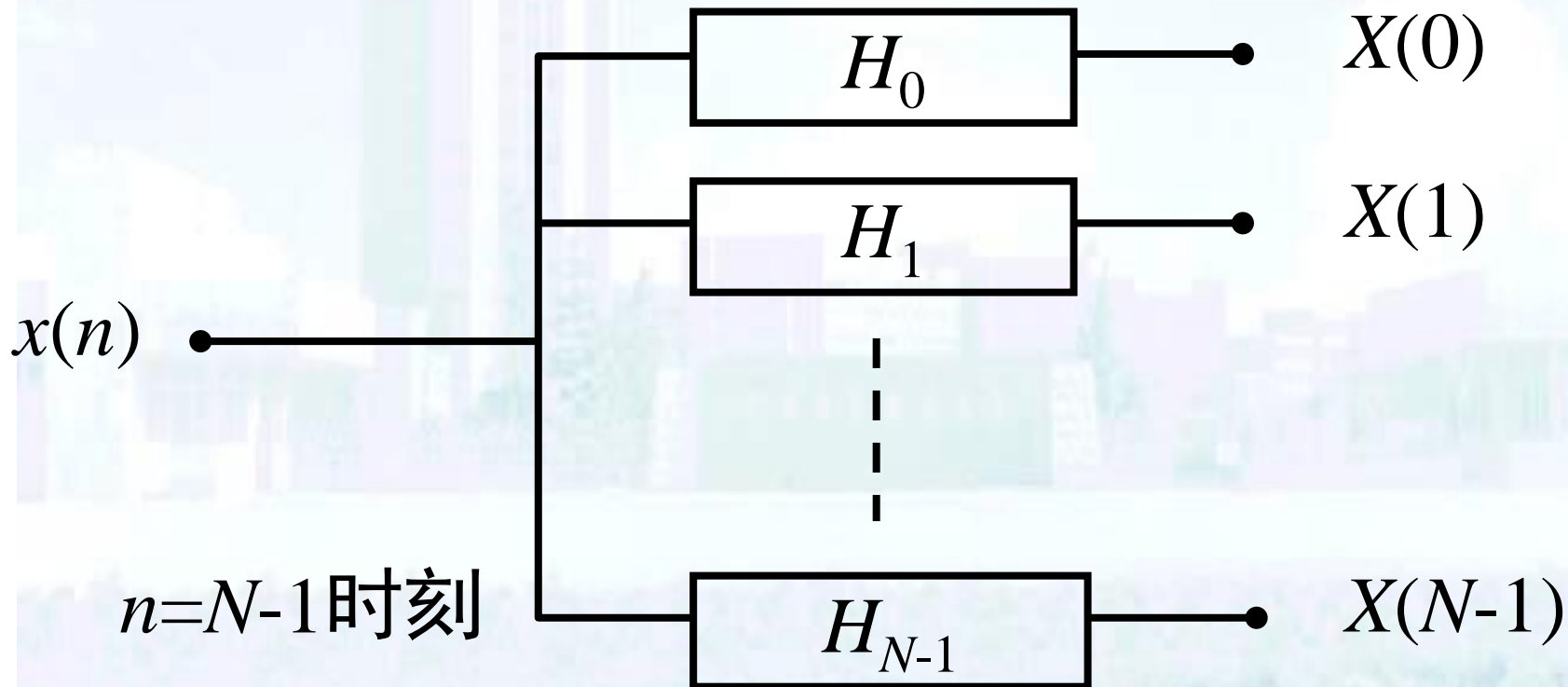
$$k=0, 1, 2, \dots, N-1$$

DFT不能够正确分析频率，各滤波器均有输出，产生频谱泄漏现象。

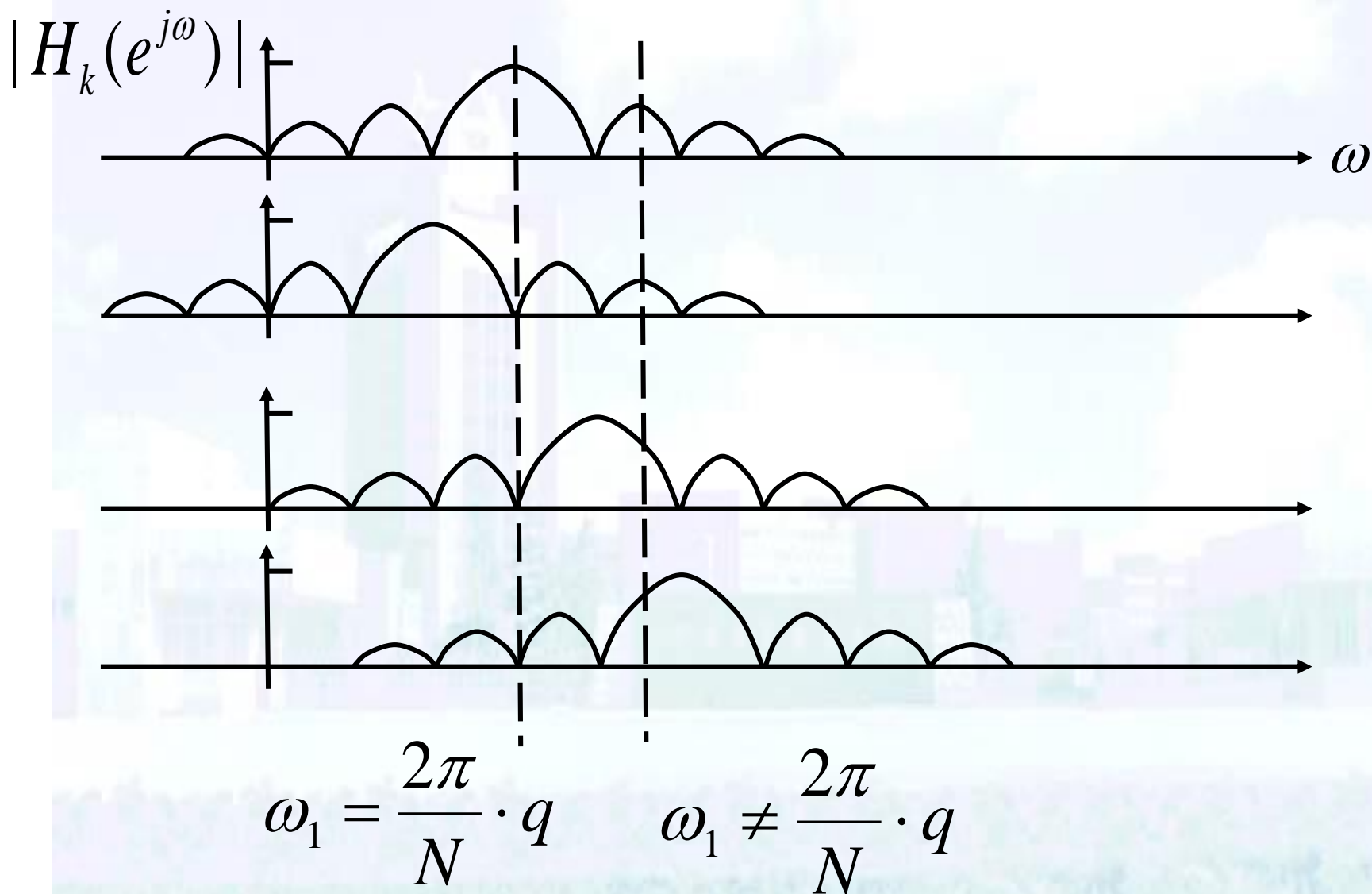
泄漏现象的发生：对信号的不当截断而引起

## 2.6 DFT的频谱泄漏问题

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \quad K=0, 1, \dots, N-1$$

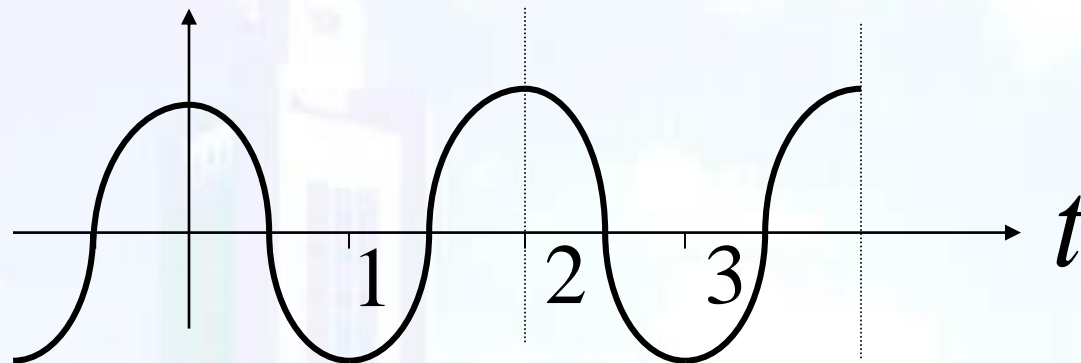


## 2.6 DFT的频谱泄漏问题



## 2.6 DFT的频谱泄漏问题

例：  $x(t) = \cos \pi t$      $T_0 = 2$      $T_0 = 3$



从  $[0, T_0]$  截取信号进行分析。

1) 把所截取的信号当作周期信号，

$$X(m\Omega_0) = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \cos \pi t e^{-jm\Omega_0 t} dt$$

