

# 中国科学技术大学

# 硕士学位论文



## 随机微分方程的 数值解

作者姓名: 刘玲

学科专业: 概率论与数理统计

导师姓名: 王冉 副研究员

完成时间: 二〇一六年五月



University of Science and Technology of China  
A dissertation for master's degree



# Numerical Simulation of Solution for Stochastic Differential Equations

Author : Ling Liu

Speciality : Probability and the mathematical statistics

Supervisor : Associate professor. Ran Wang

Finished Time : May, 2016

## 中国科学技术大学学位论文原创性声明

本人声明所呈交的学位论文,是本人在导师指导下进行研究工作所取得的成果。除已特别加以标注和致谢的地方外,论文中不包含任何他人已经发表或撰写过的研究成果。与我一同工作的同志对本研究所做的贡献均已在论文中作了明确的说明。

作者签名: 刘玲

签字日期: 2016.6.2

## 中国科学技术大学学位论文授权使用声明

作为申请学位的条件之一,学位论文著作权拥有者授权中国科学技术大学拥有学位论文的部分使用权,即:学校有权按有关规定向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版,允许论文被查阅和借阅,可以将学位论文编入《中国学位论文全文数据库》等有关数据库进行检索,可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存、汇编学位论文。本人提交的电子文档的内容和纸质论文的内容相一致。

保密的学位论文在解密后也遵守此规定。

公开  保密 \_\_\_\_\_ 年

作者签名: 刘玲

导师签名: 王冉

签字日期: 2016.6.2

签字日期: 2016.6.2

## 摘要

随机微分方程是在常微分方程、高等概率论和随机分析等学科的基础上发展起来的一门学科，它广泛应用于生物、科技和金融经济等多个领域。虽然理论上有些随机微分方程的解存在且唯一，但求出其显式表达式却很困难。为了实际需要，结合高速发展的现代计算机技术，构造其有效的数值解尤为重要。

本文第一章介绍随机微分方程的起源和发展，以及随机微分方程数值解的研究意义和研究现状。

第二章介绍一维标准布朗运动及其性质，用 Matlab 软件模拟布朗运动的轨迹图；介绍关于布朗运动的 Itô 型随机积分的构造过程以及 Itô 公式；用 Matlab 软件对 Itô 积分进行数值模拟，并与 Itô 积分的精确值进行对比。

第三章介绍关于布朗运动的 Itô 型随机微分方程的概念及解的存在唯一性定理；利用 Itô 公式解几种特殊的随机微分方程；对一维自治随机微分方程，介绍解的随机 Taylor 展开式。

第四章基于一维自治随机微分方程及其随机 Taylor 展开式，介绍 Euler 方法和 Milstein 方法两种常用的数值算法；分析数值解的收敛性和稳定性；用 Matlab 软件模拟具体随机微分方程的数值解，并与精确解对比，一系列的模拟实例表明了这两种算法的有效性和区别；用蒙特卡罗方法和 Matlab 软件对数值解的绝对误差进行计算，直观地展现绝对误差随时间步长的减小而减小的关系。

**关键词：** 随机微分方程，随机 Taylor 展开式，Euler 方法，Milstein 方法，Matlab 软件

## ABSTRACT

Stochastic Differential Equations is developed on the basis of multiple subjects, such as Ordinary Differential Equations, Advanced Probability Theory and Stochastic Analysis and so on, it is widely applied in the fields of biology, technology and financial and economy. However it is very difficult to get the exact solution of some stochastic differential equation, even if the existence and uniqueness of the solution of have been proved in theoretically. For application, it is particularly important to give the effective numerical solutions combined with the rapid development of modern computer technology.

In Chapter 1, I introduce the origin and development of stochastic differential equations, the research significance and status of numerical methods for solving stochastic differential equations.

In Chapter 2, I introduce the one dimensional Standard Brownian Motion and its property, gives the stochastic simulation of the Brownian motion trajectory figure by Matlab software. Itô formula and the construction of Itô stochastic integral about Standard Brownian Motion are also given in this chapter; the comparison between numerical simulation and precision value of Itô integral will be presented by Matlab software.

In Chapter 3, I introduce the concept of Itô type stochastic differential equations and the theorem giving conditions for the existence and uniqueness of a solution to SDE. In addition, I solve some special stochastic differential equations using Itô formula. For one dimensional autonomous stochastic differential equations, the stochastic Taylor expansions of its solution are introduced.

In Chapter 4, I introduce Euler-Maruyama and Milstein methods which are two kinds of commonly used numerical algorithms, based on stochastic Taylor expansions for one dimensional autonomous stochastic differential equations. In addition, I analyze the convergence and stability of numerical solutions. The numerical solutions simulation of some concrete stochastic differential equations will be completed by Matlab software and give the comparison with the exact solution in this chapter, a series of examples show the effectiveness and difference of the two algorithms. At last, the monte carlo methods will be used for calculating the absolute error of the numerical solutions, and also the relationship between the absolute error and the time step length is presented intuitively by Matlab.

**Keywords:** Stochastic differential equations, Stochastic Taylor expansions, Euler methods, Milstein methods, Matlab

## 目 录

摘 要	I
ABSTRACT	III
目 录	V
插图索引	VII
主要符号对照表	IX
第一章 绪论	1
1.1 随机微分方程的起源与发展	1
1.2 随机微分方程数值解的研究现状	2
第二章 布朗运动和 Itô 型随机积分	3
2.1 布朗运动的定义	3
2.2 布朗运动的性质	4
2.3 布朗运动的模拟	5
2.4 Itô 型随机积分	6
2.4.1 $\mathcal{L}^0$ 过程的 Itô 积分	6
2.4.2 $\mathcal{L}^2$ 过程的 Itô 积分	6
2.4.3 Itô 公式	7
2.5 Itô 积分的计算及数值模拟	7
2.5.1 Itô 积分的计算	7
2.5.2 Itô 积分的数值模拟	8
第三章 Itô 型随机微分方程	9
3.1 随机微分方程的定义	9
3.2 解几种特殊的随机微分方程	10
3.3 随机微分方程的随机 Taylor 展开式	11
第四章 Itô 型随机微分方程的数值解模拟	13
4.1 模拟数值解的两种常见方法	13
4.1.1 Euler-Maruyama 方法	13
4.1.2 Milstein 方法	13
4.2 收敛性与稳定性	14
4.2.1 数值解的收敛性	14
4.2.2 理论解和数值解的稳定性	15

4.3 Matlab 模拟数值解 .....	17
4.4 数值解误差分析 .....	21
4.4.1 蒙特卡罗方法简介 .....	21
4.4.2 数值解绝对误差估计 .....	22
第五章 总结与展望 .....	25
参考文献 .....	27
致 谢 .....	29

## 插图索引

2.1	Brown 运动的轨迹图 . . . . .	5
2.2	Itô 积分的数值解与真实解对比 . . . . .	8
4.1	Euler 方法和 Milstein 方法的均方稳定区域 . . . . .	16
4.2	O-U 过程的 Euler 数值解 . . . . .	17
4.3	O-U 过程数值解概率分布拟合 . . . . .	18
4.4	指数方程 Euler 数值解与精确解 . . . . .	19
4.5	指数方程 Milstein 数值解与精确解 . . . . .	20
4.6	简单线性方程数值解与精确解对比 . . . . .	20
4.7	绝对误差与时间间隔数的关系 . . . . .	23



## 主要符号对照表

SDE	随机微分方程
ODE	常微分方程
SBM	概率空间上标准布朗运动
$W_t(\omega)$	概率空间上一维标准布朗运动
$dX_t$	随机函数 $X_t$ 的 Itô 型随机微分
$N(0, 1)$	标准正态分布
$\mathbb{E}$	数学期望
$Var$	方差
$\mathbb{P}$	概率
$\Omega$	概率空间, $\Omega$ 中的元素记为 $\omega$
$\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$	$\sigma$ 代数流
$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$	完备的概率空间
$ \cdot $	$\mathbb{R}$ 上的范数
$\forall$	对任意的
$\exists$	存在
<i>a.s.</i>	几乎处处
<i>s.t.</i>	使得
<i>i.e.</i>	即
<i>i.i.d.</i>	独立同分布
<i>r.v.</i>	随机变量

## 第一章 绪论

### 1.1 随机微分方程的起源与发展

在生产实践中，常微分方程 (ODE) 很早就产生，如伽利略的自由落体运动、对数的发明以及物理学中都需要建立微分方程。17 世纪 70 年代，牛顿和莱布尼兹建立微积分的思想，使得常微分方程的理论得到迅速发展。常微分方程主要解决的是确定性的问题，随着科学技术的快速发展，许多不确定的因素在现实生活中层出不穷，如金融经济中的期权定价问题、人口增长问题、信号系统等，客观世界中随机现象已经不能被忽视。因此，很多学者在建立数学模型时，就要把不确定的因素加以考虑，于是随机微分方程开始得到研究和发

展。随机微分方程是随机分析和常微分方程等多个学科的结合。1827 年，Robert Brown 利用显微镜观察到，浸在溶液中的微小粒子受到水分子连续撞击呈现出不规则运动，提出了 Brown 运动。1905 年 Einstein 对它做出了合理的解释并求出了微粒的转移密度，并建立了物理模型。在 1908 年，法国学者 Langevin[1] 得到了 Langevin 随机微分方程

$$m \frac{dv(t)}{dt} = -\alpha v(t) + y(t)$$

其中  $v(t)$  为粒子速度， $m$  为粒子质量， $\alpha$  为常数， $y(t)$  为随机力。之后，Wiener 对 Brown 运动做出了数学上的大量研究，对 Brown 运动的轨道性质进行了深入研究，提出 Brown 运动上的 Wiener 积分，这为随机过程和随机积分的发展做出了巨大贡献。20 世纪 30 年代，Bernstein[2] 提出了随机微分方程，且给出了其与 Kolmogorov 方程基本解的关系。Doob 对 Markov 过程和鞅的研究，也为早期随机微分方程起到了重要作用。

1951 年，Itô 发表论文 [3] 创立了关于 Brown 运动的 Itô 型随机微分方程

$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dW_t, \quad X|_{t=0} = X_0, \quad t \geq 0.$$

