

hw24 求解 $\dot{S} = (\mu + \sigma\xi)S$

Zuqing Wang

1 思想

和 hw23 中的 Brown motion 不同, 随机项中与变量 S 有关, 需要做一定的变换。其中, Ito's lemma 起到了至关重要的作用, 最后的结果也和我们的常识相符。

2 分析与具体实验结果

将方程 $\dot{S} = (\mu + \sigma\xi)S$ 写成 $dS = \mu S dt + \sigma S dw_t$ 的形式, 其中, $dw_t = \xi dt$, 满足 $\langle dw_t \rangle = 0, \langle dw_t^2 \rangle = dt$ 。注意不能改写成 $d \ln S = \frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dw_t$ 进而得到 $\overline{\ln S(t)} = \mu t$, 这是错误的!

正确的理解应该为, 记 $Y = \ln S$, 应用 Ito's lemma, 则

$$\begin{aligned} dY &= \frac{dY}{dS} dS + \frac{d^2 Y}{dS^2} dS^2 + o(dS^2) \\ &= \frac{1}{S} S(\mu dt + \sigma dw_t) + \left(-\frac{1}{S^2}\right) S^2 (\mu dt + \sigma dw_t)^2 \\ &= \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt + \sigma dw_t + o(dt) \end{aligned} \quad (1)$$

其中用到了替换 $dw_t^2 \rightarrow dt$, 因为它们在同一量级 (注意到 $\langle dw_t^2 \rangle = dt$)。在最后的結果中我们只考虑了 dt 和 dw_t 项, 舍去了更高阶的小量。由此便可以看出之前的错误出在哪里: $d \ln S$ 只是式1第一行中等号右边第一项, dS^2 中含有与其同阶的项不能直接扔掉。

从式1中我们可以看出 $\overline{\ln S(t)}$ 并不是以 μ 的速度上升, 而是 $\mu - \frac{1}{2}\sigma^2$ 。这也看出了利率的浮动 ($\sigma\xi$) 对股票 (S) 的影响。

以上是理论分析; 进行数值模拟验证理论是否正确, 这是简单的:

$$\ln S_{n+1} = \ln S_n + S_n(\mu dt + \sigma dw_t) \quad (2)$$

其中, dt 是设定好的步长, dw_t 是服从 $N(0, \sqrt{dt})$ 分布的随机变量。这里使用了 Euler 算法, 计算 $\ln S_{n+1}$ 时只显式迭代了一次, 而不像数值解常微分方程那样使用隐式迭代可能要迭代多次, 理由是这样未来 ($\ln S_{n+1}$) 只由过去 ($\ln S_n$) 决定。

Fig.1是数值计算结果, 可见 $\overline{\ln S(t)}$ 的确不是以 μ 的速度上升, 和理论结果 $\mu - \frac{1}{2}\sigma^2$ 符合地较好, 但是有一定的偏差, 问题可能出现在使用 dt 替换了 dw_t 。

关于方差, 有一些疑问, 由式1我们有:

$$dY = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt + \sigma dw_t \quad (3)$$