## 2.6 DFT的频谱泄漏问题

i) 取  $T_0 = 2$ , 得  $\Omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \pi$ ,

$$X(m\Omega_0) = \frac{1}{2} \int_0^2 \cos \pi t e^{-jm\pi t} dt$$

$$= \begin{cases} 1 & m = \pm 1 \\ 2 & m \neq \pm 1 \\ 0 & m \neq \pm 1 \end{cases}$$

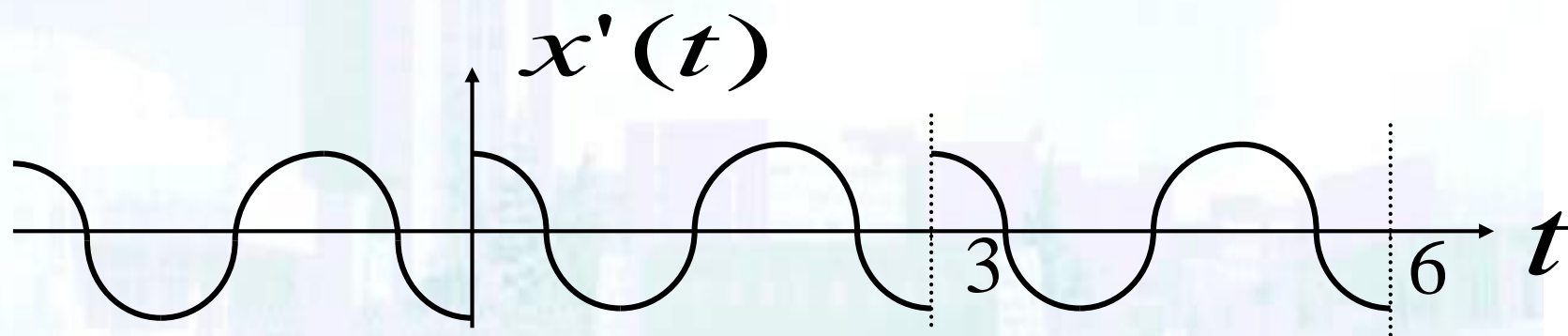
∴ 信号  $x(t) = \cos \pi t$  本身的周期  $T_1 = 2$

∴ 当截取的样本长度  $T_0 = T_1$  时, 没有发生频谱泄漏, 与前例一致。

## 2.6 DFT的频谱泄漏问题

ii) 取  $T_0 = 3$ , 则  $\Omega_0 = \frac{2\pi}{3}$

$$X'(m\Omega_0) = \frac{-j}{\pi} \cdot \frac{4m}{4m^2 - 9} \quad -\infty < m < +\infty$$



$x'(t)$  频谱分量无限丰富, 产生了频谱泄漏, 不仅如此, 时域离散化时又造成频谱混迭。

## 2.6 DFT的频谱泄漏问题

2)把 $x'(t)$ 看成经过有限时宽的窗函数截取,

$$x'(t) = x(t)w_R(t)$$

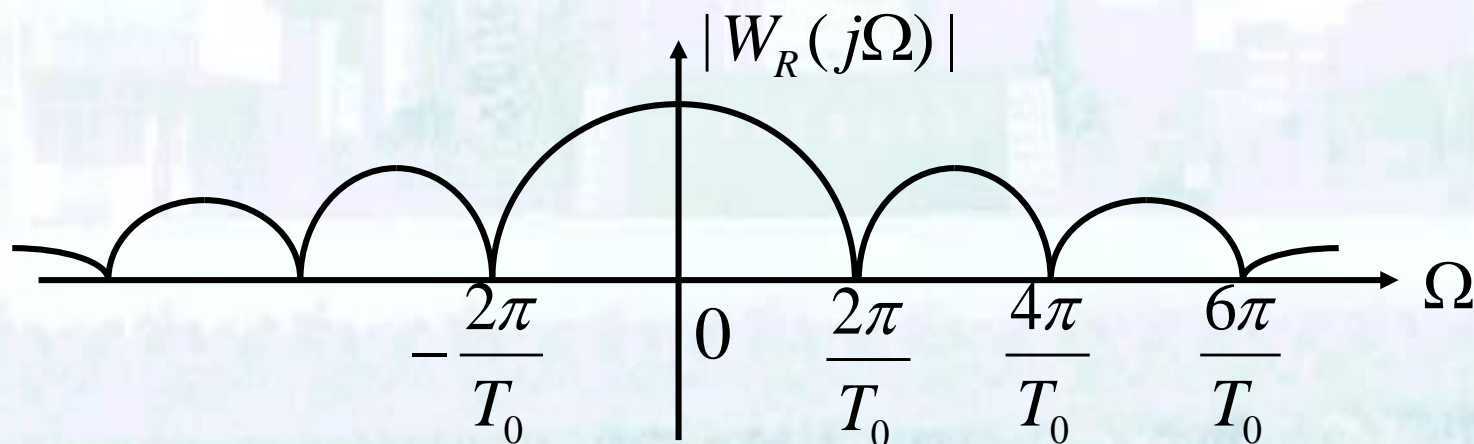
$$w_R(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq T_0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$$X'(j\Omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\Omega) * W_R(j\Omega)$$

## 2.6 DFT的频谱泄漏问题

$$W_R(j\Omega) = T_0 e^{-j\frac{1}{2}\Omega T_0} \cdot S_a\left(\frac{1}{2}\Omega T_0\right)$$

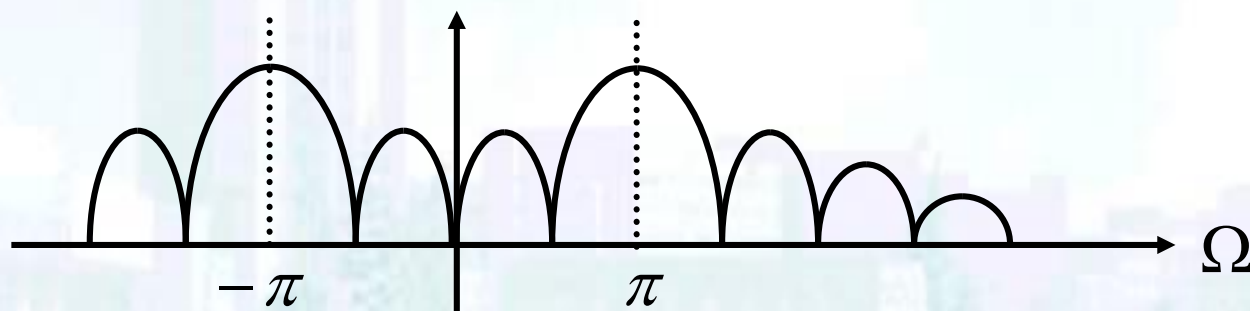
取样函数  $S_a(x) = \frac{\sin x}{x}$



## 2.6 DFT的频谱泄漏问题

$$\text{已知 } X(j\Omega) = \pi[\delta(\Omega + \pi) + \delta(\Omega - \pi)]$$

$$\text{得 } X'(j\Omega) = \frac{1}{2}W_R[j(\Omega + \pi)] + \frac{1}{2}W_R[(\Omega - \pi)]$$



