



# Note of Quantum Photonics

## Volume I: Quantum Optics & Cavity Quantum Electrodynamics

作者：Udumbara

时间：September 9, 2022



*Victory won't come to us unless we go to it. — M. Moore*

# Preface



还没想好说什么

Ethan Deng  
February 10, 2020

# 目录

<b>第一部分 Quantum Optics</b>	<b>v</b>
<b>1 Quantisation of the Electromagnetic Field</b>	<b>1</b>
1.1 Field Quantisation . . . . .	1
1.2 Fock State . . . . .	1
<b>2 Coherence</b>	<b>2</b>
2.1 Classical Coherence . . . . .	2
2.1.1 Optical Wiener–Khinchin Theorem . . . . .	2
2.1.2 Degree of First-Order Coherence . . . . .	3
2.1.3 Second-Order Coherence . . . . .	4
2.2 Quantum Description of Coherence . . . . .	4
2.2.1 Correlation Function . . . . .	4
2.2.2 First-Order Optical Coherence . . . . .	4
2.2.3 Second-Order Coherence . . . . .	5
2.3 Phase Noise . . . . .	6
2.4 Optical Signal Detection . . . . .	6
2.4.1 Photon Count Detection . . . . .	6
2.4.2 Homodyne Detection . . . . .	7
2.4.3 Heterodyne Detection . . . . .	9
2.5 Introductions to Quantum Metrology . . . . .	9
<b>3 Boson Sampling</b>	<b>10</b>
<b>4 Quantum Distribution Theory &amp; Representation</b>	<b>11</b>
4.1 Expand in Number State . . . . .	11
<b>第二部分 Light-Matter Interaction</b>	<b>12</b>
<b>5 Light-Matter Interaction: Classical Description</b>	<b>13</b>
5.1 Review . . . . .	13
5.1.1 Quantum State & Density Operator . . . . .	13
5.1.2 Picture . . . . .	13
5.1.3 Entanglement . . . . .	15

5.2	Two-Level Atom with a Classical Field . . . . .	15
5.2.1	Dipole Interaction . . . . .	15
5.2.2	Rotating-Wave Approximation . . . . .	16
5.2.3	Rabi Oscillation . . . . .	16
5.2.4	Bloch Sphere . . . . .	18
5.2.5	a.c. Stark Effect . . . . .	20
5.2.6	Ramsey Interference . . . . .	20
5.3	Adiabatic & Landau-Zener Crossings . . . . .	20
5.4	Two-Level Atom with Damping & Optical Bloch Equation . . . . .	20
5.5	Three-Level Atom: Raman Transition . . . . .	20
<b>6</b>	<b>Atomic Angular-Momentum Structure</b>	<b>21</b>
<b>7</b>	<b>Interacting with a Quantized Field</b>	<b>22</b>
7.1	Spontaneous Emission: Weisskopf-Wigner Approach . . . . .	22
<b>8</b>	<b>Dissipation in Quantum Mechanics &amp; Master Equation</b>	<b>25</b>
8.1	Failure in Classical Treatment . . . . .	25
8.2	System Plus Reservoir Approach . . . . .	25
8.3	Quantum Non-Markovian Progress . . . . .	25
	<b>第三部分 Cavity Quantum Electrodynamics</b>	<b>26</b>
<b>9</b>	<b>Classical Optical Cavity</b>	<b>27</b>
9.1	Basic Concept & Parameter . . . . .	27
9.1.1	Planar Cavity . . . . .	27
9.1.2	Cavity Spectrum . . . . .	27
9.1.3	Cavity Spatial Mode . . . . .	28
9.2	Classical Light Field in Atom-Cavity System . . . . .	28
9.2.1	Classical Description of Light-Atom Interaction . . . . .	28
<b>10</b>	<b>Cavity Quantum Electrodynamics</b>	<b>30</b>
10.1	Quantized Cavity Mode . . . . .	30
10.2	Jaynes-Cummings Model . . . . .	30
<b>11</b>	<b>Quantum Langevin Equation</b>	<b>31</b>
<b>12</b>	<b>Input-Output Formalism</b>	<b>32</b>
12.1	Derivation of the Langevin Equation . . . . .	32
<b>13</b>	<b>版本更新历史</b>	<b>34</b>



