hw20 Box-Muller 算法

Zuqing Wang

1 证明

设独立随机变量 $u, v \in U[0,1]$，则

$$f(u,v) = 1 \tag{1}$$

定义随机变量

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{-2\ln u}\sin v \\ y &= \sqrt{-2\ln u}\cos v \end{aligned} \tag{2}$$

有反函数：

$$\begin{aligned} u &= e^{-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)} \\ v &= \frac{1}{2\pi}\arctan\frac{x}{y} \end{aligned} \tag{3}$$

而

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(u,v)\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right| = \left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right| \\ &= \left\| \begin{matrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{matrix} \right\| \\ &= \left\| \begin{matrix} -x\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)} & -y\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)} \\ \frac{1}{2\pi}\frac{y}{(x^2+y^2)} & -\frac{1}{2\pi}\frac{x}{(x^2+y^2)} \end{matrix} \right\| \\ &= \left|\frac{1}{2\pi}\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}e^{-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)}\right| \\ &= \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\times\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y^2/2} \\ &= f(x)f(y) \end{aligned} \tag{4}$$

于是我们证明了，x、y 是两个独立的服从正态分布的随机数。

2 实验结果

实验一百万次，画出直方图，如 fig.1所示。其中，第 2 和第 4 个子图用 normplot 函数进行分布的正态性检验，可见 x、y 的确是服从正态分布的。

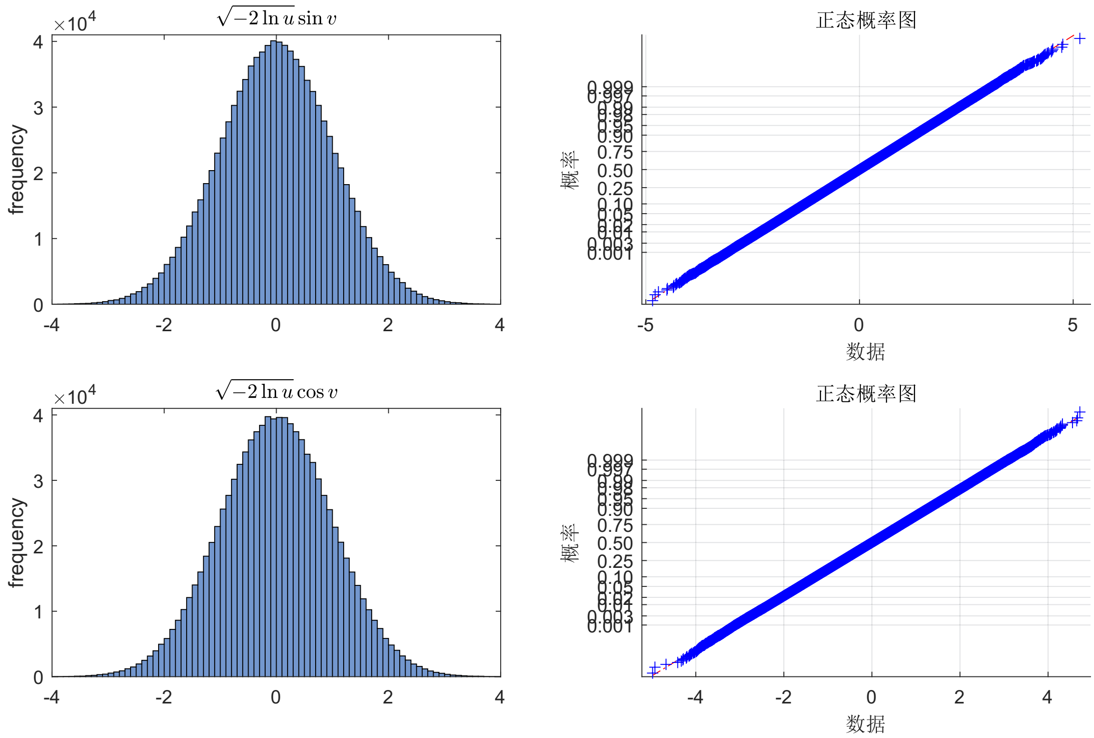

图 1: 使用 Box-Muller 算法得到的随机变量 x、y 的分布以及其正态性检验

3 Code

```
N = 10^6;

u = sqrt(-2*log(rand(1,N)));
v = 2*pi*rand(1,N);

x = u.*sin(v);
y = u.*cos(v);

interval = linspace(-4,4,81);

figure

subplot(2,2,1);
histogram(x,interval);
ylabel('frequency');
axis([-4 4 0 4.1*10^4]);
title('$$\sqrt{-2\ln{u}}\sin v$$','Interpreter','latex');

```

```
subplot(2,2,2);
normplot(x);

subplot(2,2,3);
histogram(y,interval);
ylabel('frequency');
axis([-4 4 0 4.1*10^4]);
title('$$\sqrt{-2\ln{u}}\cos v$$','Interpreter','latex');

subplot(2,2,4);
normplot(y);
```