从有限时宽的窗函数观点看，泄漏是由于窗函数宽阔的主瓣和副瓣引起的。

## 2.6 DFT的频谱泄漏问题

结论：

(1) 频谱泄漏由信号截短引起

在DFT中有两个主要操作：截短，离散化  
截短引起泄漏，离散化对此没有贡献

(2) 频谱泄漏导致信号在频谱上扩展，又由时域取样造成频谱混叠

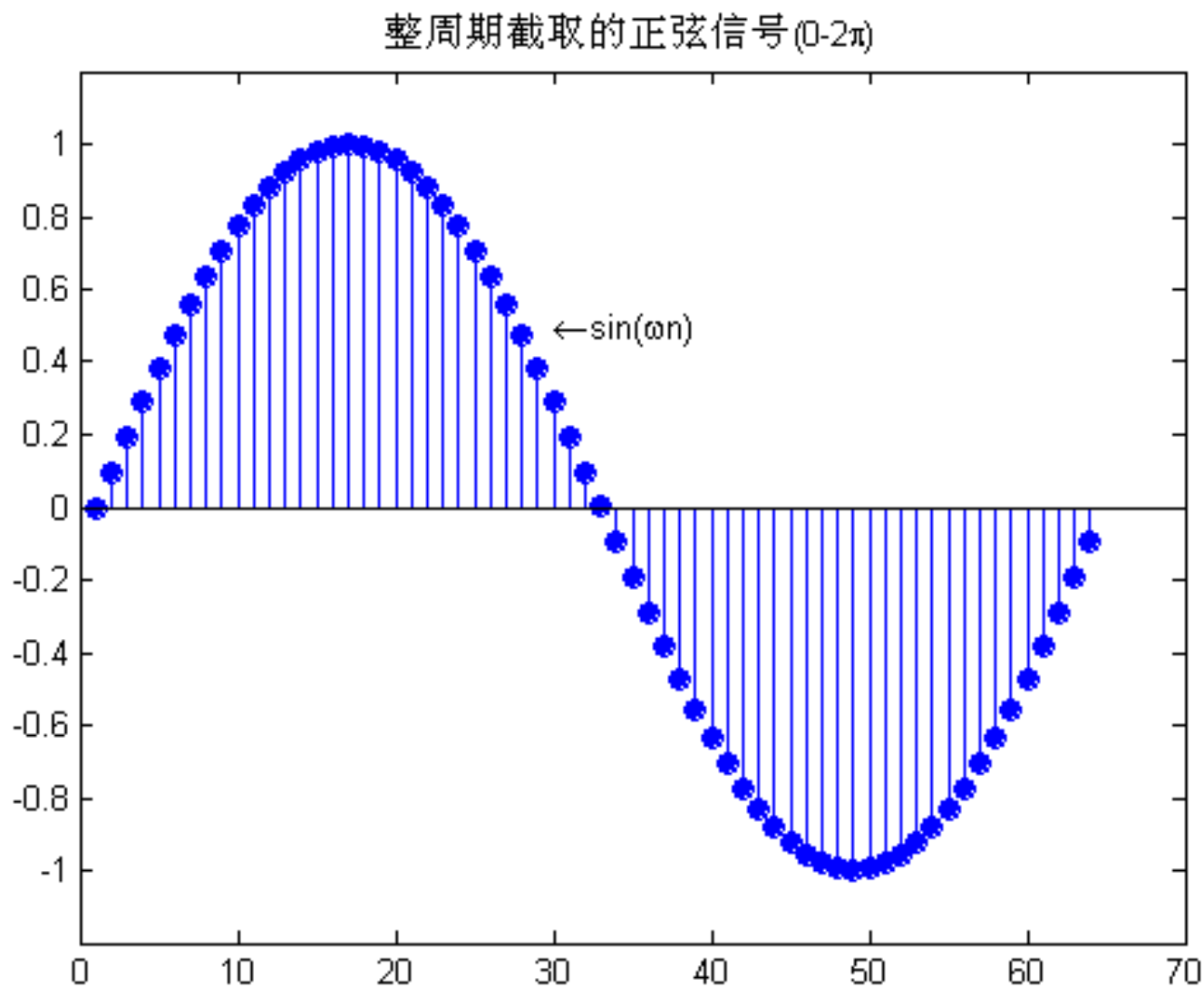
(3) 非周期信号

时域有限，频域无限

