hw22 求解 $\dot{v}=\xi$

Zuqing Wang

1 思想

$\dot{v}=\xi$ 中随机变量 ξ 满足 $\langle\xi\rangle=0, \langle\xi(t)\xi(t')\rangle=A\delta(t-t')$。单次的结果是没有意义的，有意义的是统计量如均值、方差这些“不变量”。

2 分析与具体实验结果

做变换 $\xi=\sqrt{A}\eta$，方程变为 $\dot{v}=\sqrt{A}\eta$，随机变量 η 满足 $\langle\eta\rangle=0, \langle\eta(t)\eta(t')\rangle=\delta(t-t')$。

$$\begin{aligned}
v(t)&=v_0+\sqrt{A}\int_0^t\eta(t')\mathrm{d}t'\\
\overline{v(t)}&=v_0+\sqrt{A}\int_0^t\langle\eta(t')\rangle\mathrm{d}t'=v_0\\
\overline{v^2(t)}&=v_0^2+2v_0\sqrt{A}\int_0^t\langle\eta(t')\rangle\mathrm{d}t'+A\int_0^t\int_0^t\langle\eta(t')\eta(t'')\rangle\mathrm{d}t'\mathrm{d}t''=v_0^2+A\int_0^t\int_0^t\delta(t'-t'')\mathrm{d}t'\mathrm{d}t''\\
&=v_0^2+At
\end{aligned}\tag{1}$$

方差 $\sigma_t^2=\overline{v^2(t)}-\overline{v(t)}^2=At$。

离散化，$\mathrm{d}v=\sqrt{A}\eta\mathrm{d}t=\sqrt{A}\mathrm{d}w_t$：

$$\begin{aligned}
v(t)&=v_0+\sqrt{A}\sum_{i=1}^N\mathrm{d}w_{t'}\\
\overline{v(t)}&=v_0+\sqrt{A}\sum_{i=1}^N\langle\mathrm{d}w_{t'}\rangle=v_0\\
\overline{v^2(t)}&=v_0^2+2v_0\sqrt{A}\sum_{i=1}^N\langle\mathrm{d}w_{t'}\rangle+A\sum_{i=1}^N\sum_{j=1}^N\langle\mathrm{d}w_{t'}\mathrm{d}w_{t''}\rangle=v_0^2+A\sum_{i=1}^N\sum_{j=1}^N\langle\mathrm{d}w_{t'}\mathrm{d}w_{t''}\rangle\\
&=v_0^2+At
\end{aligned}\tag{2}$$

观察上式，对比等号两边，有 $\sum_i\langle\mathrm{d}w_{t'}\rangle=0, \sum_{ij}\langle\mathrm{d}w_{t'}\mathrm{d}w_{t''}\rangle=t=\sum_i\mathrm{d}t$，所以 $\mathrm{d}w_t$ 满足 $\langle\mathrm{d}w_t\rangle=0, \langle\mathrm{d}w_t\mathrm{d}w_{t'}\rangle=\delta_{tt'}\mathrm{d}t$。因此随机变量 $\mathrm{d}w_t$ 可以选择为 $N(0,1)\times\sqrt{\mathrm{d}t}$。

接下来的事情就很简单了，Euler 法迭代即可：$v_{n+1}=v_n+\sqrt{A}\mathrm{d}w_t$。注意到理论分析结果为 $\overline{v(t)}=v_0, \sigma_t^2=At$。数值模拟结果见 fig.1、fig.2，这里 $v_0=0$。可见虽然单次的结果是随机的，但是统计结果符合理论预言：$\overline{v(t)}$ 在 0 上下浮动，σ_t^2 和 t 近似严格线性，且斜率为 A。

还有另外一种算法：$v_{n+1}=v_n+a_n\mathrm{d}t+b_n\mathrm{d}w_t+\frac{1}{2}b_nb_n'\left((\mathrm{d}w_t)^2-\mathrm{d}t\right)$。