---

<b>A 测试区</b>	<b>36</b>
A.1 Computing Commutators . . . . .	36



# 第一部分

## Quantum Optics

# 第一章 Quantisation of the Electromagnetic Field

## 1.1 Field Quantisation

采取 Coulomb 规范  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$  和  $\varphi = 0$ , 由 Maxwell 方程组可得矢势满足

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \quad (1.1)$$

式 (1.1) 的解可以写成

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sum_j A_j [a_j e^{-i\omega_j t} \mathbf{u}_j(\mathbf{r}) + \text{c.c.}] \quad (1.2)$$

其中  $\mathbf{u}_j(\mathbf{r})$  是由边界决定的正交基。

对于一维单模谐振腔:

$$A_x(z, t) = \sum_j A_j \sin(k_j z) (a_j e^{-i\omega_j t} + \text{c.c.}) \quad (1.3)$$

实际上, 这种展开消滅了光场的诸多自由度, 更一般的, 以平面波展开, 取箱归一化条件的  $\mathbf{u}_j(\mathbf{r}) = L^{-3/2} \hat{e}_k^\alpha e^{i\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{r}}$ , 其中  $\alpha$  表示一个独立的偏振模式, 则

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sum_k \left( \frac{\hbar}{2\omega_k \epsilon_0} \right)^{1/2} [a_k \mathbf{u}_k(\mathbf{r}) e^{-i\omega_k t} + \text{c.c.}] \quad (1.4)$$

利用  $\mathbf{E} = -\partial \mathbf{A} / \partial t$  和  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ , 以及

$$H = \frac{1}{2} \int d^3x (\epsilon_0 \mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2 / \mu_0) \quad (1.5)$$

可得

$$H = \sum_k \frac{1}{2} \hbar \omega_k (a_k a_k^\dagger + a_k^\dagger a_k) \quad (1.6)$$

最后由正则量子化条件  $[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij}$ , 得到

$$H = \sum_k \hbar \omega_k (a_k^\dagger a_k + 1/2) \quad (1.7)$$

## 1.2 Fock State

## 第二章 Coherence

---

### 2.1 Classical Coherence

考虑两个单色平面波光场的干涉：

$$E^{(+)}(\mathbf{r}, t) = E_1^{(+)} e^{i(kz - \omega t)} + E_2^{(+)} e^{i(kz - \omega t + \phi)} \quad (2.1)$$

其总光强为

$$\begin{aligned} I &= \langle |\mathbf{E} \times \mathbf{H}| \rangle = \langle E^2 \rangle / \eta \\ &= \langle [E_1^{(+)} e^{i(kz - \omega t)} + E_2^{(+)} e^{i(kz - \omega t + \phi)} + E_1^{(-)} e^{-i(kz - \omega t)} + E_2^{(-)} e^{-i(kz - \omega t - \phi)}] \rangle \\ &= \frac{2}{\eta} E_1^{(+)} E_1^{(-)} + \frac{2}{\eta} E_2^{(+)} E_2^{(-)} + \frac{2}{\eta} E_1^{(+)} E_2^{(-)} e^{i\phi} + \frac{2}{\eta} E_1^{(-)} E_2^{(+)} e^{i\phi} \\ &= I_1 + I_2 + \left[ \frac{2}{\eta} E_1^{(+)} E_2^{(-)} e^{i\phi} + \text{c.c.} \right] \end{aligned} \quad (2.2)$$

接下来，我们考虑一阶干涉实验装置——Mach-Zehnder 干涉仪，一束光入射到 50 : 50 的分束器，分出的两束单色平面波的相位差是由不同路径的 Time Delay 引入的，即  $\phi = -\omega\tau$ ，然后

$$I_{sum} = 2I(\omega) + \left[ \frac{2}{\eta} |E_0^{(+)}(\omega)|^2 e^{-i\omega\tau} + \text{c.c.} \right] \quad (2.3)$$