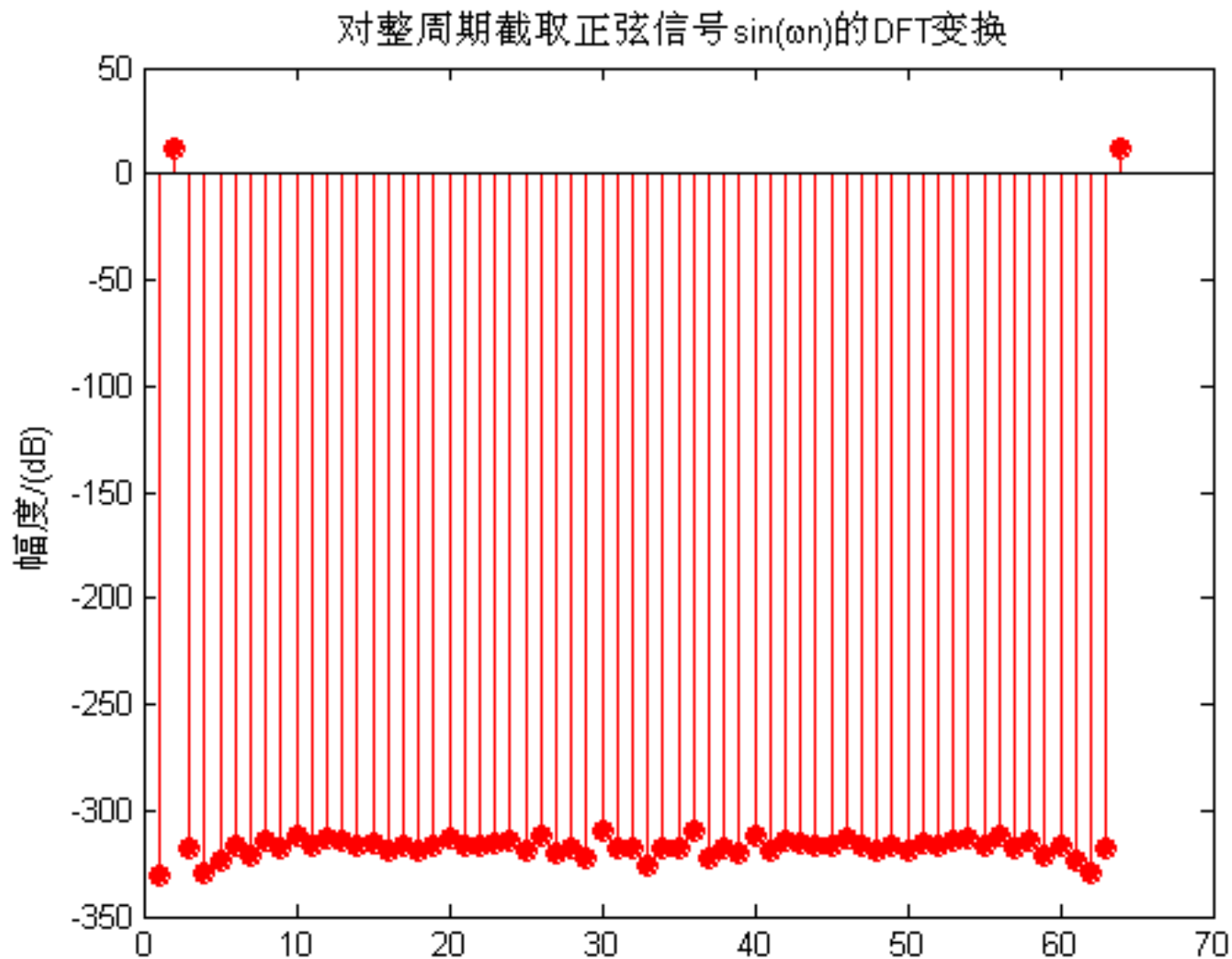
时域无限，频域有限

所以，用DFT分析信号，在时域，频域均作截短处理，必然存在误差

# 对正弦信号整数周期截取

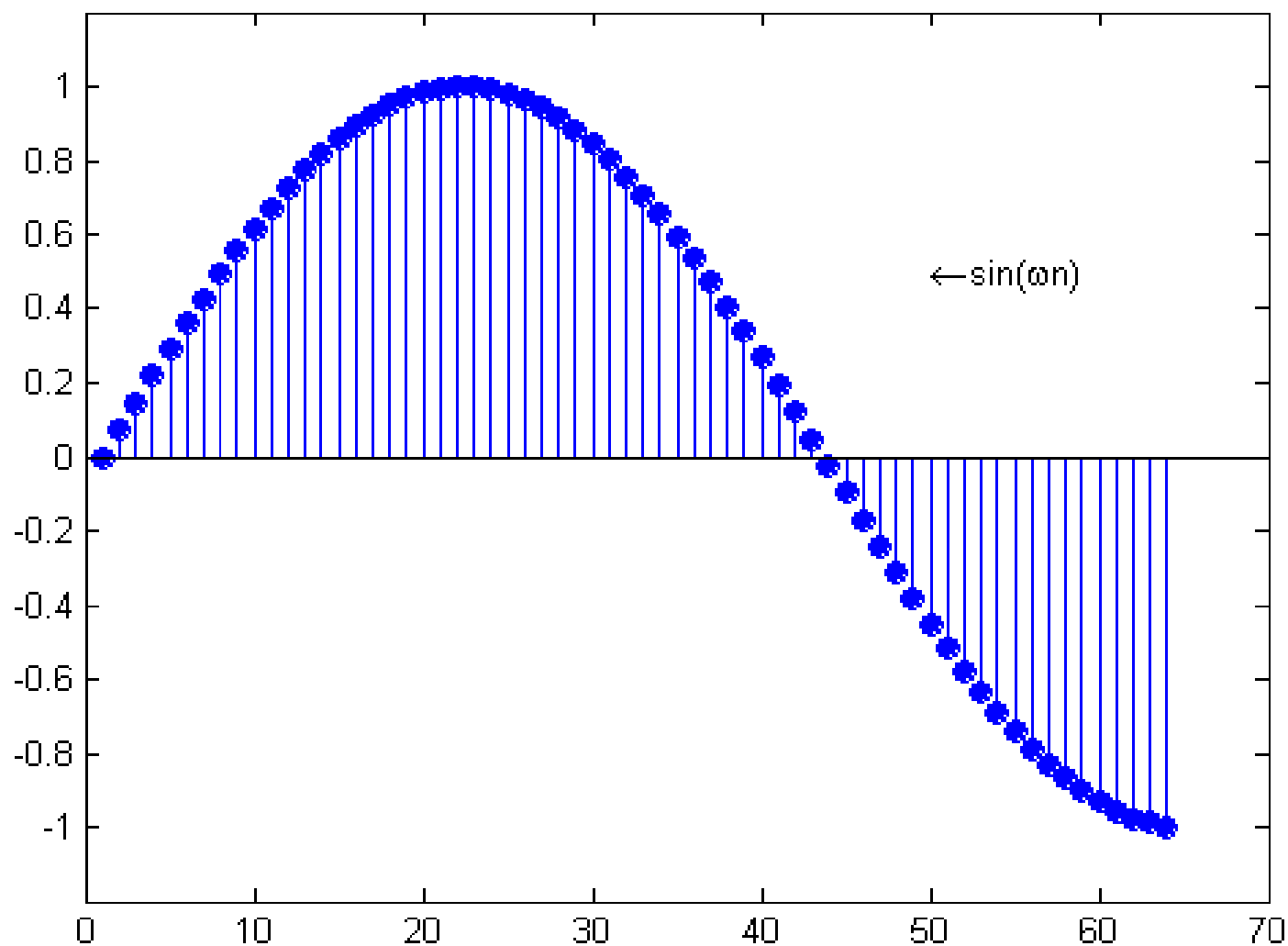


# 对正弦信号整数周期截取波形进行DFT变换

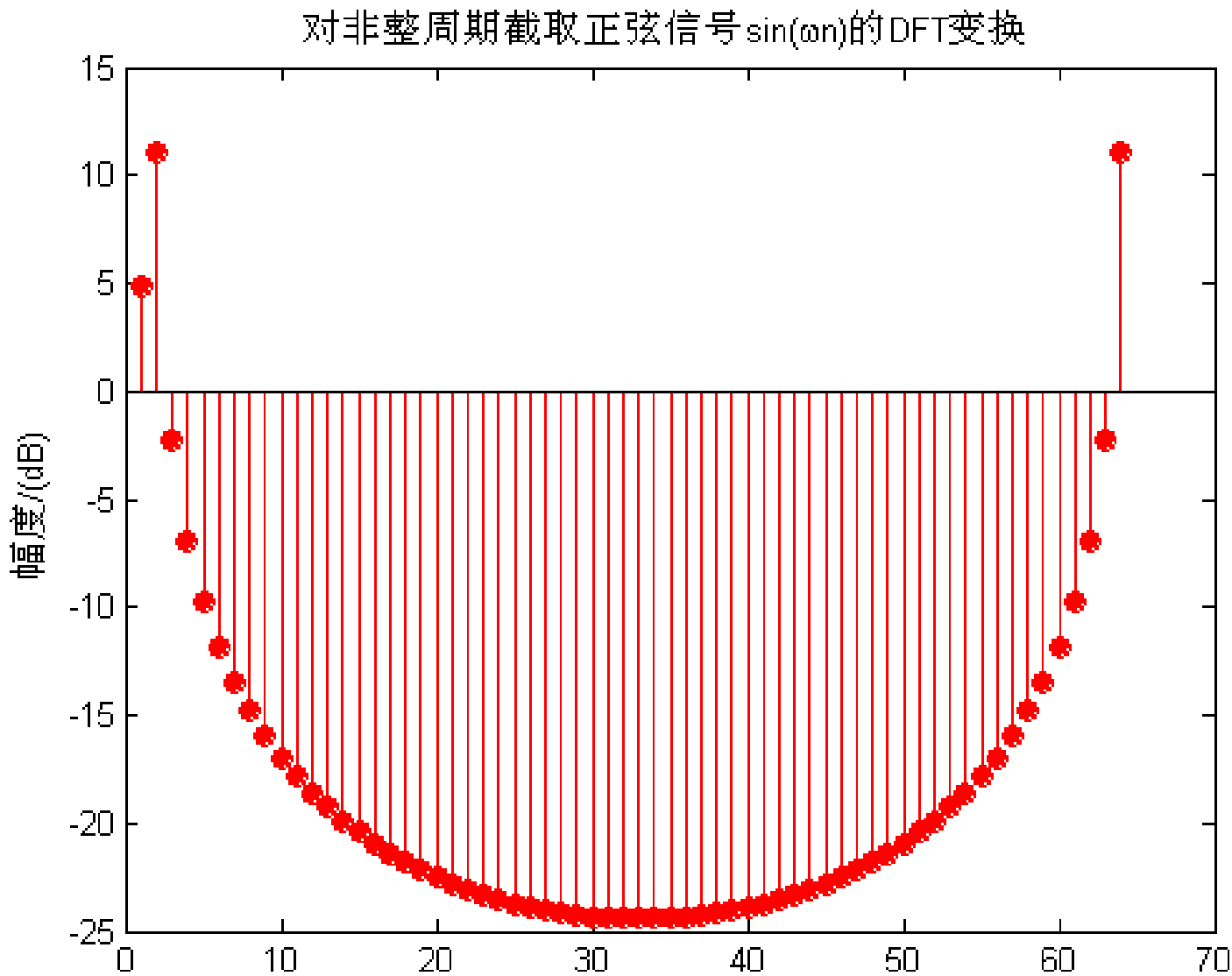


# 对正弦信号非整数周期截取

非整周期截取的正弦信号(0-1.5 $\pi$ )