其中  $W_t$  是 Brown 运动。该论文对随机微分方程的发展具有划时代意义，之后更多学者展开对随机微分方程的研究和应用。国外的 Mao[4]、Boukas[5] 和国内的胡达宣 [6]、吴付科 [7] 等人对随机微分方程的稳定性进行了深入探索。

现如今随机微分方程已经广泛应用于金融经济、科学技术和化学工程等各个领域。Markowitz[8] 提出了有价证券组合理论，Sharpe[9] 提出资产定价模型，Ross[10] 提出套利定价模型等。Sworder[11]、Wonham[12] 和 Mil'shtein[13] 等人对随机跳变系统展开了研究。Markov 过程和随机的方法在电子电路设计、高分子的降解、信息技术的滤波问题等都有着广泛的应用。

## 1.2 随机微分方程数值解的研究现状

随机微分方程的求解是一个重要的研究领域。我们已经知道，常微分方程的精确解有时候并没有显式表达式，此时退而求其次，研究数值近似解以满足实际需要，且 ODE 的数值解已经有了较为完善的理论和方法。对于随机微分方程来说，由于方程本身的随机因素，使得方程的求解远比 ODE 复杂。由于随机微分方程应用于现代生活的各个领域，因此随机微分方程数值解的研究显得尤为重要。

随着现代计算机技术的高速发展，随机微分方程数值解的研究已经取得了一定的成果。对于 Itô 型随机微分方程的数值解方法，常用的有 Euler 方法、Milstein 方法和基于随机 Taylor 展开式的各阶方法等。Tian 和 Burrage[14] 于 2001 年给出了隐式 Euler 方法、隐式 Milstein 方法和 1.5 阶隐式随机 Taylor 方法。对于随机微分方程数值解的收敛性，Platen 和 Wagner[15] 于 1982 年发表了对随机 Taylor 方法各种收敛性的研究，使得数值方法在理论上得到支撑。对于 Stratonovich 型随机微分方程，德国数学家 Runge 提出了随机 Runge-Kutta 方法 [16]，它也是基于随机 Taylor 展开式得到的。现在 Runge-Kutta 方法 [17] 已应用于求解泛函微分方程这类复杂的问题。由于数学家们的不断努力和现代计算机技术的快速发展，随机微分方程的数值求解方法在不断进步，数值求解的精度也在不断提高。

## 第二章 布朗运动和 Itô 型随机积分

### 2.1 布朗运动的定义

布朗运动源名于英国植物学家 Robert Brown, 1827 年, Robert Brown 利用显微镜观察到, 浸没在溶液中的微小粒子受到水分子连续撞击呈现出不规则运动, 提出了布朗运动。1905 年 Einstein 对它做出了合理的解释并求出了微粒的转移密度。在 1918 年, Wiener 给出布朗运动的定义和存在性证明, 因此布朗运动也被称为 Wiener 过程。布朗运动的研究标志着随机微分方程研究的开始。

由于本文主要是研究一维随机微分方程, 因此下面从一维布朗运动开始介绍。物理上认为, 布朗运动是因为液体周围的所有水分子都在运动且互相碰撞, 从而微粒周围大量的分子以微小但不稳定的力共同作用于它, 迫使它做不规则运动。若用  $W_t$  表示微粒在  $t$  时刻所处位置的坐标, 因为液体是均匀的, 可以设想从  $t_1$  到  $t_2$  的位移  $W_{t_2} - W_{t_1}$  是大量几乎独立的小位移之和。从而由中心极限定理 [18], 可以假设  $W_{t_2} - W_{t_1}$  服从正态分布, 并且不同时间段的位移理应是互相独立的。因此, 布朗运动定义如下:

**定义 2.1.1** (一维布朗运动 [19]). 设  $W_t$  是概率空间  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  上的实值过程, 称它为布朗运动 (Wiener 过程), 若

- (1)  $W_t(\omega)$  轨道连续;
- (2)  $W_0(\omega) = 0$ ;
- (3)  $\forall 0 \leq s \leq t$ , 增量  $W_t - W_s \sim N(0, \sigma^2(t-s))$ ;
- (4)  $\forall k \geq 1, 0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k$ , 随机变量  $W_{t_0}, W_{t_1} - W_{t_0}, \dots, W_{t_k} - W_{t_{k-1}}$  相互独立;

若  $\sigma^2 = 1$ , 则称  $W_t$  为一维标准布朗运动 (SBM)。

#### 注解 2.1.1.

1. 布朗运动是处处轨道连续的, 并且它是处处不可微的, 即它的运动轨迹是相当曲折的。
2. 对于标准 Brown 运动,  $\forall t > 0, h > 0$ , 有  $\Delta W_t = W_{t+h} - W_t \sim N(0, h)$ , 记随机变量  $\xi \sim N(0, 1)$ , 则  $\Delta W_t \sim \sqrt{h}\xi$ 。形式上看, 当  $h \rightarrow 0$  时, 有形如微积分中的情形

$$dW = \sqrt{h}\xi$$

因为布朗运动是处处不可微的, 这里的  $dW$  只能视为一种形式记法。

## 2.2 布朗运动的性质

**定义 2.2.1** (二次变差过程). 设  $\{X_t, \mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$  是实值随机过程, 对  $\forall t \geq 0$ , 考虑区间  $[0, t]$  的划分  $\Delta: 0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = t$ , 记  $|\Delta| = \max_{1 \leq i \leq n} |t_i - t_{i-1}|$ , 若存在随机过程  $\langle X, X \rangle_t$ , s.t.

$$V_{[0,t]}^2(X_t, \Delta) = \sum_{i=1}^n (X_{t_i} - X_{t_{i-1}})^2 \rightarrow \langle X, X \rangle_t, \quad |\Delta| \rightarrow 0, \quad \mathbb{P} - a.s.$$

称  $X_t$  具有有界二次变差, 称  $\langle X, X \rangle_t$  为  $X_t$  的二次变差过程.

**命题 2.2.1.** 设  $\{M_t, \mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$  是一个连续平方可积鞅 (i.e.  $\mathbb{E}M_t^2 < \infty$ ), 则  $M_t^2 - \langle M, M \rangle_t$  是鞅.

证明.  $M_t$  为连续平方可积鞅

$$\begin{aligned} M_t^2 &= M_0^2 + \sum_{i=1}^n (M_{t_i}^2 - M_{t_{i-1}}^2) \\ &= M_0^2 + 2 \sum_{i=1}^n M_{t_{i-1}} (M_{t_i} - M_{t_{i-1}}) + \sum_{i=1}^n (M_{t_i} - M_{t_{i-1}})^2, \end{aligned}$$

两边同时取极限, 有

$$\begin{aligned} M_t^2 - \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (M_{t_i} - M_{t_{i-1}})^2 &= M_0^2 + \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} 2 \sum_{i=1}^n M_{t_{i-1}} (M_{t_i} - M_{t_{i-1}}) \\ \therefore M_t^2 - \langle M, M \rangle_t &= M_0^2 + 2 \int_0^t M_s dM_s, \end{aligned}$$

由随机积分知识可知,  $\int_0^t M_s dM_s$  是鞅, 故  $M_t^2 - \langle M, M \rangle_t$  也是鞅.  $\square$

**命题 2.2.2.** 设  $\{M_t, \mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$  是一个连续平方可积鞅, 则  $M_t^2$  是下鞅, 由 Doob-Meyer 分解, 存在唯一的单增过程  $\{A_t\}_{t \geq 0}$ ,  $A_0 = 0$ , s.t.  $M_t^2 - A_t$  是鞅, 则此时  $A_t = \langle M, M \rangle_t$ .

证明. 设  $M_t^2 = Z_t + A_t$ ,  $Z_t$  为鞅,  $A_0 = 0$ , 由命题 2.2.1. 的证明可知

$$M_t^2 = M_0^2 + 2 \int_0^t M_s dM_s + \langle M, M \rangle_t, \quad \langle M, M \rangle_0 = 0,$$

由 D-M 分解的唯一性可知,  $A_t = \langle M, M \rangle_t$ .  $\square$

**引理 2.2.1.** 设  $W_t$  是概率空间  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  上的布朗运动, 则

$$\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} V_{[0,t]}^2(W, \Delta) = t, \quad \text{in } L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$$

证明. 见 [20].  $\square$

**定理 2.2.1** ([19]). 设  $W_t$  是概率空间  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  上的布朗运动, 则

$$\langle W, W \rangle_t = t.$$

证明. 由引理 2.2.1 知,  $\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \mathbb{E} | \sum_{i=1}^n (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2 - t |^2 = 0$ , 由切比雪夫不等式知,

$$\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \mathbb{P} \left( \left| \sum_{i=1}^n (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2 - t \right| > \varepsilon \right) \leq \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E} | \sum_{i=1}^n (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2 - t |^2}{\varepsilon^2} = 0, \quad \forall \varepsilon > 0,$$

$\therefore \langle W, W \rangle_t = t$ . □

**推论 2.2.1.** 对 a.s.  $\omega$ , 布朗运动  $W_t(\omega)$  在任意区间  $[0, t]$  上的全变差为  $+\infty$ .

证明. 因为  $\sum_{i=1}^n (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2 \leq \sup |W_{t_i} - W_{t_{i-1}}| \cdot \sum_{i=1}^n |W_{t_i} - W_{t_{i-1}}|$ ,

当  $|\Delta| \rightarrow 0$  时, 左边  $\rightarrow t$ ,  $\sup |W_{t_i} - W_{t_{i-1}}| \rightarrow 0$ , 若 SBM 的全变差有限, 则右边  $\rightarrow 0$ , 矛盾, 故得证. □

**命题 2.2.3** (Lévy 刻画 [21]). 设  $\{M_t, \mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$  为连续平方可积鞅, 它是布朗运动的充要条件是

$$\langle M, M \rangle_t = t.$$

### 2.3 布朗运动的模拟

下面对一维标准布朗运动的轨道用 Matlab 模拟。因为一维布朗运动可以看做质点在直线上做简单随机游动,  $W_t$  表示在时刻  $t$  质点的位置, 所以可以在二维平面上模拟。利用 Matlab 模拟布朗运动的步骤如下:

- (a) 设置等距时间点  $t_0 = 0, t_i = t_0 + ih, n = \frac{t_n - t_0}{h}, i = 1, \dots, n$ ;
- (b) 模拟独立随机变量  $\xi_i \sim N(0, 1), i = 1, \dots, n$ ;
- (c) 模拟一维标准 Brown 运动  $W_{t_i} - W_{t_0} = \sum_{j=1}^i (W_{t_j} - W_{t_{j-1}}) = \sum_{j=1}^i \sqrt{h} \xi_j$ .