实际上的光场在频谱上都有一定的展宽，考虑这一点，我们需要对上述单色情况的光强积分

$$\begin{aligned} I_{tol} &= \int_0^\infty I_{sum}(\omega) d\omega \\ &= 2 \int_0^\infty I(\omega) d\omega + \left[ \frac{2}{\eta} \int_0^\infty |E_0^{(+)}(\omega)|^2 e^{-i\omega\tau} d\omega + \text{c.c.} \right] \end{aligned} \quad (2.4)$$

**注** 需要说明的是，上式积分已将电场成分分为  $E^{(+)}$  和  $E^{(-)}$  (它们的频谱是 one-sided 的)，对频域上的积分只有正频率部分。因此，电场干涉项实际上是正频电场模方的半无界 Fourier 变换。

#### 2.1.1 Optical Wiener-Khinchin Theorem

先证明 Wiener-Khinchin theorem：

$$\mathcal{F} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(t') f(t+t') dt' \right] = |\mathcal{F}[f]|^2 \quad (2.5)$$

**证明** 考虑卷积  $\mathcal{F}[f * g] = \mathcal{F}[f] \mathcal{F}[g]$

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t') g(t-t') dt' = \mathcal{F}^{-1} [\mathcal{F}[f] \mathcal{F}[g]] \quad (2.6)$$



令  $g(t) = f^*(-t)$ , 其 Fourier 变换有如下关系

$$\mathcal{F}[g(t)] = \mathcal{F}[F^*(-t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(-t)e^{i\omega t} dt = (\mathcal{F}[f(t)])^* \quad (2.7)$$

代入 (2.6) 式,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t')f^*(t' - t)dt' = \mathcal{F}^{-1} [|\mathcal{F}[f]|^2] \quad (2.8)$$

该定理右边积分部分即为  $f(t)$  的自相关函数 (autocorrelation function), Wiener-Khinchin theorem 说明了自相关函数的 Fourier 变换给出了光场的频谱。

对于物理上可观测的一段时间  $T$  的双时均值

$$\langle f^*(t)f(t + \tau) \rangle_T := \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f^*(t)f(t + \tau) dt \quad (2.9)$$

这种定义保证了积分在边界的收敛性, 同时和实验上可观测测量是紧密联系的。此时, Wiener-Khinchin theorem 可以写成

$$\mathcal{F}[\langle f^*(t)f(t + \tau) \rangle_T] = \mathcal{F}_T^*[f]\mathcal{F}_T[f] \quad (2.10)$$

其中,

$$\mathcal{F}_T[f] := \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{i\omega t} dt \quad (2.11)$$

这样的定义下, 可以给出 Wiener-Khinchin Theorem 的另一种计算形式

$$\mathcal{F}_T[f] := \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left| \int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{i\omega t} dt \right|^2 \quad (2.12)$$

电场的双时均值可以由频域的 Fourier 变换得到, 即 Optical Wiener-Khinchin theorem:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty I(\omega)e^{-i\omega\tau} d\omega = \frac{2}{\eta} \langle E^{(-)}(t)E^{(+)}(t + \tau) \rangle \quad (2.13)$$

令  $\tau = 0$ , 有

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty I(\omega)d\omega = \frac{2}{\eta} \langle E^{(-)}(t)E^{(+)}(t) \rangle \quad (2.14)$$

### 2.1.2 Degree of First-Order Coherence

对双时均值进行归一化, 由此定义一阶关联函数 (Degree of first-order temporal coherence)

$$g^{(1)}(\tau) = \frac{\langle E^{(-)}(t)E^{(+)}(t + \tau) \rangle}{\langle E^{(-)}(t)E^{(+)}(t) \rangle} \quad (2.15)$$

再考虑空间自由度, 由此可以定义一般情况的一阶关联函数 (Degree of first-order coherence)

$$g^{(1)}(\mathbf{r}_1, t_1; \mathbf{r}_2, t_2) = \frac{\langle E^{(-)}(\mathbf{r}_1, t_1)E^{(+)}(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle}{\sqrt{\langle |E^{(+)}(\mathbf{r}_1, t_1)|^2 \rangle \langle |E^{(+)}(\mathbf{r}_2, t_2)|^2 \rangle}} \quad (2.16)$$