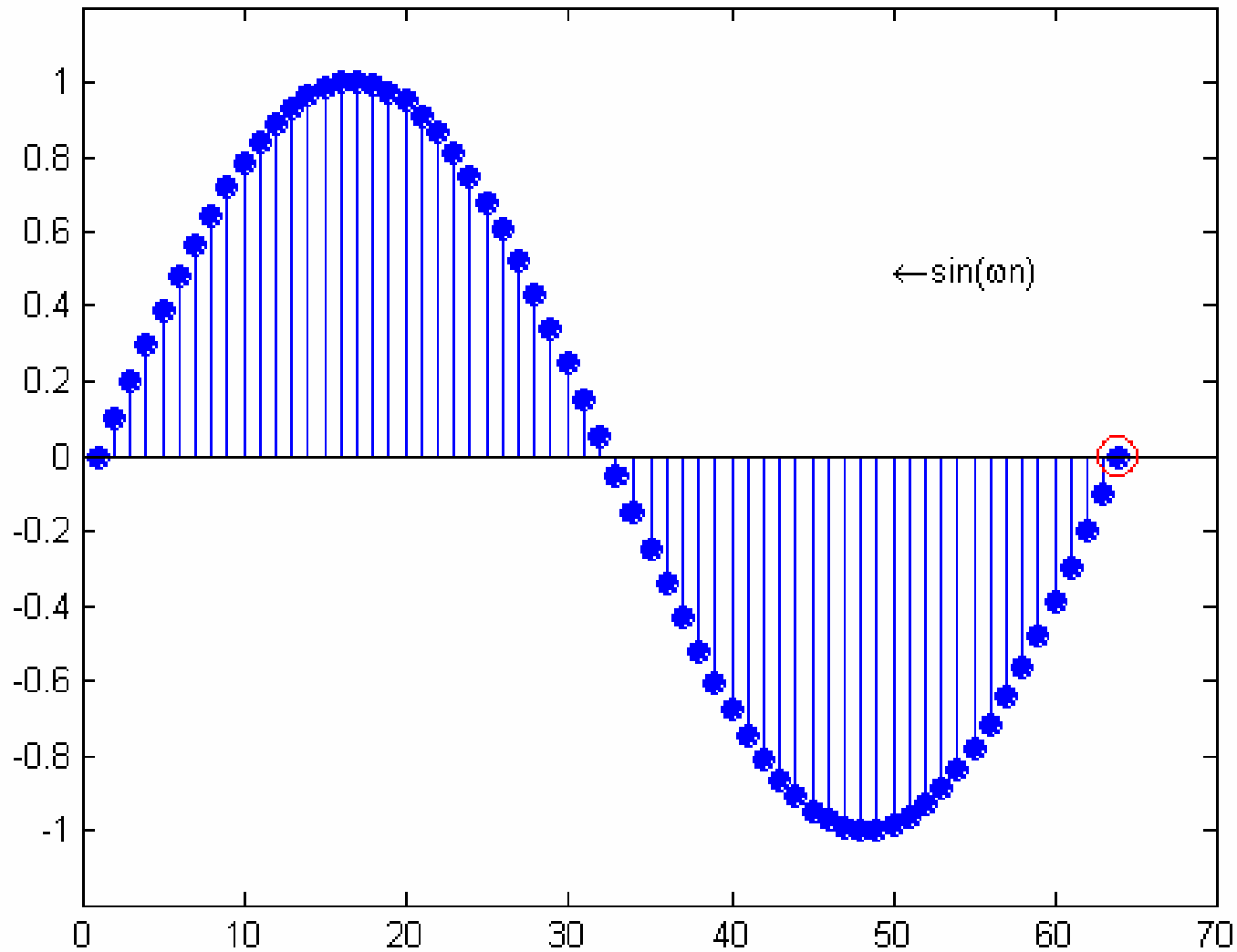


# 对正弦信号非整数周期截取波形进行DFT变换

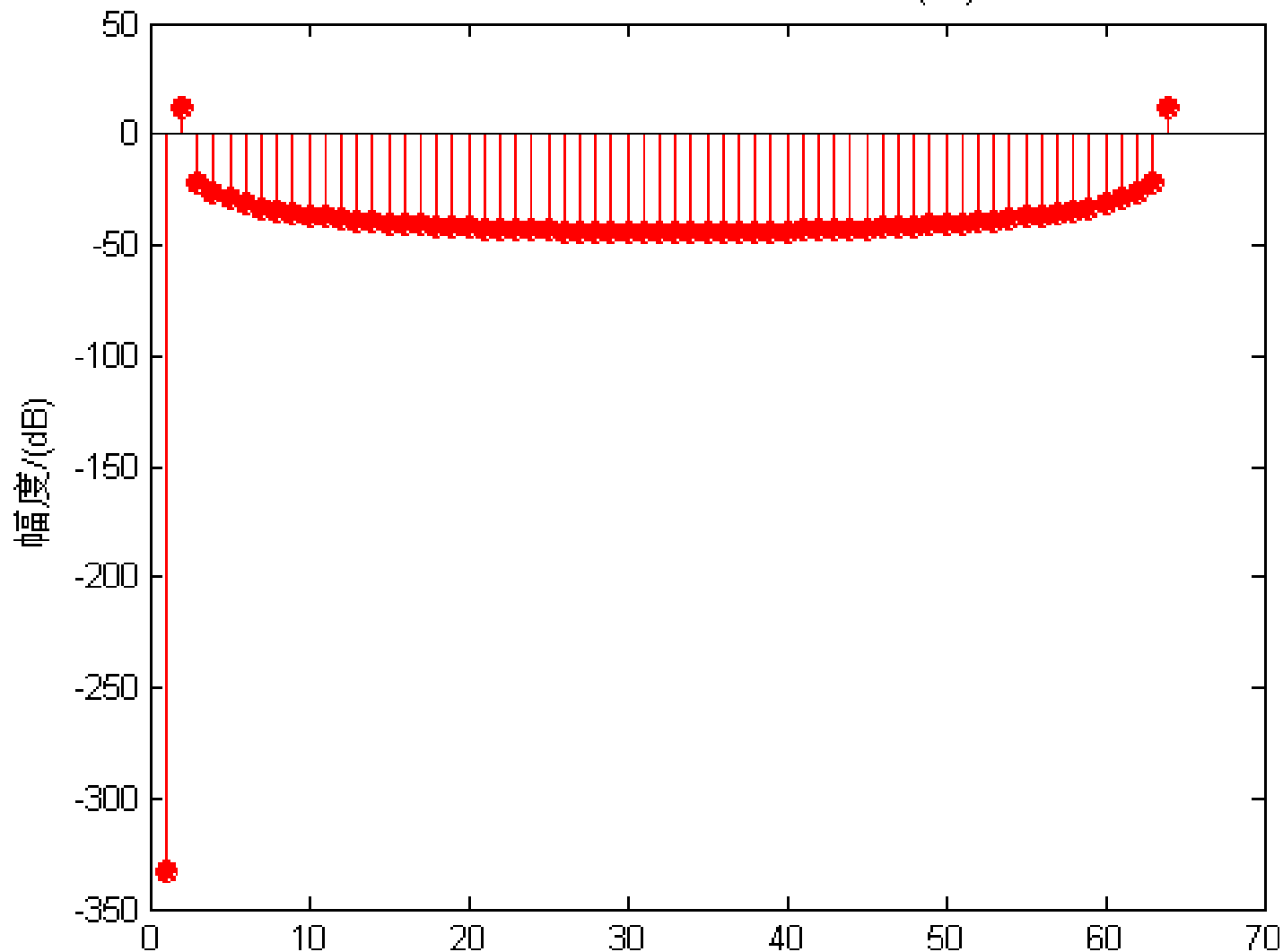


# 和正弦信号整数周期截取只差一点

一点之差:非整周期截取的正弦信号



一点之差:对非整周期截取正弦信号  $\sin(\omega n)$  的DFT变换



## 2.6 DFT的频谱泄漏问题

### 减小泄漏的考虑：

- 周期信号，选取样本长度 $NT$ 等于信号周期 $T_0$ 的整数倍。
- 有限长信号，选 $NT$ 等于信号长。
- 无限长非周期信号，选取好的窗函数。



## 2.7 加权技术与窗函数

## 2.7 加权技术与窗函数

主要针对有限长数据截短引起的泄漏现象。

- 要求：
- (1) 主瓣窄，且集中大部分能量；
  - (2) 旁瓣低，能量随 $\omega$ 增加而迅速减小，提高阻带衰减。

## 2.7 加权技术与窗函数

1) 矩形窗，双边表示：

$$N \text{ 为奇数 } w(n) = 1, \quad n = -\frac{N-1}{2}, \dots, -1, 0, 1, \dots, \frac{N-1}{2}$$

$$W_R(e^{j\omega}) = \frac{\sin N\omega/2}{\sin \omega/2}$$

$$N \text{ 为偶数 } w(n) = 1, \quad n = -\frac{N}{2}, \dots, -1, 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1$$

$$W_R(e^{j\omega}) = \frac{\sin N\omega/2}{\sin \omega/2} \cdot e^{j\omega/2}$$

## 2.7 加权技术与窗函数

单边表示： $N$ 取偶数，滞后  $\frac{N}{2}$ ， $w(n - \frac{N}{2})$

$$w(n) = 1, \quad n = 0, 1, \dots, N - 1$$

$$W_R(e^{j\omega}) = \frac{\sin N\omega/2}{\sin \omega/2} \cdot e^{-j\omega(N-1)/2}$$

$$W_{dB}(\omega) = 20 \lg \left| \frac{W(e^{j\omega})}{W(e^{j0})} \right|$$

主瓣宽  $\frac{4\pi}{N}$  (2倍基频)