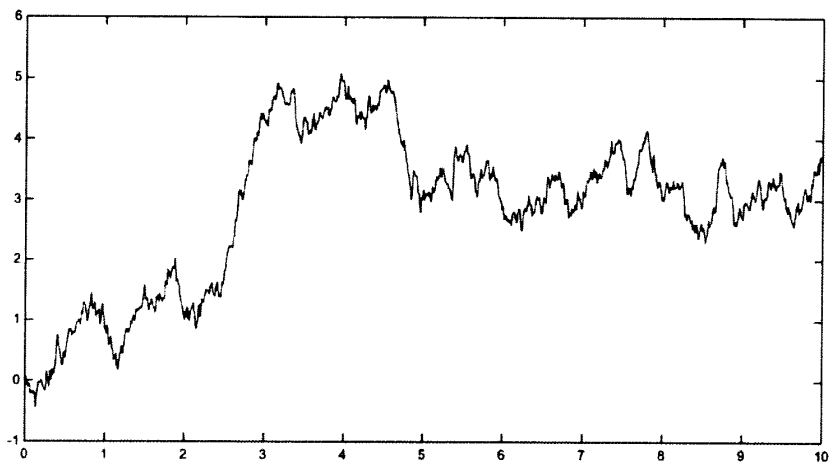


图 2.1 Brown 运动的轨迹图

## 2.4 Itô 型随机积分

在经典的分析学中, 若  $A_t$  具有有界全变差,  $f_t$  为可测函数, 则可定义 Lebesgue-stieltjes 积分  $\int_0^t f_s dA_s$ . 设  $\{W_t, \mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$  为概率空间  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  上的一维 SBM, 因为布朗运动的全变差为  $\infty$ , 形式为  $\int_0^t f_s dW_s$  的积分需要重新被定义, 这里的  $f_t$  为随机过程.

### 2.4.1 $\mathcal{L}^0$ 过程的 Itô 积分

记  $\mathcal{L}^0$  为所有简单过程构成的函数类. 即若  $f_t(\omega) \in \mathcal{L}^0$ , 则有

$$f_t(\omega) = \sum_{i=1}^n f_{t_{i-1}}(\omega) I_{[t_{i-1}, t_i)},$$

其中  $f_{t_{i-1}} \in \mathcal{F}_{t_{i-1}}$  平方可积.

**定义 2.4.1.** 对于简单过程  $f_t$ , 区间  $[0, t]$  的划分为  $\Delta: 0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = t$ , 定义  $f_t$  关于  $W_t$  的 Itô 积分

$$I_t(f) = \int_0^t f_s dW_s = \sum_{i=1}^n f_{t_{i-1}}(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})$$

**引理 2.4.1.** 如果  $f_t(\omega), g_t(\omega) \in \mathcal{L}^0$ , 则  $\forall t \geq 0$ , 有  $\mathbb{E}(I_t(f)) = 0$ ,  $\mathbb{E}(I_t(f)^2) = \mathbb{E} \int_0^t f_s^2 ds$ ; 更一般地,  $\forall 0 \leq s \leq t$  有

- (1)  $\mathbb{E}[I_t(f) - I_s(f) | \mathcal{F}_s] = 0$ , 即  $I_t(f)$  为连续鞅;
- (2)  $\mathbb{E}[I_t(f)^2 - I_s(f)^2 | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[\int_s^t f_s^2 ds | \mathcal{F}_s]$ , 即  $\langle I_t(f) \rangle_t = \int_0^t f_s^2 ds$ ;
- (3)  $\mathbb{E}[I_t(f)I_t(g)] = \mathbb{E}[\int_0^t f_s g_s ds]$ ;
- (4)  $I_t(f+g) = I_t(f) + I_t(g)$ .

证明. 见 [22]. □

### 2.4.2 $\mathcal{L}^2$ 过程的 Itô 积分

首先, 给出  $\mathcal{L}^2$  过程的定义 [23].

**定义 2.4.2.** 设  $f_t$  为循序可测过程,  $\forall t \geq 0$ , 定义  $\|f\|_{2,t} = [\mathbb{E} \int_0^t f_s^2 ds]^{\frac{1}{2}}$ , 定义

$$\mathcal{L}_t^2 = \{f : f \text{ 循序可测}, \|f\|_{2,t} < \infty\}.$$

可以证明  $\mathcal{L}_t^2$  在  $\|\cdot\|_{2,t}$  下是 Hilbert 空间, 定义

$$\mathcal{L}^2 = \bigcap_{t \geq 0} \mathcal{L}_t^2.$$

利用泛函分析的知识, 可以得到  $\forall f \in \mathcal{L}^2$ ,  $\exists$  序列  $f^n \in \mathcal{L}^0$ ,

$$f_t^{(n)}(\omega) = \sum_{i=1}^{2^n} f_{\frac{i-1}{2^n}t}(\omega) I_{[\frac{i-1}{2^n}t, \frac{i}{2^n}t)},$$

s.t.  $\|f_t^{(n)} - f_t\|_{2,t} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ , 于是有如下定义:

定义 2.4.3.  $f \in \mathcal{L}^2$  过程关于 SBM 的 Itô 积分为

$$I_t(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} I_t(f_n).$$

同样可以证明, 上述 Itô 积分有着引理 2.4.1. 形式完全相同的四个性质。

### 2.4.3 Itô 公式

定理 2.4.1 ([20]). 设  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  为可测映射, 且  $F \in \mathcal{C}^2$ ,  $X_t$  为连续半鞅, 则

$$F(X_t) = F(X_0) + \int_0^t F'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t F''(X_s) d\langle X, X \rangle_s.$$

证明思路.

第一步: 局部化(条件特殊化), 利用停时的技巧, 将问题简化;

第二步: Taylor 展开, 对特殊情形证明公式成立;

第三步: 对于一般情形, 应用控制收敛定理, Fatou 引理可得。

注解 2.4.1. 从形式上, Itô 公式可写成

$$dF(X_t) = F'(X_t) dX_t + \frac{1}{2} F''(X_t) d\langle X, X \rangle_t.$$

## 2.5 Itô 积分的计算及数值模拟

这里从具体的实例介绍。

### 2.5.1 Itô 积分的计算

例 2.5.1. 计算随机积分  $X_t = \int_0^t W_s dW_s$ 。

解: (法一) 从 Itô 型随机积分的定义出发可得

$$\begin{aligned} \int_0^t W_s dW_s &= \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n W_{t_{i-1}} (W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) \\ &= \frac{1}{2} \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [(W_{t_i}^2 - W_{t_{i-1}}^2) - (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2] \\ &= \frac{1}{2} W_t^2 - \frac{1}{2} \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2 \\ &= \frac{1}{2} W_t^2 - \frac{1}{2} \langle W, W \rangle_t \\ &= \frac{1}{2} W_t^2 - \frac{1}{2} t. \end{aligned}$$

(法二) 令  $F(W_t) = \frac{1}{2} W_t^2$ , 应用 Itô 公式有

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} W_t^2 &= \int_0^t W_s dW_s + \frac{1}{2} \int_0^t ds, \\ \therefore X_t &= \int_0^t W_s dW_s = \frac{1}{2} W_t^2 - \frac{1}{2} t. \end{aligned}$$



## 2.5.2 Itô 积分的数值模拟

下面利用 Matlab 模拟例 2.5.1. 的数值解并与真实解作比较，具体步骤如下：

- (a) 选取积分上限  $T = 2$ ，设定步长  $h = 0.001$ ，计算求和个数  $n = \frac{t}{h}$ ，计算等距时间点

$$t_0 = 0, t_i = t_0 + ih, i = 1, \dots, n;$$

- (b) 模拟每个时间点的 SBM 的值，得到在 T 时刻的数值解

$$X_T^{(n)} = \sum_{i=1}^n W_{t_{i-1}}(W_{t_i} - W_{t_{i-1}});$$

- (c) 利用例 2.5.1. 的结果得到计算精确解  $X_T = \frac{1}{2}W_T^2 - \frac{1}{2}T$ ;

- (d) 选取多个时间点，重复上述步骤，最后在同一坐标系中画出模拟值与精确值的图像。结果如下图：

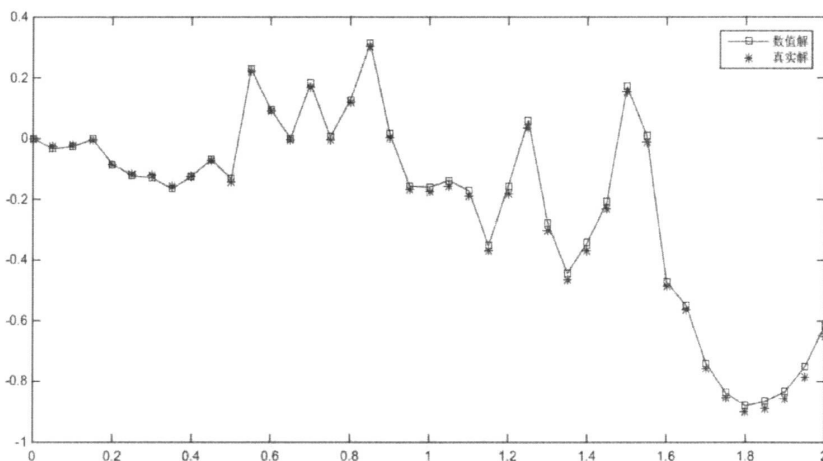


图 2.2 Itô 积分的数值解与真实解对比

### 第三章 Itô 型随机微分方程

#### 3.1 随机微分方程的定义

本文仅考虑关于布朗运动的随机微分方程解的模拟，所以这里只给出关于布朗运动的 Itô 型随机微分方程的定义。设  $\{W_t, \mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$  是  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  上的标准布朗运动， $a(t), b(t)$  是循序可测过程，满足  $\forall t \geq 0, \int_0^t |a(s)| ds < \infty$  a.s.,  $\int_0^t |b^2(s)| ds < \infty$  a.s., 则  $\int_0^t a(s) ds$  和 Itô 型随机积分  $\int_0^t b(s) dW_s$  有定义。记  $X_t = X_0 + \int_0^t a(s) ds + \int_0^t b(s) dW_s$ , 于是得到 Itô 型随机微分方程的定义:

**定义 3.1.1** (随机微分方程 [24] [25]). 设  $W_t$  是一维标准布朗运动,  $a(t), b(t) \in \mathbb{R}$  是循序可测过程, 方程

$$\begin{cases} dX_t = a(t)dt + b(t)dW_t & (t \geq 0) \\ X|_{t=0} = X_0 \end{cases}$$

称为 Itô 型随机微分方程 (SDE)。  $a(t)$  称为  $X_t$  的漂移项,  $b(t)$  称为  $X_t$  的扩散项。

更一般地, 若  $a(t, x), b(t, x) (x \in \mathbb{R})$  是 Borel 可测函数, 对适应过程  $X_t, a(t, X_t), b(t, X_t)$  也是适应的, 此时的 SDE 为

$$\begin{cases} dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dW_t & (t \geq 0) \\ X|_{t=0} = X_0 \end{cases} \quad (3.1)$$

其中  $a(t, X_t)$  称为漂移系数,  $b(t, X_t)$  称为扩散系数。

在常微分方程中, 我们知道通常很难求出显式解, 且有时方程的解根本不存在。对于随机微分方程 (3.1) 来说, 它的形式已明显不同于常微分方程, 但仍可以给出与常微分方程解的存在性定理相似的存在唯一性定理。

**定理 3.1.1** (解的存在唯一性 [26]). 对于随机微分方程 (3.1),  $a(t, x), b(t, x) (x \in \mathbb{R})$  是 Borel 可测函数, 若  $a(t, x), b(t, x)$  满足:

- (1) (整体 Lipschitz 连续)  $|a(t, x) - a(t, y)| + |b(t, x) - b(t, y)| \leq K|x - y|, \forall x, y \in \mathbb{R},$
- (2) (线性增长)  $|a(t, x)|^2 + |b(t, x)|^2 \leq K^2(1 + x^2),$

则此方程存在唯一解。

### 3.2 解几种特殊的随机微分方程

例 3.2.1 (Ornstein-Uhlenbeck 过程).

$$dX(t) = -\alpha X_t dt + \sigma dW_t, \quad X|_{t=0} = X_0, \quad \alpha > 0, \sigma \text{ 为常数.} \quad (3.2)$$

解: 若  $\sigma = 0$ , 则 ODE 的解为  $X_0 e^{-\alpha t}$ .

若  $\sigma \neq 0$ , 为了解这个 SDE, 令  $Y_t = X_t e^{\alpha t}$ , 则

$$\begin{aligned} dY_t &= e^{\alpha t} dX_t + X_t d e^{\alpha t} \\ &= \sigma e^{\alpha t} dW_t. \end{aligned}$$

得  $Y_t = Y_0 + \int_0^t \sigma e^{\alpha s} dW_s$ , 因此

$$X_t = e^{-\alpha t} \left( X_0 + \int_0^t \sigma e^{\alpha s} dW_s \right).$$

例 3.2.2 (指数方程).

$$dX_t = X_t dW_t, \quad X|_{t=0} = X_0. \quad (3.3)$$

解: 取  $f(x) = \ln x$ , 则  $f'(x) = \frac{1}{x}$ ,  $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$ . 令  $Y_t = \ln X_t$ , 由 Itô 公式,

$$\begin{aligned} dY_t &= f'(X_t) dX_t + \frac{1}{2} f''(X_t) d\langle X, X \rangle_t \\ &= \frac{1}{X_t} dX_t - \frac{1}{2} \frac{1}{X_t^2} d\langle X, X \rangle_t \\ &= dW_t - \frac{1}{2} dt \end{aligned}$$

$$\therefore X_t = X_0 \cdot \exp \left( W_t - \frac{1}{2} t \right).$$

例 3.2.3 (简单线性随机微分方程).

资产价格  $X_t$  满足的随机微分方程为

$$dX_t = r X_t dt + \sigma X_t dW_t, \quad r, \sigma \in \mathbb{R}, \quad X|_{t=0} = X_0. \quad (3.4)$$

解: 取  $f(x) = \ln x$ , 则  $f'(x) = \frac{1}{x}$ ,  $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$ . 令  $Y_t = \ln X_t$ , 由 Itô 公式得,

$$\begin{aligned} dY_t &= \frac{1}{X_t} dX_t - \frac{1}{2} \frac{1}{X_t^2} d\langle X, X \rangle_t \\ &= \frac{1}{X_t} (r X_t dt + \sigma X_t dW_t) - \frac{1}{2} \frac{1}{X_t^2} \sigma^2 X_t^2 dt \\ &= \left( r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dW_t. \end{aligned}$$

写成积分形式

$$Y_t = Y_0 + \left( r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W_t,$$

$$\therefore X_t = X_0 \cdot \exp\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t\right).$$

更进一步, 对于一般的齐次线性随机微分方程

$$dX_t = A_t X_t dt + B_t X_t dW_t, \quad X|_{t=0} = X_0.$$

$A_t, B_t$  满足解的存在唯一性条件。采用例 3.2.3. 同样的方法, 得此方程的解为

$$X_t = X_0 \cdot \exp\left(\left(A_t - \frac{1}{2}B_t^2\right)t + B_t W_t\right).$$

### 3.3 随机微分方程的随机 Taylor 展开式

Taylor 展开在经典分析学的重要内容, 截取 Taylor 展开式的不同阶 [27], 已经得到多种 ODE 的数值解法。现结合 Itô 公式, 先分析得出随机 Taylor 展开式 [28]。为本文需要, 仅考虑一维自治随机微分方程。

设  $a(X_t), b(X_t)$  满足解的存在唯一性定理中的条件, 考虑下面的一维自治随机微分方程

$$dX_t = a(X_t)dt + b(X_t)dW_t, \quad X|_{t=0} = X_0. \quad (3.5)$$

此方程解的积分形式为

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(X_s)ds + \int_0^t b(X_s)dW_s. \quad (3.6)$$

对  $\forall F \in C^2, F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  为可测函数, 应用 Itô 公式得

$$\begin{aligned} F(X_t) &= F(X_0) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial x} F(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x^2} F(X_s) d\langle X, X \rangle_s \\ &= F(X_0) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial x} F(X_s) [a(X_s)ds + b(X_s)dW_s] \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x^2} F(X_s) b^2(X_s) ds \\ &= F(X_0) + \int_0^t \left[ a(X_s) \frac{\partial}{\partial x} F(X_s) + \frac{1}{2} b^2(X_s) \frac{\partial^2}{\partial x^2} F(X_s) \right] ds \\ &\quad + \int_0^t b(X_s) \frac{\partial}{\partial x} F(X_s) dW_s, \end{aligned} \quad (3.7)$$

为方便起见, 定义算子  $L^0, L^1$ :

$$\begin{cases} L^0 = a(X_s) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2} b^2(X_s) \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \\ L^1 = b(X_s) \frac{\partial}{\partial x}, \end{cases} \quad (3.8)$$

则 (3.7) 式记为

$$F(X_t) = F(X_0) + \int_0^t L^0 F(X_s) ds + \int_0^t L^1 F(X_s) dW_s, \quad (3.9)$$

因为式 (3.9) 中的  $F$  是任意二阶连续可微函数, 分别取  $F(X_t) = a(X_t)$ ,  $F(X_t) = b(X_t)$ , 代入 (3.9) 式, 可得

$$\begin{aligned} X_t &= X_0 + \int_0^t \left[ a(X_0) + \int_0^s L^0 a(X_z) dz + \int_0^s L^1 a(X_z) dW_z \right] ds \\ &\quad + \int_0^t \left[ b(X_0) + \int_0^s L^0 b(X_z) dz + \int_0^s L^1 b(X_z) dW_z \right] dW_s \\ &= X_0 + a(X_0) \int_0^t ds + b(X_0) \int_0^t dW_s + R \end{aligned} \quad (3.10)$$

其中余项

$$\begin{aligned} R &= \int_0^t \int_0^s L^0 a(X_z) dz ds + \int_0^t \int_0^s L^1 a(X_z) dW_z ds \\ &\quad + \int_0^t \int_0^s L^0 b(X_z) dz dW_s + \int_0^t \int_0^s L^1 b(X_z) dW_z dW_s \end{aligned}$$

这就是最简单的随机 Taylor 展开式。

对 (3.10) 式继续分析, 在 (3.9) 式中令  $F = L^1 b(X_t)$ , 代入 (3.10) 式得

$$X_t = X_0 + a(X_0) \int_0^t ds + b(X_0) \int_0^t dW_s + L^1 b(X_0) \int_0^t \int_0^s dW_z dW_s + \tilde{R}. \quad (3.11)$$

其中余项

$$\begin{aligned} \tilde{R} &= \int_0^t \int_0^s L^0 a(X_z) dz ds + \int_0^t \int_0^s L^1 a(X_z) dW_z ds \\ &\quad + \int_0^t \int_0^s L^0 b(X_z) dz dW_s + \int_0^t \int_0^s \int_0^z L^0 L^1 b(X_u) du dW_z dW_s \\ &\quad + \int_0^t \int_0^s \int_0^z L^1 L^1 b(X_u) dW_u dW_z dW_s \end{aligned}$$