一阶关联函数可以直接给出归一化的光谱

$$F(\omega) = \frac{I(\omega)}{\int_0^\infty I(\omega)d\omega} \quad (2.17)$$

将式 (2.13)、(2.14) 代入, 有

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} g^{(1)}(\tau) \exp(i\omega\tau) d\tau \quad (2.18)$$

此外, 还可以给出干涉对比度 (Fringe Visibility)

$$\mathcal{V} = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} \quad (2.19)$$

记  $g^{(1)}(\tau) = |g^{(1)}(\tau)| e^{i\phi(\tau)}$ , 结合式 (2.2)

$$I_{\text{tot}} = \left( \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} I(\omega) d\omega \right) \left[ 1 + |g^{(1)}(\tau)| \cos \phi(\tau) \right] \quad (2.20)$$

我们有

$$\mathcal{V} = |g^{(1)}(\tau)| \quad (2.21)$$

### 2.1.3 Second-Order Coherence

二阶相干性 (Second-Order Coherence) 的定义是直接的

$$g^{(2)}(\tau) = \frac{\langle E^{(-)}(t) E^{(-)}(t+\tau) E^{(+)}(t+\tau) E^{(+)}(t) \rangle}{\langle E^{(-)}(t) E^{(+)}(t) \rangle^2} \quad (2.22)$$

或者用经典可观测量来表示

$$g^{(2)}(\tau) = \frac{\langle I(t) I(t+\tau) \rangle}{\langle I \rangle^2} \quad (2.23)$$

二阶相干有时也称为强度关联。

## 2.2 Quantum Description of Coherence

### 2.2.1 Correlation Function

我们考虑量子形式的光强

$$I(\mathbf{r}, t) = \text{Tr} \left[ \rho E^{(-)}(\mathbf{r}, t) E^{(+)}(\mathbf{r}, t) \right] \quad (2.24)$$

以及量子高阶关联

$$G^{(n)}(x_1, \dots, x_{2n}) = \text{Tr} \left[ \rho E^{(-)}(x_1) \cdots E^{(-)}(x_n) E^{(+)}(x_{n+1}) \cdots E^{(+)}(x_{2n}) \right] \quad (2.25)$$

其中  $x_i = (\mathbf{r}_i, t)$ 。

### 2.2.2 First-Order Optical Coherence

以杨氏双缝 (Young's interference) 为例, 一束光从双缝中分出, 最后在位点  $(\mathbf{r}, t)$  上发生干涉, 其电场可以写成

$$\begin{aligned} E^{(+)}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{s_1} E_1^{(+)}(\mathbf{r}_1, t - s_1/c) + \frac{1}{s_2} E_2^{(+)}(\mathbf{r}_2, t - s_2/c) \\ &= \frac{E_1^{(+)}(\mathbf{r}_1, t - s_1/c) + E_2^{(-)}(\mathbf{r}_2, t - s_2/c)}{R} \end{aligned} \quad (2.26)$$

代入式 (2.24), 有

$$I = G^{(1)}(x_1, x_1) + G^{(1)}(x_2, x_2) + 2\text{Re} \left\{ G^{(1)}(x_1, x_2) \right\} \quad (2.27)$$

或者令  $G^{(1)}(x_1, x_2) = |G^{(1)}(x_1, x_2)| \exp(i\Phi(x_1, x_2))$ , 则

$$I = G^{(1)}(x_1, x_1) + G^{(1)}(x_2, x_2) + 2 |G^{(1)}(x_1, x_2)| \cos \Phi \quad (2.28)$$

**例 2.1** 现在考虑原子碰撞产生的多普勒展宽对应的一阶关联。

假设光场是由原子系综产生的, 随机碰撞事件会对原子施加一个随机相位, 系综总电场可以写成

$$E(t) = E_0 e^{-i\omega t} \sum_i \exp(i\phi_i(t)) \quad (2.29)$$

总电场的双时关联函数为

$$\langle E^*(t) E(t + \tau) \rangle = E_0^2 \exp(-i\omega\tau) \left\langle \sum_{i,j} \exp[i(\phi_i(t + \tau) - \phi_j(t))] \right\rangle \quad (2.30)$$