旁瓣峰值-13dB

## 2.7 加权技术与窗函数

2) 三角形窗 (Bartlett窗) 主瓣  $\frac{8\pi}{N}$ , 旁瓣 -25dB

双边表示,  $N$ 为奇数

$$w(n) = 1 - \frac{|n|}{(N-1)/2}, \quad n = 0, \pm 1, \dots, \pm \frac{N-1}{2}$$

$$W_R(e^{j\omega}) = \frac{2}{N-1} \cdot \left[ \frac{\sin(N-1)\omega/4}{\sin\omega/2} \right]^2$$

## 2.7 加权技术与窗函数

单边表示,  $N$ 为奇数

$$w(n) = \begin{cases} \frac{n}{(N-1)/2} & n = 0, 1, 2, \dots, \frac{N-1}{2} \\ \frac{N-n-1}{(N-1)/2} & n = \frac{N+1}{2}, \dots, N-1 \end{cases}$$

$$W_R(e^{j\omega}) = \frac{2}{N-1} \cdot \left[ \frac{\sin(N-1)\omega/4}{\sin\omega/2} \right]^2 e^{-j\omega(N-1)/2}$$

## 2.7 加权技术与窗函数

### 3) Hanning窗

双边表示,  $N$ 为偶数:

$$w(n) = \cos^2\left(\frac{\pi}{N}n\right), \quad n = -\frac{N}{2}, \dots, -1, 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{2\pi}{N}n$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} e^{j\frac{2\pi}{N}n} + \frac{1}{4} e^{-j\frac{2\pi}{N}n}$$

## 2.7 加权技术与窗函数

### 利用矩形窗的结果及频移定理

$$W(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} W_R(e^{j\omega}) + \frac{1}{4} W_R[e^{j(\omega - \frac{2\pi}{N})}] + \frac{1}{4} W_R[e^{j(\omega + \frac{2\pi}{N})}]$$

这里

$$W_R(e^{j\omega}) = \frac{\sin N\omega/2}{\sin \omega/2} e^{j\omega/2} = W_R(\omega) e^{j\omega/2}$$

$$W_R(\omega) = \frac{\sin N\omega/2}{\sin \omega/2}$$

## 2.7 加权技术与窗函数

$$W(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}W_R(e^{j\omega})e^{j\frac{\omega}{2}} + \frac{1}{4}W_R(\omega - \frac{2\pi}{N})e^{j\frac{1}{2}(\omega - \frac{2\pi}{N})} \\ + \frac{1}{4}W_R(\omega + \frac{2\pi}{N})e^{j\frac{1}{2}(\omega + \frac{2\pi}{N})}$$

当  $N$  较大时忽略相移  $e^{-j\frac{\pi}{N}}$  及  $e^{j\frac{\pi}{N}}$  的影响,

$$W(e^{j\omega}) \approx \left[ \frac{1}{2}W_R(\omega) + \frac{1}{4}W_R(\omega - \frac{2\pi}{N}) + \frac{1}{4}W_R(\omega + \frac{2\pi}{N}) \right] e^{j\frac{\omega}{2}}$$

主瓣宽  $\frac{8\pi}{N}$  , 旁瓣-31dB

原理: 3个矩形窗在频域上移位, 抵消旁瓣。

## 2.7 加权技术与窗函数

单边表示：

$$w(n) = \sin^2\left(\frac{\pi}{N}n\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{2\pi}{N}n$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} e^{j\frac{2\pi}{N}n} - \frac{1}{4} e^{-j\frac{2\pi}{N}n}$$

## 2.7 加权技术与窗函数

已知单边矩形窗的谱  $W_R(e^{j\omega}) = W_R(\omega) e^{-j\frac{N-1}{2}\omega}$

$$W(e^{j\omega}) = \left[ \frac{1}{2} W_R(\omega) + \frac{1}{4} W_R\left(\omega - \frac{2\pi}{N}\right) e^{-j\frac{\pi}{N}} + \frac{1}{4} W_R\left(\omega + \frac{2\pi}{N}\right) e^{j\frac{\pi}{N}} \right] e^{-j\frac{N-1}{2}\omega}$$

忽略相移  $e^{-j\frac{\pi}{N}}$ ,  $e^{j\frac{\pi}{N}}$

$$W(e^{j\omega}) \approx \left[ \frac{1}{2} W_R(\omega) + \frac{1}{4} W_R\left(\omega - \frac{2\pi}{N}\right) + \frac{1}{4} W_R\left(\omega + \frac{2\pi}{N}\right) \right] e^{-j\frac{N-1}{2}\omega}$$

## 2.7 加权技术与窗函数

### 4) Hamming窗

单边表示

$$w(n) = 0.54 - 0.46 \cos \frac{2\pi}{N} n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N - 1$$

幅度函数

$$W(\omega) = 0.54W_R(\omega) + 0.23\left[W_R\left(\omega - \frac{2\pi}{N}\right) + W_R\left(\omega + \frac{2\pi}{N}\right)\right]$$

主瓣  $\frac{8\pi}{N}$  , 旁瓣 -41dB

## 2.7 加权技术与窗函数

### 5) Blackman窗

利用 $k$ 个矩形窗谱，作线性组合

$$\text{双边表示: } w(n) = \sum_{m=0}^{k-1} a_m \cos\left(\frac{2\pi}{N} mn\right), \quad n = 0, \pm 1, \dots, \pm \frac{N-1}{2}$$

单边表示:

$$\begin{aligned} w(n) &= \sum_{m=0}^{k-1} (-1)^m a_m \cos\left(\frac{2\pi}{N} mn\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \\ &= \sum_{m=0}^{k-1} (-1)^m a_m \frac{1}{2} \left( e^{j\frac{2\pi}{N} mn} + e^{-j\frac{2\pi}{N} mn} \right) \end{aligned}$$

## 2.7 加权技术与窗函数

### 利用频移定理

$$W(e^{j\omega}) = \sum_{m=0}^{k-1} (-1)^m \frac{a_m}{2} [W_R(e^{j(\omega - \frac{2\pi}{N}m)}) + W_R(e^{j(\omega + \frac{2\pi}{N}m)})]$$

这里  $W_R(e^{j\omega}) = W_R(\omega)e^{-j\frac{N}{2}\omega}$ ,  $W_R(\omega) = \frac{\sin \omega(N+1)/2}{\sin \omega/2}$

$$W(e^{j\omega}) = \sum_{m=0}^{k-1} (-1)^m \frac{a_m}{2} [W_R(\omega - \frac{2\pi}{N}m)e^{jm\pi} + W_R(\omega + \frac{2\pi}{N}m)e^{-jm\pi}] e^{-j\frac{N}{2}\omega}$$

$$\because e^{jm\pi} = e^{-jm\pi} = (-1)^m$$

$$\therefore W(e^{j\omega}) = \sum_{m=0}^{k-1} \frac{a_m}{2} \left[ W_R\left(\omega - \frac{2\pi}{N}m\right) + W_R\left(\omega + \frac{2\pi}{N}m\right) \right] e^{-j\frac{N}{2}\omega}$$

幅度函数

$$W(\omega) = \sum_{m=0}^{k-1} \frac{a_m}{2} \left[ W_R\left(\omega - \frac{2\pi}{N}m\right) + W_R\left(\omega + \frac{2\pi}{N}m\right) \right]$$