于是, 得到的式 (3.11) 为阶数更高的随机 Taylor 展开式。

仿照上述过程, 对 (3.9) 式继续取不同的函数, 代入 (3.11) 式, 则可进一步得到随机 Taylor 展开式的更高阶形式。

## 第四章 Itô 型随机微分方程的数值解模拟

在上一章, 我们给出了 Itô 型 SDE (3.1) 的解的存在唯一性定理, 然而, 除了线性 SDE, 一些复杂的 SDE 的解析解很难得到。在绝大多数实际应用中, 我们迫切需要得到 SDE 的确实可行的解, 因此, 数值近似解方法的构造显得尤为重要。本章基于一维自治 SDE (3.5)

$$dX_t = a(X_t)dt + b(X_t)dW_t, \quad X|_{t=0} = X_0,$$

将介绍两种常见的 SDE 的数值解法, 并分析它们的收敛性和稳定性。通过具体的实例用 Matlab 模拟数值解, 并与精确解对比直观地看到近似效果, 最后将利用蒙特卡罗方法分析数值解的误差。

### 4.1 模拟数值解的两种常见方法

#### 4.1.1 Euler-Maruyama 方法

在求 Itô 型 SDE 的数值解方法中, Euler-Maruyama 方法是最简单的一种, 简称为 Euler 方法。由 Maruyama[29] 将确定性的 Euler 方法应用于 Itô 型 SDE 中获得。它是将一维自治 SDE (3.5) 的随机 Taylor 展开式 (3.10) 式做 0.5 阶截断, 舍去余项  $R$ , 得到对  $0 \leq p \leq n-1$ ,

$$\begin{aligned} X_{(p+1)T/n} &= X_{pT/n} + \int_{pT/n}^{(p+1)T/n} a(X_s)ds + \int_{pT/n}^{(p+1)T/n} b(X_s)dW_s \\ &\simeq X_{pT/n} + a(X_{pT/n})\frac{T}{n} + b(X_{pT/n})(W_{(p+1)T/n} - W_{pT/n}) \end{aligned} \quad (4.1)$$

具体模拟算法如下: 选取时间  $T > 0$ , 步长  $h > 0$ , 迭代次数  $n = \frac{T}{h}$ , 对  $0 \leq p \leq n-1$ , 建立如下迭代

$$\begin{cases} X_0^n = X_0 \\ X_{(p+1)T/n}^n = X_{pT/n}^n + a(X_{pT/n}^n)\frac{T}{n} + b(X_{pT/n}^n)(W_{(p+1)T/n} - W_{pT/n}) \end{cases} \quad (4.2)$$

在实际的模拟中, 也可以直接将  $W_{(p+1)T/n} - W_{pT/n}, p = 0, \dots, n-1$  的模拟用  $n$  个独立的 Gauss 过程  $\xi_p \sim \sqrt{h}N(0, 1)$  来代替。

#### 4.1.2 Milstein 方法

Milstein 方法 [30] 是将随机 Taylor 展开式 (3.11) 式做 1 阶截断, 舍弃余项  $\tilde{R}$ , 选取时间  $T > 0$ , 步长  $h > 0$ , 迭代次数  $n = \frac{T}{h}$ , 对  $0 \leq p \leq n-1$ , 建立如

下迭代算法:

$$\begin{cases} X_0^n = X_0 \\ X_{(p+1)T/n}^n = X_{pT/n}^n + a(X_{pT/n}^n) \frac{T}{n} + b(X_{pT/n}^n)(W_{(p+1)T/n} - W_{pT/n}) \\ \quad + b'(X_{pT/n}^n)b(X_{pT/n}^n) \int_{pT/n}^{(p+1)T/n} (W_s - W_{pT/n}) dW_s \end{cases}$$

对于实际的模拟过程, 先计算随机积分

$$\begin{aligned} & \int_{pT/n}^{(p+1)T/n} (W_s - W_{pT/n}) dW_s \\ &= \frac{1}{2} \left[ W_{(p+1)T/n}^2 - W_{pT/n}^2 - \frac{T}{n} \right] - W_{pT/n}(W_{(p+1)T/n} - W_{pT/n}) \\ &= \frac{1}{2} \left[ (W_{(p+1)T/n} - W_{pT/n})^2 - \frac{T}{n} \right] \end{aligned}$$

故 Milstein 方法简化为

$$\begin{cases} X_0^n = X_0 \\ X_{(p+1)T/n}^n = X_{pT/n}^n + a(X_{pT/n}^n) \frac{T}{n} + b(X_{pT/n}^n)(W_{(p+1)T/n} - W_{pT/n}) \\ \quad + \frac{1}{2} b'(X_{pT/n}^n)b(X_{pT/n}^n) \left[ (W_{(p+1)T/n} - W_{pT/n})^2 - \frac{T}{n} \right] \end{cases} \quad (4.3)$$

## 4.2 收敛性与稳定性

### 4.2.1 数值解的收敛性

设从  $t_0 = 0$  时刻开始, 步长为  $h$ , 随机微分方程 (3.5) 迭代  $n$  步时精确解  $X_T$  所对应的数值近似解为  $X_T^n$ , 现研究数值解的轨迹收敛性和矩收敛性, 即强收敛性和弱收敛 [31].

**定义 4.2.1** (强收敛性).

若  $\exists C > 0$  (与  $h$  无关) 和  $\delta > 0$ , s.t.

$$\mathbb{E}|X_T^n - X_T| \leq Ch^p, \quad h \in (0, \delta)$$

称该数值解  $p$  阶强收敛于真实解  $X_T$ .

**定义 4.2.2** (弱收敛性).

若  $\exists 2(p+1)$  次可微多项式  $\varphi$ ,  $\exists C > 0$  (与  $h$  无关) 和  $\delta > 0$ , s.t.

$$|\mathbb{E}[\varphi(X_T^n) - \varphi(X_T)]| \leq Ch^p, \quad h \in (0, \delta)$$

称该数值解  $p$  阶弱收敛于真实解  $X_T$ .

从定义可以看出, 令  $\varphi(x) = x^p$ , 弱收敛包含各阶矩收敛。

对于 Euler-Maruyama 方法, 已经证明它是 0.5 阶强收敛 [32] 和 1 阶弱收敛 [33], 而 Milstein 方法是 1 阶强收敛和 2 阶弱收敛。

### 4.2.2 理论解和数值解的稳定性

当一维简单线性 SDE

$$dX_t = rX_t dt + \sigma X_t dW_t, \quad r, \sigma \in \mathbb{R}, X|_{t=0} = X_0 \quad (4.4)$$

满足解的存在唯一性定理, 且平凡解为  $X_t \equiv 0$ , 此时可以讨论平凡解的稳定性。

**定义 4.2.3** (随机渐近稳定 [34]).

若方程 (4.4) 的平凡解满足

$$\mathbb{P}(\lim_{t \rightarrow \infty} |X_t| = 0) = 1, \quad \forall X_0 \in \mathbb{R},$$

则称它为随机渐近稳定的。

由例 3.2.3. 知, 方程 (4.4) 的解为  $X_t = X_0 \cdot \exp\left((r - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t\right)$ , 所以当  $r - \frac{1}{2}\sigma^2 < 0$  时, 此平凡解为随机渐近稳定的。

**定义 4.2.4** ( $p$  阶矩渐近稳定 [6]).

若方程 (4.4) 的平凡解满足,  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \delta_0 > 0, s.t.$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|X_t|^p &< \varepsilon, \quad \forall t \geq 0, |X_0| \leq \delta; \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}|X_t|^p &= 0, \quad \forall |X_0| \leq \delta_0, \end{aligned}$$

则称它是  $p$  阶矩渐近稳定的。

当  $p = 1$  时, 称之为渐近均值稳定; 当  $p = 2$  时, 称为均方稳定 (MS 稳定)。

对方程 (4.4), 计算可得  $\mathbb{E}|X_t|^2 = X_0^2 \cdot e^{(2r + \sigma^2)t}$ , 所以当  $r + \frac{1}{2}\sigma^2 < 0$ , 方程的平凡解是均方稳定的。由  $r - \frac{1}{2}\sigma^2 < r + \frac{1}{2}\sigma^2$  知, 均方稳定必有随机渐近稳定。

通常用均方稳定性来衡量数值解的稳定性。设运用数值方法求解 SDE (4.4) 的迭代格式为

$$X_T^{i+1} = \phi(h, r, \sigma, \sqrt{h}\xi)X_T^i, \quad \xi \sim N(0, 1)$$

令  $p = rh, q = \sqrt{h}\sigma$ , 则  $X_T^{i+1} = \tilde{\phi}(p, q)X_T^i$ , 称  $R(p, q) = \mathbb{E}\tilde{\phi}^2(p, q)$  为此数值方法的均方稳定函数, 称  $S = \{(p, q) \mid |R(p, q)| < 1\}$  为均方稳定区域。



**例 4.2.1.** 对于方程 (4.4), 分别求 Euler 方法和 Milstein 方法的均方稳定函数, 画出均方稳定区域。

**解:** (1) 将 Euler 方法运用于方程 (4.4), 有如下迭代

$$X_T^{i+1} = (1 + p + q\xi)X_T^i$$

得到均方稳定函数为

$$\begin{aligned} R_E(p, q) &= \mathbb{E}(1 + p + q\xi)^2 \\ &= \mathbb{E}[(1 + p)^2 + 2(1 + p)q\xi + q^2\xi^2] \\ &= (1 + p)^2 + q^2 \end{aligned}$$

故均方稳定区域为  $S = \{(p, q) \mid (1 + p)^2 + q^2 < 1\}$ 。

(2) 将 Milstein 方法运用于方程 (4.4), 有如下迭代

$$X_T^{i+1} = \left(1 + p + q\xi + \frac{1}{2}q^2(\xi^2 - 1)\right) X_T^i$$

计算得到均方稳定函数为  $R_M(p, q) = (1 + p)^2 + q^2 + \frac{q^4}{2}$ ,

故均方稳定区域为  $S = \{(p, q) \mid (1 + p)^2 + q^2 + \frac{q^4}{2} < 1\}$ ,

用 Matlab 做出上半平面图像:

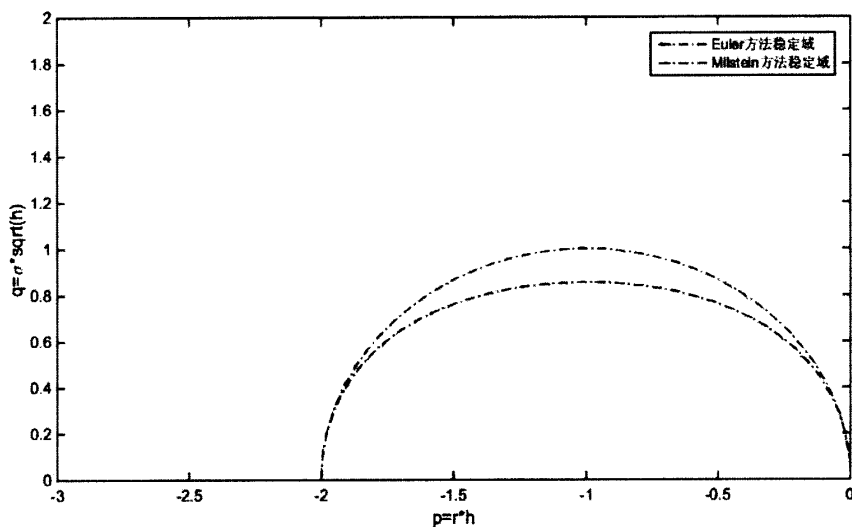


图 4.1 Euler 方法和 Milstein 方法的均方稳定区域

### 4.3 Matlab 模拟数值解

现用 Euler 方法和 Milstein 方法, 对 3.2 节中的几种特殊方程用 Matlab 模拟其数值解。对于指数方程和一维线性 SDE, 因为其精确解的表达式不涉及 Itô 积分, 可以准确计算, 故可将数值解与精确解作图对比。

**例 4.3.1.** 对 Ornstein-Uhlenbeck 过程

$$dX(t) = -\alpha X_t dt + \sigma dW_t, \quad X|_{t=0} = X_0,$$

取  $\alpha = 2, \sigma = 1, X_0 = 1$  模拟数值解图像。

**解:** 此方程是一维自治方程的特殊情形, 其中  $a(X_t) = -\alpha X_t$ ,  $b(X_t) = \sigma$ , 所以  $b'(X_t) = 0$ , 故 Euler 方法和 Milstein 方法结果相同。选定时间  $T$ , 步长  $h$ ,  $n = \frac{T}{h}$ , 令  $i = 0, 1, \dots, n-1$ , Euler 算法如下:

- (a) 从初始条件  $X_0$  产生  $E_0$ ,  $i = 0$ ;
- (b) 从标准正态分布中产生随机数  $\xi_i$ ;
- (c) 计算  $E_{i+1} = E_i + a(E_i)h + b(E_i)\sqrt{h}\xi_i$ ;
- (d)  $i = i + 1$ , 返回 (b)。

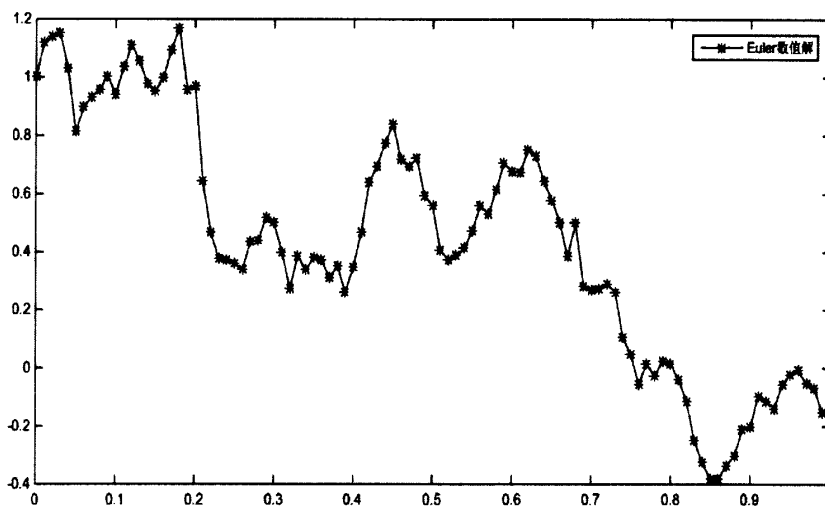


图 4.2 O-U 过程的 Euler 数值解

下面对该数值方法判断其近似效果, 因为该精确解带有 Itô 积分, 不能直接计算出来, 所以从解的概率分布来考虑。

∴ 该方程的精确解为

$$X_t = e^{-2t} \left( 1 + \int_0^t e^{2s} dW_s \right)$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \quad \mathbb{E}X_t &= e^{-2t} \\
 \mathbb{E}X_t^2 &= \mathbb{E}e^{-4t} \left[ 1 + 2 \int_0^t e^{2s} dW_s + \left( \int_0^t e^{2s} dW_s \right)^2 \right] \\
 &= e^{-4t} \left( 1 + \int_0^t e^{4s} ds \right) \\
 &= \frac{1}{4} + \frac{3}{4}e^{-4t} \\
 \therefore \quad \text{Var}(X_t) &= \mathbb{E}X_t^2 - (\mathbb{E}X_t)^2 \\
 &= \frac{1}{4}(1 - e^{-4t})
 \end{aligned}$$

$\therefore$  布朗运动  $W_t$  是 Gauss 过程，由 Itô 积分的定义及 Gauss 过程的性质知， $X_t$  也是 Gauss 过程，

$$\therefore X_t \sim N\left(e^{-2t}, \frac{1}{4}(1 - e^{-4t})\right)$$

本例中，取时间  $T = 1$ ，则有  $X_T \sim N(e^{-2}, \frac{1}{4}(1 - e^{-4}))$ ，即精确解服从均值为  $e^{-2} \simeq 0.1353$ ，标准差为  $\sqrt{\frac{1}{4}(1 - e^{-4})} \simeq 0.4954$  的正态分布。

用 Matlab 软件拟合 Euler 算法所得的数值解  $X_T^n$  的概率密度函数和正态分布的参数，具体步骤如下：

- (a) 取  $N = 1000$ ，用 Euler 算法模拟  $N$  个独立的数值解  $(X_{T1}, \dots, X_{TN})$ ；
- (b) 用 ksdensity 函数拟合  $N$  个数值解  $X_T$  的概率密度函数；
- (c) 用 normfit 函数拟合所估计的数值解服从的正态分布的均值和标准差。

所得结果如下图：

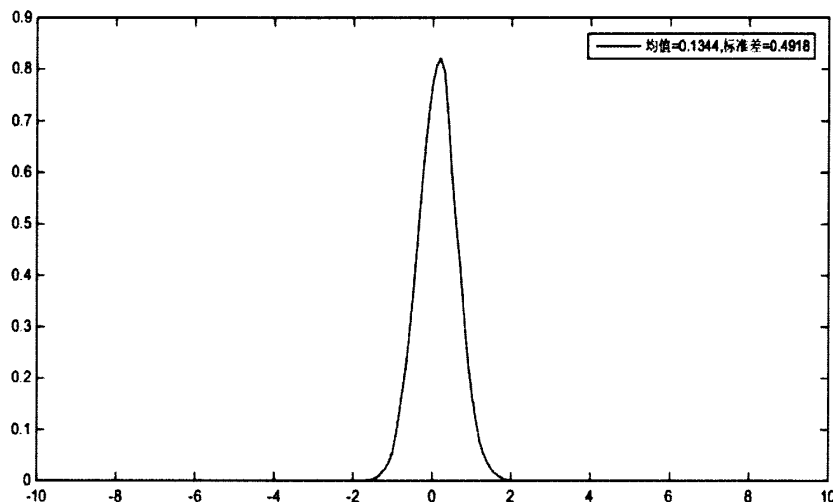


图 4.3 O-U 过程数值解概率分布拟合

从拟合的结果来看, Euler 算法所得数值解服从均值为 0.1344, 标准差为 0.4918 的正态分布, 故该数值方法是有效的。

#### 例 4.3.2. 对指数方程

$$dX_t = X_t dW_t, \quad X|_{t=0} = X_0,$$

取  $X_0 = 1$ , 模拟数值解图像, 并与精确解对比。

解: 此题的精确解为  $X_t = X_0 \cdot \exp(W_t - \frac{1}{2}t)$ , 选定时间  $T$ , 步长  $h$ ,  $n = \frac{T}{h}$ , 令  $i = 0, 1, \dots, n-1$ , 类似例 4.3.1. 的算法做出 Euler 方法的图像:

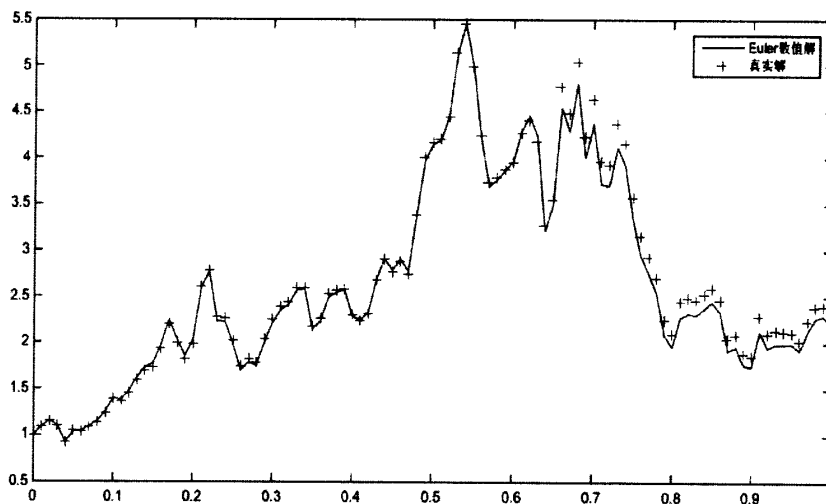


图 4.4 指数方程 Euler 数值解与精确解

对于 Milstein 方法, 按如下算法作图:

- (a) 从初始条件  $X_0$  产生  $M_0$ ,  $W_0 = 0$ ,  $i = 0$ ;
- (b) 从标准正态分布中产生随机数  $\xi_i$ , 得到  $W_{i+1} = W_i + \xi_i$ ;
- (c) 计算数值解  $M_{i+1} = M_i + M_i \sqrt{h} \xi_i + \frac{1}{2} M_i ((W_{i+1} - W_i)^2 - h)$ ,  
计算精确解  $X_{i+1} = \exp(W_{i+1} - \frac{1}{2}(i+1)h)$ ;
- (d)  $i = i + 1$ , 返回 (b)。

所得结果如下图:

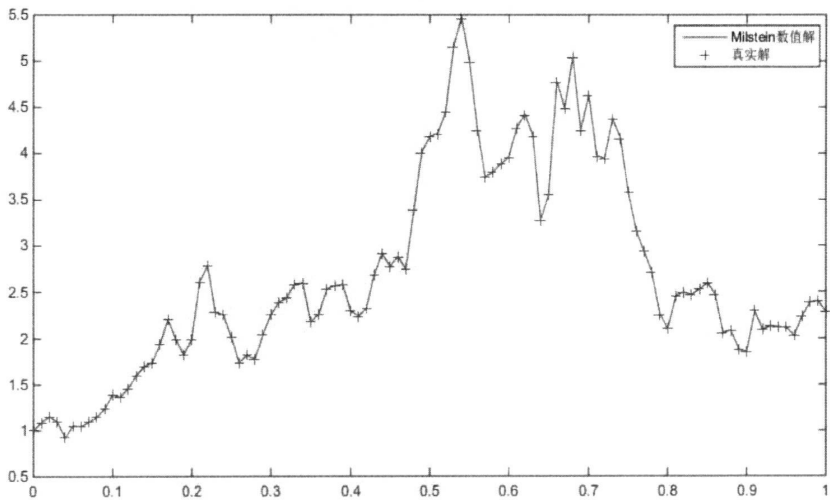


图 4.5 指数方程 Milstein 数值解与精确解

从这两个图像可以直观地看出，Euler 方法和 Milstein 方法数值解都可以逼近真实解，但 Milstein 方法比 Euler 方法近似效果更好，而 Euler 方法比 Milstein 方法更简便快捷。

例 4.3.3. 对一维简单线性 SDE (4.4),

$$dX_t = rX_t dt + \sigma X_t dW_t, \quad r, \sigma \in \mathbb{R}, \quad X|_{t=0} = X_0,$$

取  $r = 2, \sigma = 1, X_0 = 1$  模拟数值解，并与精确解对比。

解: 方程的精确解为  $X_t = X_0 \cdot \exp\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t\right)$ ，类似上例的 Euler 算法和 Milstein 算法，分别做出如下图像：

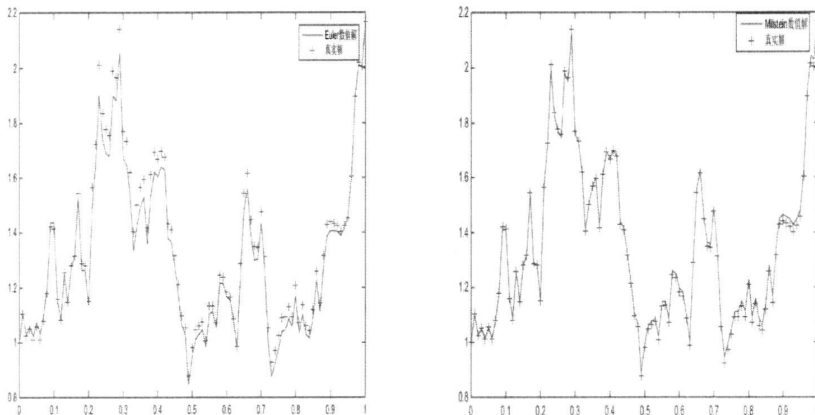


图 4.6 简单线性方程数值解与精确解对比

#### 4.4 数值解误差分析

由数值解的强收敛定义知, 若数值解  $p$  阶强收敛, 则  $\exists C > 0$  (与  $h$  无关) 和  $\delta > 0, s.t.$

$$\mathbb{E}|X_T^n - X_T| \leq Ch^p, \quad h \in (0, \delta)$$

粗略地认为, 绝对误差  $\mathbb{E}|X_T^n - X_T|$  随着步长  $h$  的减小而减小。在 Matlab 数值模拟绝对误差时, 数学期望不能被直接计算出来, 在模拟好数值解  $X_T^n$  之后, 数学期望的模拟成为误差估计的关键。

##### 4.4.1 蒙特卡罗方法简介

在随机模拟乃至统计、金融经济、科学技术和工程等领域, 蒙特卡罗方法 (Monte Carlo Methods) 已经被广泛运用。蒙特卡罗方法起源于 18 世纪, 为了验证大数定律, 法国数学家蒲丰 (C.D. Buffon) 用随机投针方法来估计圆周率。20 世纪 40 年代, 美籍数学家和物理学家费米 (E. Fermi) 建议用蒙特卡罗方法进行中子运输模拟。由于没有电子计算机, 不能进行大数据的模拟实验, 蒙特卡罗方法经历了漫长的等待。

随着现代计算机的快速发展, 蒙特卡罗方法已经逐渐得到发展。早期, Marsaglia[35][36] 和 G. 马萨格利亚等人为伪随机数的产生做出了重要贡献, 20 世纪 80 年代 Matlab 数学软件的出现使伪随机数的周期接近无穷大, 后期蒙特卡罗随机抽样方法迅速发展, 降低方差提高效率的方法已应用于各个领域, 更出现了大量新的高效的蒙特卡罗方法。目前, 可以看到比较新的蒙特卡罗方法专著有 Liu(2008)[37], Kalos(2008)[38], Rubinstein(2011)[39], Robert(2013)[40] 等。

蒙特卡罗方法在各个领域都有研究, 例如在马尔科夫链、量子系统、物理学和化学生物学、统计学和金融经济中的期权定价等都有蒙特卡罗模拟 [41]。本节主要研究 SDE 数值解与精确解的误差, 采用估计值蒙特卡罗方法。此方法以强大数律为核心, 下面介绍该方法的基本框架。

**定理 4.4.1** (强大数律 [42]).

设  $(\xi^l, l \geq 1)$  是  $\mathbb{R}$  中一系列随机变量序列, 且独立同分布,  $\mathbb{E}|\xi^1| < \infty$ , 对  $N \geq 1$ , 记  $(\xi^1, \dots, \xi^N)$  的样本均值为

$$\hat{S}_N := \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N \xi^l$$

则有

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \hat{S}_N = \mathbb{E}(\xi^1), \quad \mathbb{P} - a.s.$$

为估计有限量  $\gamma$ , 若存在函数  $f$  和  $(X^1, \dots, X^N)$  *i.i.d.* 的 *r.v.* 序列,  $X^1$  能有效的在计算机上模拟出来, 且满足

$$\mathbb{E}f(X^1) = \gamma,$$

应用强大数律, 就可以得到  $\gamma$  的近似值。

#### 算法.(蒙特卡罗方法)

抽取样本  $(X^1(\omega), \dots, X^N(\omega))$ , 则  $\gamma$  的近似值为样本均值:

$$\gamma \simeq \hat{S}_N(\omega) := \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N f(X^l(\omega)).$$

选取  $N$  足够大, 就得到了  $\gamma$  的一个较好的近似值。

#### 4.4.2 数值解绝对误差估计

上一节用 Matlab 软件模拟了几种 SDE 的数值解, 现继续用 Matlab 模拟数值解与精确解的绝对误差, 直观地描述  $\mathbb{E}|X_T^n - X_T|$  与步长  $h$  的关系。

例如, 对一维简单线性 SDE

$$dX_t = rX_t dt + \sigma X_t dW_t, \quad r, \sigma \in \mathbb{R}, \quad X|_{t=0} = X_0,$$

取  $r = 2, \sigma = 1, X_0 = 1$ , 选取时刻  $T = 1$ , 模拟绝对误差随步长  $h$  的变化情况。

选取步长  $h = \frac{T}{n}, n = 25, 50, 100, 200$ , 用蒙特卡罗方法模拟 100 万次, 即  $k = 1, \dots, 1000000$ , 对每种时间间隔数  $n$ , 算法如下:

- (a)  $k = 1$ , 用分别 Euler 算法和 Milstein 算法模拟数值解  $E_T^n(k)$  和  $M_T^n(k)$ , 计算真实解  $X_T(k)$ ;
- (b) 计算第  $k$  次绝对误差  $Y_E(k) = |E_T^n(k) - X_T(k)|, Y_M(k) = |M_T^n(k) - X_T(k)|$ ;
- (c)  $k = k + 1$ , 返回 (a);
- (d) 计算向量  $Y_E, Y_M$  的平均值。

所得结果如下图:

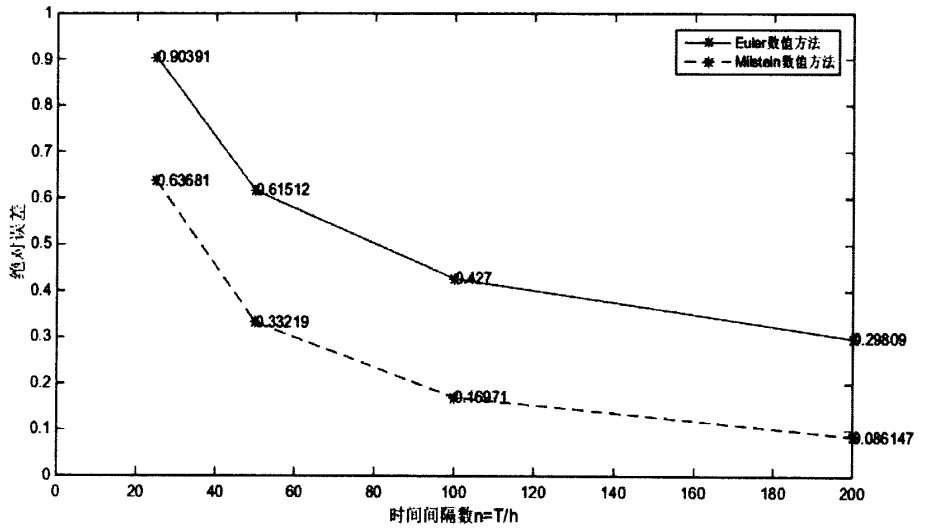


图 4.7 绝对误差与时间间隔数的关系

从图中可以看出，绝对误差与时间间隔数成反比，故与时间步长  $h$  成正比，即绝对误差随着  $h$  的减小而减小。还可看出，Milstein 方法比 Euler 方法更有效。