## 2.2.3 Second-Order Coherence

### 2.2.3.1 Hanbury-Brown-Twiss effect

考虑两个波矢为  $\mathbf{k}_1$  和  $\mathbf{k}_2$  相同频率单光子, 二阶关联函数为

$$\begin{aligned} G^{(2)}(x_1, x_2) &= \langle 1, 1 | E^{(-)}(x_1) E^{(-)}(x_2) E^{(+)}(x_2) E^{(+)}(x_1) | 1, 1 \rangle \\ &= \sum_{i,j} \langle 1, 1 | E^{(-)}(x_1) E^{(-)}(x_2) | i, j \rangle \langle i, j | E^{(+)}(x_2) E^{(+)}(x_1) | 1, 1 \rangle \\ &= \langle 1, 1 | E^{(-)}(x_1) E^{(-)}(x_2) | 0 \rangle \langle 0 | E^{(+)}(x_2) E^{(+)}(x_1) | 1, 1 \rangle \\ &= \Psi^{(2)*}(x_1, x_2) \Psi^{(2)}(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (2.31)$$

其中,

$$\Psi^{(2)}(x_1, x_2) = \langle 0 | E^{(+)}(x_2) E^{(+)}(x_1) | 1, 1 \rangle \quad (2.32)$$

形式上可以称为双光子波函数。

利用  $E^{(+)}(\mathbf{r}, t) = i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0}} f(\mathbf{r}) a e^{-i\omega t}$  我们考虑行波的情况, 总的正频场为

$$E^{(+)}(\mathbf{r}, t) = \mathcal{E} \left( a_1 e^{-i\omega t + i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}} + a_2 e^{-i\omega t + i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}} \right) \quad (2.33)$$

代入式 (2.32), 有

$$\Psi^{(2)}(\mathbf{r}_1, t; \mathbf{r}_2, t) = \mathcal{E}^2 \exp(-2i\omega t) \left( e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}_1 + i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}_2} + e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}_2 + i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}_1} \right) \quad (2.34)$$

最后, 二阶关联函数可计算得

$$G^{(2)}(\mathbf{r}_1, t; \mathbf{r}_2, t) = 2\mathcal{E}^4 \{1 + \cos[(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)]\} \quad (2.35)$$

这种干涉的产生是由于: 对于两个源和两个探测器, 探测器无法区分信号是来自哪一个源, 两条无法区分的路径叠加产生了干涉。

考虑两个处于相同激发态的二能级原子  $|\phi(0)\rangle = |e, e\rangle|0\rangle$ , 经过足够长的时间, 会演化为末态  $|\phi(\infty)\rangle = |g, g\rangle|1, 1\rangle$ 。假如我们对原子的初始化是不完美的, 引入了 Random 的相位, 即

$$|\phi(0)\rangle = [|\alpha| e^{i\phi} |e, e\rangle + |\beta| (e^{i\theta} |e, g\rangle + e^{i\theta'} |g, e\rangle) |\gamma\rangle |g, g\rangle] |0\rangle \quad (2.36)$$

则末态演化为

$$|\phi(\infty)\rangle = |g, g\rangle \left[ |\alpha|e^{i\phi}|1, 1\rangle + |\beta| \left( e^{i\theta}|1, 0\rangle + e^{i\theta'}|0, 1\rangle \right) |\gamma||0, 0\rangle \right] \quad (2.37)$$

引入 random 的相位之后，二阶关联被保留下来

$$G^{(2)}(\mathbf{r}_1, t; \mathbf{r}_2, t) = 2|\alpha|^2 \mathcal{E}^4 \{1 + \cos[(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)]\} \quad (2.38)$$