随着 $K$ 的上升，主瓣加宽，旁瓣降低

## 2.7 加权技术与窗函数

上式为3种窗的一般表达式，

$$\text{Hanning: } a_0 = 0.5, \quad a_1 = 0.5$$

$$\text{Hamming: } a_0 = 0.54, \quad a_1 = 0.46$$

$$\text{Blackman: } a_0 = 0.42, \quad a_1 = 0.5, \quad a_2 = 0.08$$

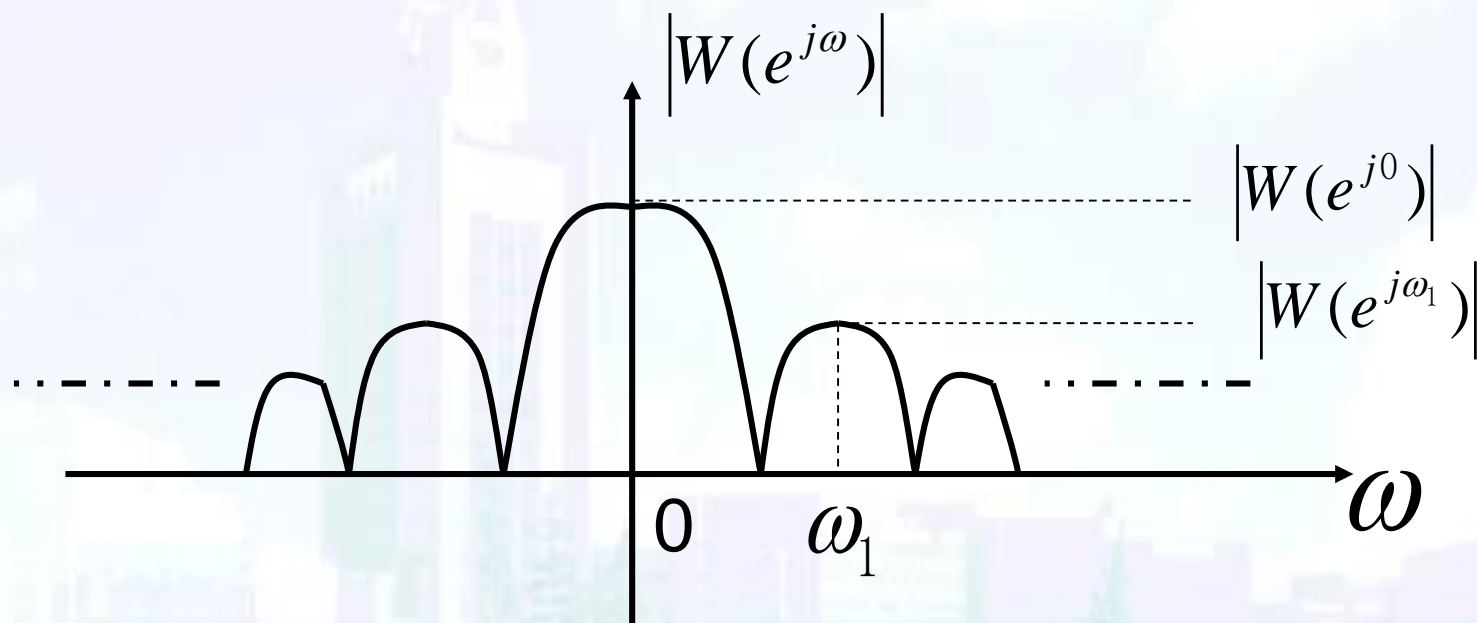
$$w(n) = 0.42 - 0.5 \cos \frac{2\pi}{N} n + 0.08 \cos \frac{4\pi}{N} n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

$$W(\omega) = 0.42W_R(\omega) + 0.25\left[W_R\left(\omega - \frac{2\pi}{N}\right) + W_R\left(\omega + \frac{2\pi}{N}\right)\right] \\ + 0.04\left[W_R\left(\omega - \frac{4\pi}{N}\right) + W_R\left(\omega + \frac{4\pi}{N}\right)\right]$$

主瓣  $\frac{12\pi}{N}$ ，旁瓣 -57dB

## 2.7 加权技术与窗函数

### 旁瓣电平的计算



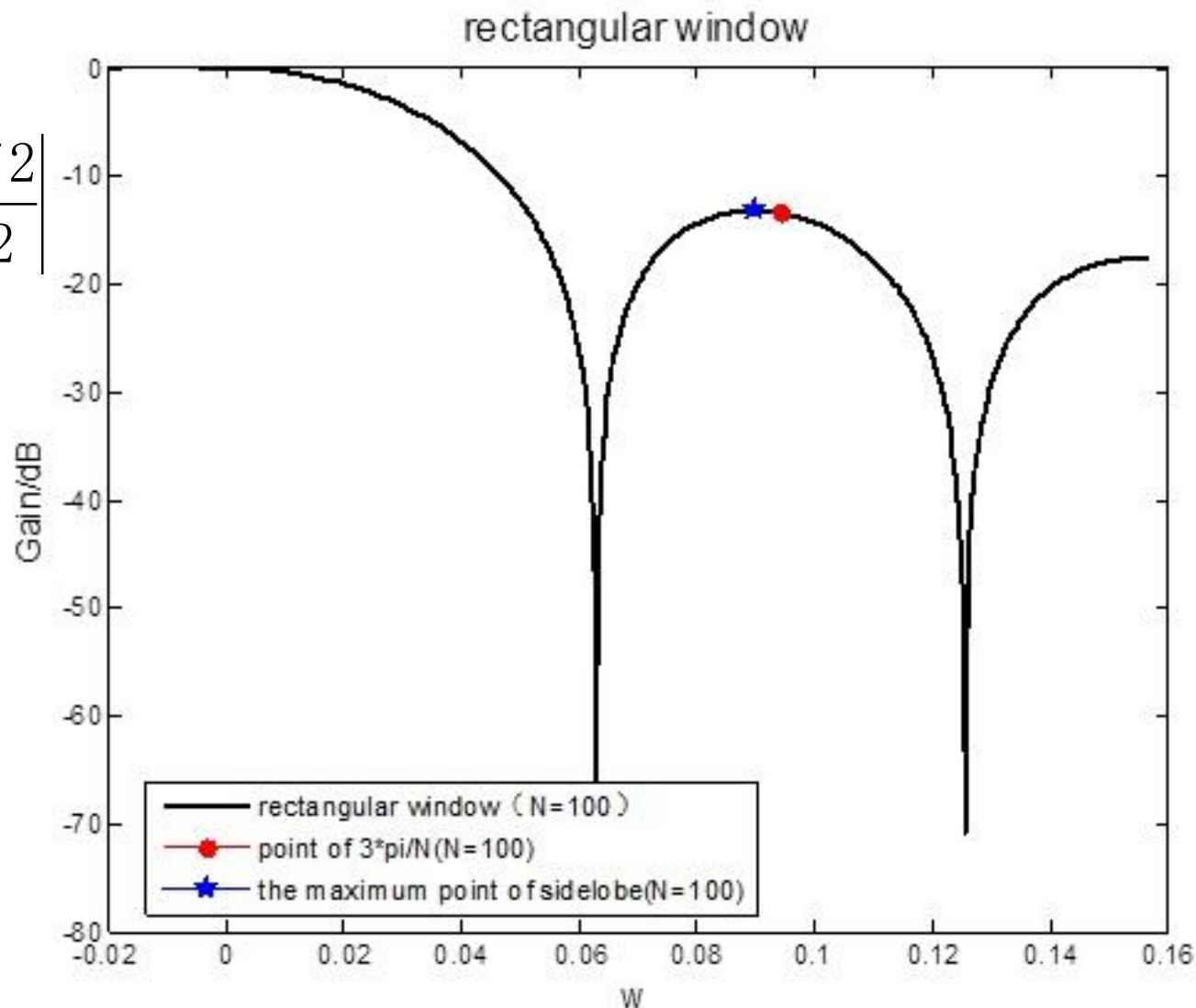
旁瓣电平：
$$W_{dB}(\omega_1) = 20 \lg \left| \frac{W(e^{j\omega_1})}{W(e^{j0})} \right|$$

## 2.7 加权技术与窗函数

### 矩形窗

$$|W_R(e^{j\omega})| = \left| \frac{\sin N\omega/2}{\sin \omega/2} \right|$$

$$|W_R(e^{j0})| = N$$



## 2.7 加权技术与窗函数

### 矩形窗

$$\text{近似地取 } \omega_1 = \frac{3\pi}{N} \quad \left| W_R(e^{j\omega_1}) \right| = \frac{1}{\left| \sin \frac{3\pi}{2N} \right|}$$

$$W_{dB}(\omega_1) = -20 \lg \left| N \sin \frac{3\pi}{2N} \right|$$

$$\text{当 } N \text{ 较大时 } W_{dB}(\omega_1) \approx -20 \lg \frac{3\pi}{2} = -13.46$$

