群 ⇒ 分类　Topo 分类

等价

连续形变 ~ 同构

分类空间

$M = G/\sim$ ↑ group set

等价 ← 正规子群 $= G/H$

群：4个定义，1个二元运算，$\langle G, * \rangle$ （G：set）

e

$g \to g^{-1}$

$g_1 * g_2 \in G$

$(g_1 * g_2) * g_3 = g_1 * (g_2 * g_3)$

例子：9 数，矩阵/操作　(同伦群)函数

G ⇒ 结构：子群 ⇒ 群的表示论

同态/同构基本定理

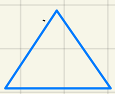
例：$\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$，$C_3 = \{1, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{i\frac{4\pi}{3}}\}$

g和G中的每个元素相乘都在G中（封闭性）

重排定理　$g \in G$，$gG = G$，且 $\forall g_2 \in G$，$\exists g_1 \in G$，使得 $g g_1 = g_2$.

$gG = \{g g_2 \mid g_2 \in G\}$

D3 正三角形对称群



子群 $H = \{e, C_3^1, C_3^2\}$

子群

	e	C_3^1	C_3^2	σ_1	σ_2	σ_3
e	e	C_3^1	C_3^2	σ_1	σ_2	σ_3
C_3^1	C_3^1	C_3^2	e	σ_2	σ_3	σ_1
C_3^2	C_3^2	e	C_3^1	σ_3	σ_1	σ_2
σ_1	σ_1	σ_3	σ_2	e	C_3^2	C_3^1
σ_2	σ_2	σ_1	σ_3	C_3^1	e	C_3^2
σ_3	σ_3	σ_2	σ_1	C_3^2	C_3^1	e

	H	σ
H	H	σ
σ	σ	H

$G/H = \mathbb{Z}_2$

* 大一点的群/复杂的群的子群

* 将子群H视为一个元素(H中元素等价)

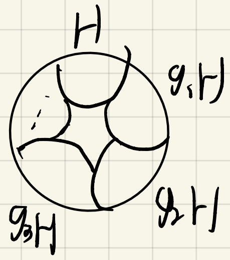
$M = G/H$ or $G/\sim$

商空间

群的性质

① 重排定理

② 子群 ⇒ Coset 陪集



G群/空间用H划分

a. 每个元素唯一属于 g_iH

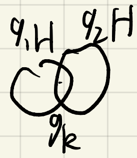
b. $g_iH \cap g_jH = \begin{cases} \phi \\ g_iH \end{cases}$ OO 相等

c. 每个 g_iH 元素个数都一样 (由重排定理保证)

$|g_iH| = |H|$

$|g_iH| \mid |G|$ ($p|q$, p整除q)

Lagrange定理 $|G| = |G/H| \cdot |H|$



prof: 设 $\exists\ g_k \in g_1H,\ g_k \in g_2H$

$\therefore \exists\ h_1, h_2 \in H$

$g_1h_1 = g_k = g_2h_2$

$\therefore g_1 = g_2\underbrace{h_2h_1^{-1}}_{\in H} = g_2h_3$

$\Rightarrow g_1H = g_2h_3H = g_2H$

③ 正规子群 Normal subgroup $(\forall g\in G,\ gN=Ng)$

N

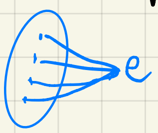
群表示论 $G=\{g_1\cdots g_l\}$ 抽象

$\downarrow$

Γ_i 一矩阵 $\Gamma_i=f(g_i)$ $\begin{cases}\text{维度} \\ \text{意义}\end{cases}$ — 简并度 / 不能回答有多少简并度.

乘法不变: $g_ig_j=g_k \Rightarrow \Gamma_i\Gamma_j=\Gamma_k$

恒等表示: $\forall g_i\in G,\ f(g_i)=e=\mathbb{1}_{n\times n}$

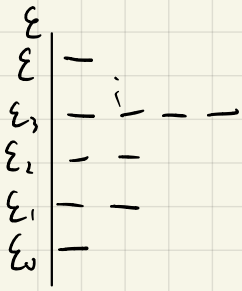


对称性

$H \Rightarrow G$下不变 (H为 Hamiltonian, 而非子群)

$g_\alpha H = H g_\alpha$

$H\psi_{il}=\varepsilon_i\psi_{il}$



$$g_\alpha H\psi_{il}=\varepsilon_i g_\alpha\psi_{il}$$
$$=Hg_\alpha\psi_{il}$$

$g_\alpha\psi_{il}$ 只是将 ψ_{il} 重新组合.

$$g_\alpha\psi_{il}=\Gamma_{\alpha l}^{\ j}\,\psi_{ij}$$

$$\underbrace{g_\beta g_\alpha}_{g_\gamma}\psi_{il}=\Gamma_{\alpha l}^{\ j}\,g_\beta\psi_{ij}$$

$$=\Gamma_{\alpha l}^{\ j}\,\Gamma_{\beta j}^{\ k}\,\psi_{ik}$$

$$g_\gamma\psi_{il}=\Gamma_{\gamma l}^{\ k}\,\psi_{ik}$$

$$\Gamma_{\gamma l}^{\ k}=\Gamma_{\alpha l}^{\ j}\,\Gamma_{\beta j}^{\ k}$$

$$(AB)_{ij}=A_{ik}B_{kj}$$

群的同态/同构

① morphism 态射 $f: X \to Y$.

② Homomorphism 同态 像，保持乘法不变.

③ Isomorphism 同构 特别像(双射). (iso 镜像文件)

映射: $f: \overset{\text{set}}{X} \to Y$

群: $f: G \to G'$

$\forall a, b \in G, \quad f(a) \cdot f(b) = f(ab).$

恒等映射

$\forall a \in G, \; f(a) = e'.$

同态/同构基本定理 $G/\ker(f) \simeq \overset{\mathrm{Im}(G)}{\mathrm{Im}(f)}$.

kernel Image

像

$x \to y = f(x)$.

y是x的像

$f(G)$在G'中像.

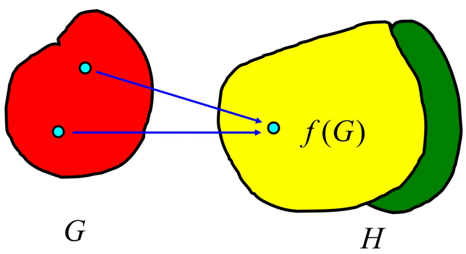


图 1.9: 同态映射 来源: 同前

$$\ker f \equiv \{ g \mid g \in G, \; f(g) = e_{G'} \}$$

$$G/\ker(f) \simeq \mathrm{Im}(G) \subset G'$$