此页不缺内容

## 第五章 总结与展望

本文首先介绍了随机微分方程的起源与发展以及数值解的研究现状。接着从布朗运动到 Itô 型随机积分再到随微分方程，介绍整个 Itô 型随机微分方程的基础知识。在第二章，主要介绍布朗运动的概念和二次变差过程，用 Matlab 软件对一维标准布朗运动的轨道进行模拟，直观地看到布朗运动的运动轨迹是相当曲折的；在布朗运动的基础上，给出了 Itô 型随机积分的构造过程以及 Itô 公式；对具体的 Itô 积分实例进行计算并用 Matlab 软件进行 Itô 积分数值模拟，在与精确值的对比中可以看到这种基于布朗运动的随机模拟是有效的。在第三章，主要给出随机微分方程的概念和解的存在唯一性定理，并解出几种特殊的随机微分方程，以及介绍一维自治随微分方程的随机 Taylor 展开式。第四章基于一维自治随微分方程的随机 Taylor 展开式，介绍 Euler 方法和 Milstein 方法这两种常用的数值解方法，并分析它们的收敛性和稳定性；将这两种方法应用于第三章的具体实例，通过 Matlab 软件模拟这些具体的随机微分方程的数值解并与精确解对比。对于 O-U 过程，因为精确解含有 Itô 积分，不能准确计算，故从概率分布上将数值解与精确解对比；对于指数过程和简单线性 SDE，因为精确解可以准确计算，故直接从数值上将数值解与精确解对比。模拟的结果显示，Euler 方法和 Milstein 方法都是有效的数值解方法，Euler 方法比 Milstein 方法更简便快捷，而 Milstein 方法比 Euler 方法的近似效果更好，这与前面所说的 Milstein 方法比 Euler 方法的收敛性阶数更高相呼应。最后简要介绍蒙特卡罗方法，并将其应用于随机微分方程数值解的误差估计，用 Matlab 软件作图直观地展现绝对误差随时间步长减小而减小的关系，并从误差的角度再一次展现 Milstein 方法比 Euler 方法的效果要好一些。

随机微分方程的数值解方法虽然已取得一些成果，但还没有达到成熟的阶段，今后还有很多问题值得进一步研究。一方面，可以将 SDE 的随机 Taylor 展开式做更高阶的截断，以获得收敛性更高的数值解方法。另一方面，目前数值解方法适用的随机微分方程类型比较单一，可以将数值解方法推广到更多类型的随机微分方程，如倒向 SDE、高阶 SDE、随机波动方程等等。此外，对现有算法进行更深入的研究，以获得更高的精度和收敛性也十分有意义。

此页不缺内容

## 参考文献

- [1] Langevin P. Sur la théorie du mouvement brownien[J]. CR Acad. Sci. Paris, 1908,146: 530-533.
- [2] Bernstein S. Equations différentielles stochastiques[J]. Actualités Sci. Ind, 1938,738: 5-31.
- [3] Itô K. On stochastic differential equations[M]. American Mathematical Soc, 1951.
- [4] Mao X. Exponential stability of stochastic differential equations[M]. M. Dekker, 1994.
- [5] Boukas E K, Liu Z K. Delay-dependent stability analysis of singular linear continuous-time system[C]. Control Theory and Applications, IEE Proceedings-. IET, 2003, 150(4): 325-330.
- [6] 胡达宜. 随机微分方程稳定性理论 [M]. 南京: 南京大学出版社, 1986: 1-62.
- [7] 胡适耕, 黄乘明, 吴付科. 随机微分方程 [M]. 北京: 科学出版社, 2008: 1-36.
- [8] Markowitz H. Portfolio selection[J]. The journal of finance, 1952, 7(1): 77-91.
- [9] Sharpe W F. Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk[J]. The journal of finance, 1964, 19(3): 425-442.
- [10] Ross S A. The arbitrage theory of capital asset pricing[J]. Journal of economic theory, 1976, 13(3): 341-360.
- [11] Sworder D D. Feedback control of a class of linear systems with jump parameters[J]. Automatic Control, IEEE Transactions on, 1969, 14(1): 9-14.
- [12] Wonham W M. Random differential equations in control theory[J]. Probabilistic Methods in Applied Mathematics, 1971,2: 131-212.
- [13] Mil'shtein, G. N. Mean square stability of linear systems under the action of Markov chain[J]. J. Appl. Math:mech, 1972: 506-515.
- [14] Tian T, Burrage K. Implicit Taylor methods for stiff stochastic differential equations[J]. Applied Numerical Mathematics, 2001, 38(1): 167-185.
- [15] Platen E, Wagner W. On a Taylor formula for a class of Itô processes[J]. Probability Mathematical Statistics, 1982, 3(1): 37-51.
- [16] Rumelin W. Numerical treatment of stochastic differential equations[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1982: 604-613.
- [17] Burrage P M. Runge-Kutta methods for stochastic differential equations[D]. The University of Queensland Brisbane, 1999.
- [18] 缪柏其, 胡太忠. 概率论教程 [M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2009: 253-302.
- [19] 陈木法, 毛永华. 随机过程导论 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2007: 129-135.
- [20] Korolov L, Sinai Y G. Theory of probability and random processes[M]. Springer Science, Business Media, 2007: 255-311.
- [21] Karatzas I, Shreve S. Brownian motion and stochastic calculus[M]. Springer Science, Business Media, 2012.

- [22] A.B. 布林斯, A.H. 施利亚耶夫. 随机过程引论 [M]. 李占柄, 译. 北京: 高等教育出版社, 2008: 253-254.
- [23] 裘光鲁. 随机微分方程引论 [M]. 北京: 北京大学出版社, 1995: 18-19.
- [24] 裘光鲁. 随机微分方程及其应用概要 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2008: 50-98.
- [25] 林元烈. 应用随机过程 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2002: 290-306.
- [26] 王力. 鞅与随机微分方程 [M]. 北京: 科学出版社, 2015: 235-242.
- [27] Kloeden P E, Platen E, Schurz H. Numerical solution of SDE through computer experiments[M]. Springer Science, Business Media, 2012.
- [28] Kloeden P E, Platen E. Numerical Solution of Stochastic Differential Equations[M]. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1992: 161-167.
- [29] Maruyama, G. Maruyama G. Continuous Markov processes and stochastic equations[J]. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 1955, 4(1): 48-90.
- [30] Graham C, Talay D. Stochastic Simulation and Monte Carlo Methods: Mathematical Foundations of Stochastic Simulation[M]. Springer Science, Business Media, 2013: 155-191.
- [31] 刘小清, 吴声昌. 随机微分方程计算方法及其应用 [J]. 计算物理, 2002, 19(1): 1-7.
- [32] 王新, 朱永忠. 类随机微分方程欧拉格式的收敛性 [J]. 河海大学学报(自然科学版), 2008, 36(3).
- [33] Marion G, Mao X, Renshaw E. Convergence of the Euler scheme for a class of stochastic differential equation[J]. International Mathematical Journal, 2002, 1(1): 9-22.
- [34] Burrage K, Tian T. The composite Euler method for stiff stochastic differential equations[J]. Journal of computational and applied mathematics, 2001, 131(1): 407-426.
- [35] Marsaglia G. Random numbers fall mainly in the planes[J]. Proceedings of the National Academy of Sciences, 1968, 61(1): 25-28.
- [36] Marsaglia G. The structure of linear congruential sequences[J]. Applications of number theory to numerical analysis, 1972: 249-285.
- [37] Liu J S. Monte Carlo strategies in scientific computing[M]. Springer Science, Business Media, 2008.
- [38] Kalos M H, Whitlock P A. Monte carlo methods[M]. John Wiley ,Sons, 2008.
- [39] Rubinstein R Y, Kroese D P. Simulation and the Monte Carlo method[M]. John Wiley , Sons, 2011.
- [40] Robert C P, Casella G. Monte Carlo Statistical Methods[M]. Springer Science, Business Media, 2013.
- [41] L'Ecuyer P. Quasi-Monte Carlo methods with applications in finance[J]. Finance and Stochastics, 2009, 13(3): 307-349.
- [42] Durrett R. Probability: Theory and Examples[M]. Cambridge university press, 2010: 41-85.

## 致 谢

在中国科学技术大学的两年硕士学习生涯里，导师以及院里其他老师和同学在我的学习和研究中，给予了我无私的指导和热情的帮助。在论文完成之际，请容许我对他们表达最诚挚的谢意。

首先感谢导师王冉老师这两年的悉心指导和教诲。是他把我带到了随机分析的研究领域，为我提供了专业的参考书籍，并一步步指导我选题、研究。王冉老师认真细致的治学态度及严谨的研究态度，优秀的专业素养及宽广的胸怀，都将使我受益匪浅。在此谨向他致以衷心的感谢与崇高的敬意。

感谢班主任黄稚新老师和杨晓果老师多年的关怀。感谢薄立军、胡森老师、刘党政老师、翟建梁老师、袁敏老师、殷浩老师、张曙光老师等老师，他们在研究生阶段的指导给我的学习和研究打下了坚实的基础。

感谢赵璐、李庆林、王辈、吴珍凤、张青婷、胡增圣、尚世界等师兄师姐们的指点和照顾；感谢李宋宋、范雪媛、许娣等几位同班同学，与你们的相处让我的研究生生活有声有色，谢谢你们对我的支持和帮助，让我度过了这段愉快而难忘的岁月。

感谢科大，为我提供了良好的学习环境和 Learning 资源，在这浓厚的学习氛围中我受益良多。

最后，感谢我的家人对我的鼓励和支持，你们是我追求学业的不竭动力。