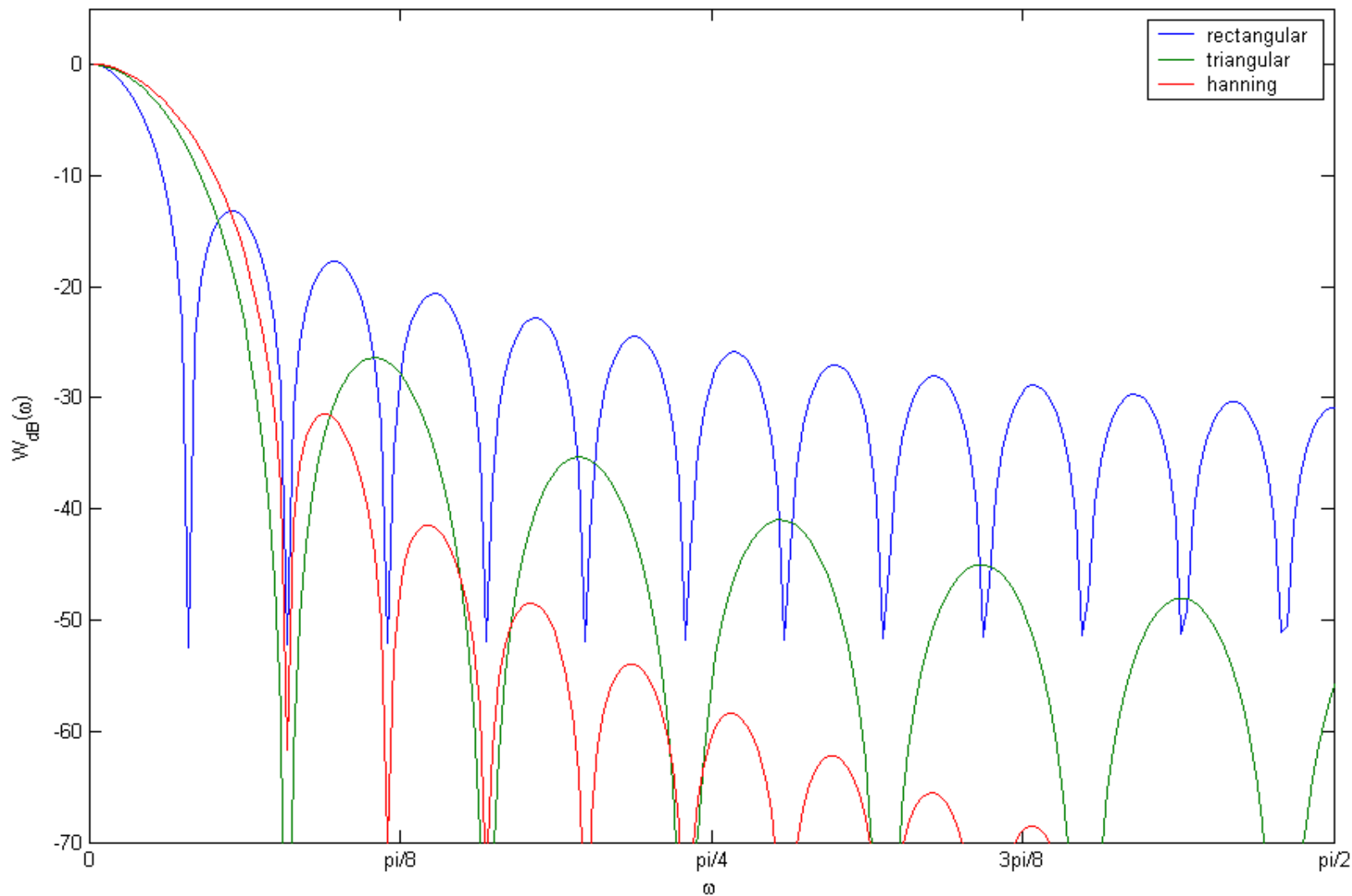
对应的主瓣与旁瓣幅度比为4.7  
在近似的意义下，与 $N$ 无关

## 2.7 加权技术与窗函数

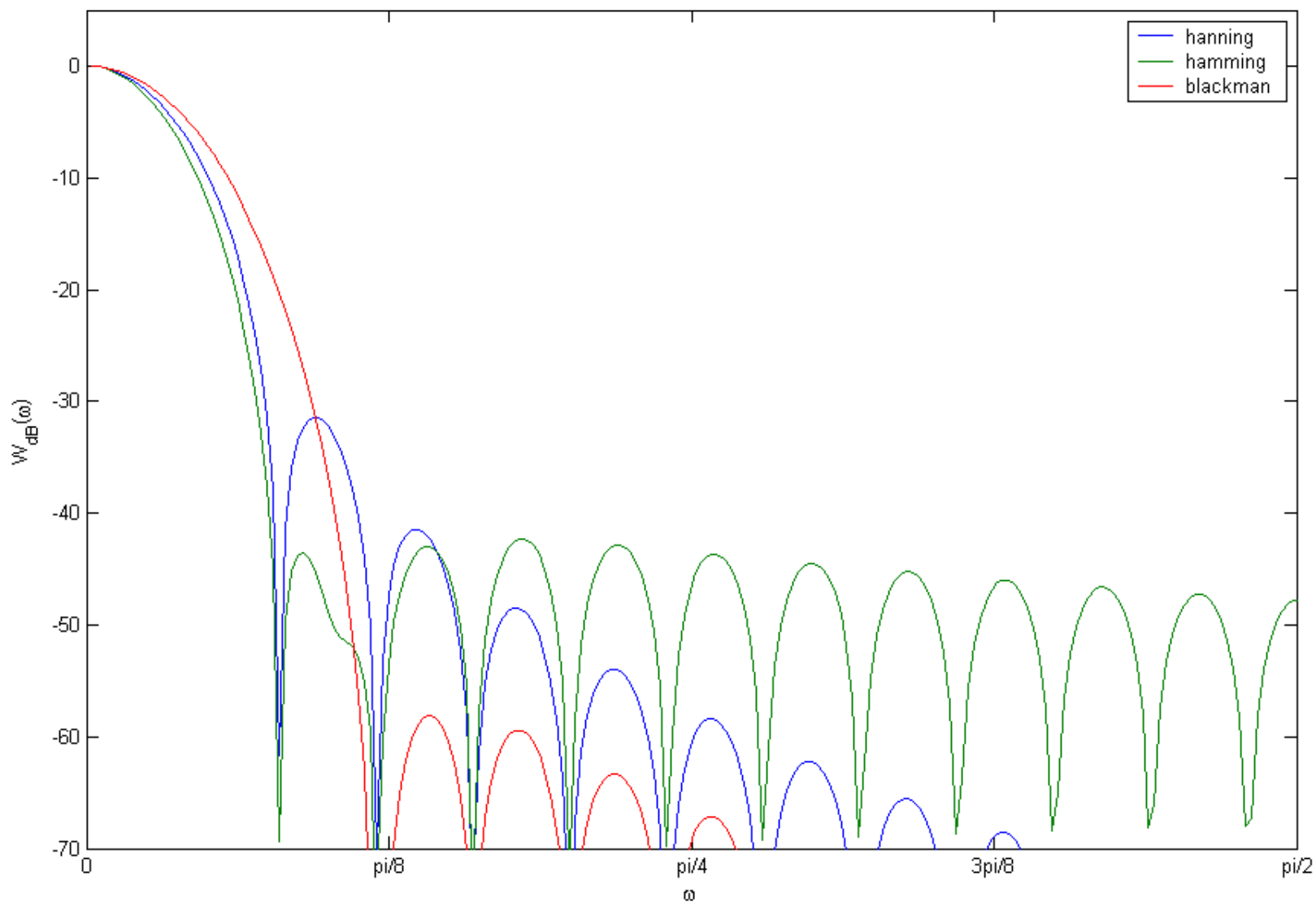
	主瓣	旁瓣	最小阻带衰减
矩形	$4\pi/N$	-13dB	-21dB
三角	$8\pi/N$	-25	-25
Hanning	$8\pi/N$	-32	-44
Hamming	$8\pi/N$	-42	-53
Blackman	$12\pi/N$	-57	-74

# 同阶的各种窗函数幅度特性比较 $N = 50$

相同阶数的矩形窗、三角窗和汉宁窗比较



相同阶数的汉宁窗、海明窗和布莱克曼窗比较



# Blackman窗在不同阶数N下的幅度特性比较

Blackman窗在不同阶数N下的幅度特性比较