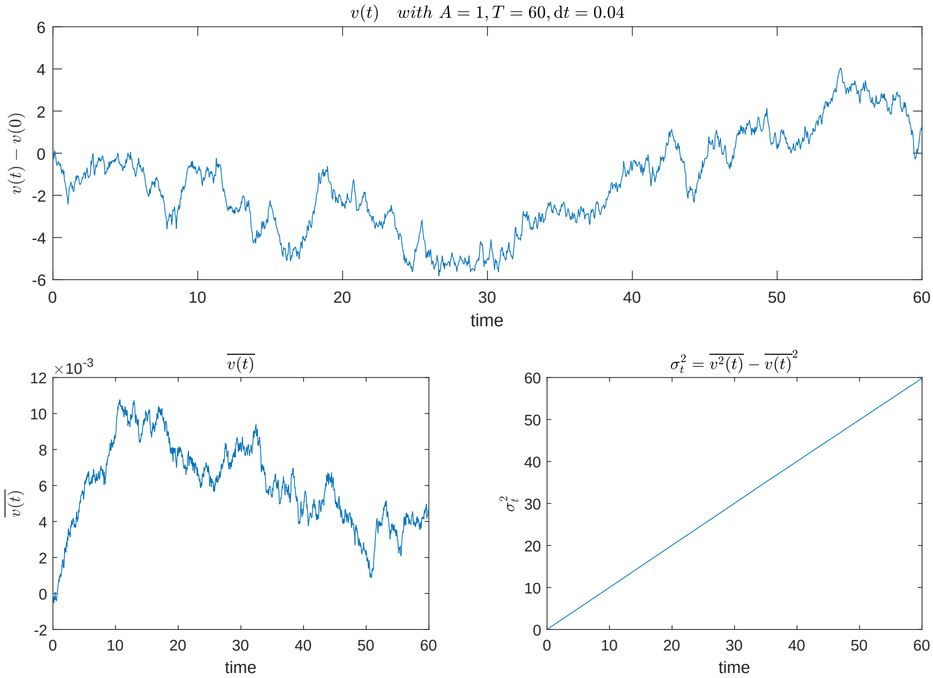

图 1: 数值计算结果，$A=1$，重复 10^6 次。上图为某一次数值计算结果；左下为 $\overline{v(t)}$ 图像，右下为 σ_t^2 图。

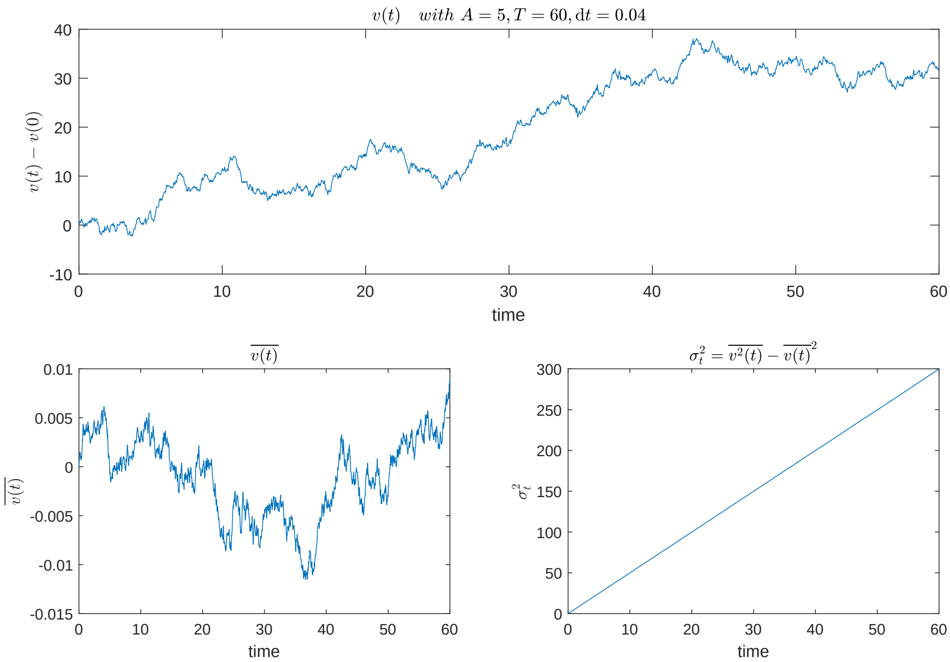

图 2: 数值计算结果，$A=5$，重复 10^6 次。

3 Code

```
A = 1;
sA = sqrt(A);
dt = 0.04;
sdt = sqrt(dt);
T = 60;
N = T/dt + 1;

R = 1000000; %repeat

v = zeros(R,N);

for i = 1:R
    for j = 2:N
        v(i,j) = v(i,j-1) + sA*randn()*sdt;
    end
end

vbar = zeros(1,N);

for i = 1:N
    vbar(i) = sum(v(:,i))/R;
end

vdev = zeros(1,N);

for i = 1:N
    vdev(i) = sum(v(:,i).*v(:,i))/R - vbar(i)^2;
end

figure

x = linspace(0,T,N);

subplot(2,1,1);
plot(x,v(R/2,:));
xlabel('time');
ylabel('$$v(t)-v(0)$$','Interpreter','latex');
title('$$v(t) \quad with \ A=1,T=60,\mathrm{d}t=0.04$$','Interpreter','
   latex');
```

```

subplot(2,2,3);
plot(x,vbar);
xlabel('time');
ylabel('$$\overline{v(t)}$$','Interpreter','latex')
title('$$\overline{v(t)}$$','Interpreter','latex');

subplot(2,2,4);
plot(x,vdev);
xlabel('time');
ylabel('$$\sigma^2_t$$','Interpreter','latex')
title('$$\sigma^2_t = \overline{v^2(t)} - \overline{v(t)}^2$$','Interpreter
    ','latex');
```