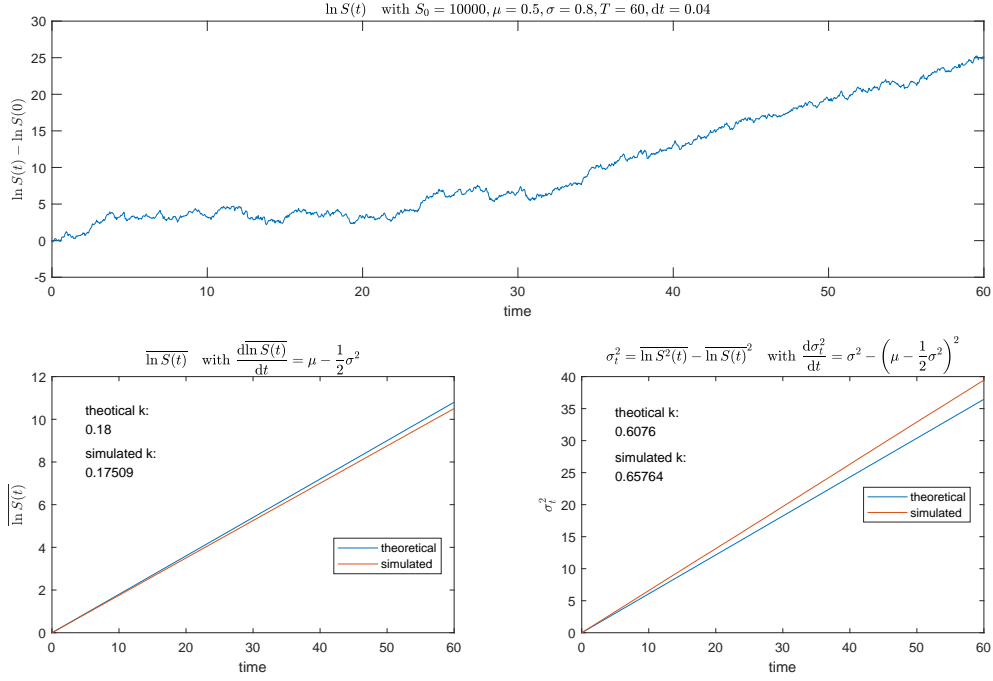


图 1: 数值计算结果, $S_0 = 10^4$, 重复 10^6 次。上图为某一次数值计算结果; 左下为 $\overline{\ln(S(t) - S(0))}$ 图像, 右下为 σ_t^2 图。斜率是 $y = kx$ 模型使用 fit 函数最小二乘拟合。

因此

$$\begin{aligned} dY^2 &= \left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) dt + \sigma dw_t \right]^2 \\ &= \sigma^2 dt + o(dt) \end{aligned} \quad (4)$$

于是方差

$$\sigma_t^2 = \overline{\ln S^2(t)} - \overline{\ln S(t)}^2 = \left[\sigma^2 - \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right)^2 \right] t \quad (5)$$

但是式5是有明显的问题的: σ_t^2 可能小于 0。问题可能出在扔掉了某些不能扔掉的高阶小量。

3 Code

```

1 mu = 0.5;
2 sigma = 0.8;
3 dt = 0.04;
4 sdt = sqrt(dt);
5 T = 60;
6 N = T/dt + 1;
7 s0 = 10000;
8

```

```

9      R = 1000000; %repeat
10
11      es = zeros(R,N);
12
13      for i = 1:R
14          es(i,1) = s0;
15          for j = 2:N
16              dw = randn()*sdt;
17              es(i,j) = es(i,j-1) + mu*es(i,j-1)*dt + sigma*es(i,j-1)*dw;
18          end
19      end
20
21      s = log(es) - log(s0);
22
23      sbar = zeros(1,N);
24
25      for i = 1:N
26          sbar(i) = sum(s(:,i))/R;
27      end
28
29      sdev = zeros(1,N);
30
31      for i = 1:N
32          sdev(i) = sum(s(:,i).*s(:,i))/R - sbar(i)^2;
33      end
34
35      figure
36
37      x = linspace(0,T,N);
38
39      subplot(2,1,1);
40      plot(x,s(R/2,:));
41      xlabel('time');
42      ylabel('$$\ln S(t)-\ln S(0)$$','Interpreter','latex');
43      title('$$\ln S(t) \quad \mathrm{with} \quad S_0=10000,\mu=0.5,\sigma=0.8,T=60,\mathrm{d}t=0.04$$','Interpreter','latex');
44
45
46      subplot(2,2,3);
47      % Fitting
48      ft = fittype('k*x','coefficients','k','independent','x');

```

```

49     ftop = fitoptions('Method','NonlinearLeastSquares','StartPoint',0.5);
50     [fr,~,~] = fit(x',sbar',ft,ftop); % 这里x, sbar都必须是列向量，太蠢了
51     k = coeffvalues(fr);
52
53     tbar = (mu-0.5*sigma^2)*x;
54     plot(x,[tbar;sbar]);
55     legend('theoretical','simulated','Location','best');
56     xlabel('time');
57     ylabel('$\overline{\ln S(t)}$', 'Interpreter','latex')
58     title('$\overline{\ln S(t)} \quad \mathrm{with} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \overline{\ln S(t)} = \mu - \frac{1}{2} \sigma^2$', 'Interpreter','latex');
59     text(5,10,{'theoretical k:' num2str(mu-0.5*sigma^2)});
60     text(5,8,{'simulated k:' num2str(k)});
61
62
63     subplot(2,2,4);
64     %Fitting
65     [fr,~,~] = fit(x',sdev',ft,ftop);
66     k = coeffvalues(fr);
67
68     tdev = (sigma^2-(mu-0.5*sigma^2)^2)*x;
69     plot(x,[tdev;sdev]);
70     legend('theoretical','simulated','Location','best');
71     % plot(x,sdev);
72     xlabel('time');
73     ylabel('$\sigma^2_t$', 'Interpreter','latex')
74     title('$\sigma^2_t = \overline{\ln S^2(t)} - \overline{\ln S(t)}^2 \quad \mathrm{with} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sigma^2_t = \sigma^2 - \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2\right)^2$', 'Interpreter','latex');
75     text(5,33,{'theoretical k:' num2str(sigma^2-(mu-0.5*sigma^2)^2)});
76     text(5,26,{'simulated k:' num2str(k)});
77
78
79     drawnow

```