

hw21 关联随机数

Zuqing Wang

1 思想

首先求出 w 矩阵，然后再用无关联随机数 η 生成关联的随机数 ξ ，求平均验证是否符合 $\langle \xi_i \xi_j \rangle = f(i-j)$ 。

2 分析与具体实验结果

首先生成 $(w^2)_{ij} = f(i-j)$ 矩阵。利用 eig 求解本征值以及本征向量： $[U^\dagger, \lambda] = \text{eig}(w^2)$ ，则

$$w = U^\dagger \sqrt{\lambda} U \quad (1)$$

这一步要求 w^2 的本征值均非负；事实上在本题的条件 ($f(i-j) = \exp(-2|i-j|)$, $N = 1000$) 下，本征值最小为 $0.7616 > 0$ (fig.1)。

ans =
0.7616

图 1: w^2 的最小本征值

于是 $\xi_i = w_{ij} \eta_j$ ，可以生成 $N = 1000$ 个无关联的随机变量 η ，反映在程序中：定义 η 矩阵， $N \times M$ ， N 个随机变量，每个随机变量取 $M = 5 \times 10^5$ 个值，生成有关联的随机变量 $\xi(N \times M)$ ，则

$$\begin{aligned} \langle \xi_i \rangle &= \frac{1}{M} \sum_k \xi_{ik} \\ \langle \xi_i \xi_j \rangle &= \frac{1}{M} \sum_k \xi_{ik} \xi_{jk} \end{aligned} \quad (2)$$

理论上要求 $\langle \xi_i \rangle = 0$, $\langle \xi_i \xi_j \rangle = \exp(-2|i-j|)$ 。实际结果如 fig.2, $|\langle \xi_i \rangle|_{max} = 0.0046$ ，记 $(error)_{ij} = |\langle \xi_i \xi_j \rangle - w_{ij}^2|$, $error_{max} = 0.0074$ 。可以明显看出 $\langle \xi_i \xi_j \rangle$ 的实际结果不尽如人意，注意到 $\exp(-2 \times 3) = 0.0025 < error_{max}$ 。

这个结果显然是不够好的，可能的误差来源：1. 随机数取值太少，每个随机数只取了 5×10^5 个值（尽管如此程序也已经很耗时了）；2. matlab 生成的随机数并非互相独立的。为了验证 2，我们检验 η 是否彼此是无关联的，运行如 fig.3 的代码，得到结果如 fig.4 所示。所以 matlab 产生的高斯分布的随机数彼此并非并无关联，说明我们的猜想 2 是有依据的。

```
ans =

0.0046

ans =

0.0074
```

图 2: $\langle \xi_i \rangle, \langle \xi_i \xi_j \rangle$ 的数值结果

```
>> etadev = zeros(N);
for i = 1:N
    for j = i:N
        etadev(i,j) = sum(eta(i,:).*eta(j,:))/M;
        etadev(j,i) = etadev(i,j);
    end
end
max(max(abs(etadev-diag(diag(etadev))))))

>> max(max(abs(etadev-diag(diag(etadev))))))
ans =

0.0066
```

图 3: 验证 η 是否彼此无关联的代码

图 4: 同一次程序运行结果, $\langle \eta_i \eta_j \rangle_{max} = 0.0066$,
对比 $error_{max} = 0.0074$

3 Code

```
1 N = 1000;
2
3 f = zeros(N);
4 for i = 1:1000
5     for j = i:1000
6         f(i,j) = exp(2*(i-j));
7         f(j,i) = f(i,j);
8     end
9 end
10
11 [Ut,lambda] = eig(f);
12 value = diag(lambda);
13
14 % 看本征值是否有小于零的量
15 min(value)
16
17 w = Ut*diag(sqrt(value))*Ut';
18
19 % 画w矩阵
20 x = linspace(1,N,N);
21 y = linspace(1,N,N);
22 surface(x,y,w);
```

```

23
24 M = 5*10^5;
25
26 eta = zeros(N,M);
27 for i = 1:N
28     eta(i,:) = randn(1,M);
29 end
30
31 xi = w*eta;
32
33 xibar = zeros(N,1);
34 for i = 1:N
35     xibar(i) = sum(xi(i,:))/M;
36 end
37 max(abs(xibar))
38
39 xidev = zeros(N);
40 for i = 1:N
41     for j = i:N
42         xidev(i,j) = sum(xi(i,:).*xi(j,:))/M;
43         xidev(j,i) = xidev(i,j);
44     end
45 end
46 delta = abs(f - xidev);
47 max(max(delta))

```