而一阶干涉的交叉项会因为 Random 相位的引入而变为 0。

## 2.3 Phase Noise

假设一个时谐信号混入了 Random 的含时相位 (Phase Noise)，如

$$f(t) \cos[\omega_0 t + \phi(t)] \quad (2.39)$$

我们来讨论这种相位噪声会对光谱产生如何影响。

由于  $\omega(t) = \frac{d\phi_{total}}{dt} = \omega_0 + \dot{\phi}(t)$ ，有

$$S_\phi(\omega) = \mathcal{F}[\langle \phi(t)\phi(t+\tau) \rangle] \quad (2.40)$$

和

$$S_\omega(\omega) = \mathcal{F}[\langle \dot{\phi}(t)\dot{\phi}(t+\tau) \rangle] \quad (2.41)$$

不难证明关系

$$S_\omega(\omega) = \omega^2 S_\phi(\omega) \quad (2.42)$$

## 2.4 Optical Signal Detection

### 2.4.1 Photon Count Detection

实际的探测器只能对有限小时间间隔内的信号产生响应，先从经典理论开始讨论。考虑  $I(t)$  进入探测器，在时间  $dt$  内信号被探测到的概率为

$$\Delta p(t) = \alpha I(t) dt \quad (2.43)$$

其中  $\alpha$  用于表征探测器的灵敏度 (Sensitivity)，此处我们先忽略  $I(t)$  的涨落。

对一段时间  $(t, t+T)$  内，探测器没有接收到任何信号的概率为

$$\begin{aligned} \prod_t^{t+T} [1 - \Delta p(t')] &\simeq \prod_t^{t+T} \exp[-\Delta p(t')] \\ &= \exp\left[-\sum_t^{t+T} \Delta p(t')\right] \\ &= \exp\left[-\int_t^{t+T} dp(t')\right] \end{aligned} \quad (2.44)$$

即

$$P_{\text{nosignal}}(t, t+T) = \exp\left[-\alpha \int_t^{t+T} I(t') dt'\right] \quad (2.45)$$



类似上述的思路，产生  $n$  次响应的概率为

$$P_n(t, t+T) = \frac{1}{n!} [\alpha T \bar{I}(t, t+T)]^n \exp[-\alpha T \bar{I}(t, t+T)] \quad (2.46)$$

其中， $\bar{I}(t, t+T) = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} I(t') dt'$ 。

实验中，我们往往会重复多次上述的平行实验，因此，我们得到的  $P_n(T)$  是对一系列起始时间对应概率的平均

$$P_n(T) = \langle P_n(t, t+T) \rangle_t = \left\langle \frac{1}{n!} [\alpha T \bar{I}(t, t+T)]^n \exp[-\alpha T \bar{I}(t, t+T)] \right\rangle \quad (2.47)$$

## 2.4.2 Homodyne Detection

### 2.4.2.1 Ordinary Homodyne Detection

早期的光学信号探测为基于强度 (Intensity) 的测量，这种测量对相位不敏感，不适用于例如对压缩态的测量因此，我们需要 Phase Sensitive 的方案。

如图 (图呢?)，Local Oscillator(LO) 产生与入射场相同频率的信号。入射场和 LO 的信号经过一个透射率  $T$ 、反射率  $R$  的分束器，我们有

$$\begin{cases} c = \sqrt{T}a + i\sqrt{1-T}b \\ d = i\sqrt{1-T}a + \sqrt{T}b \end{cases} \quad (2.48)$$

$$\quad (2.49)$$

由探测器接收的可观测量为

$$\begin{cases} c^\dagger c = Ta^\dagger a + (1-T)b^\dagger b + i\sqrt{T(1-T)}(a^\dagger b - b^\dagger a) \\ d^\dagger d = (1-T)a^\dagger a + Tb^\dagger b - i\sqrt{T(1-T)}(a^\dagger b - b^\dagger a) \end{cases} \quad (2.50)$$

$$\quad (2.51)$$

对于原始的零差测量，我们采用高透射率的 BS，即  $T \gg R$ ，同时 LO 输出相对相位为  $\phi$  的相干态  $|\alpha\rangle$ ，此时，被测信号大多进入第一个探测器

$$\langle c^\dagger c \rangle = T \langle a^\dagger a \rangle + (1-T)|\alpha|^2 - 2\sqrt{T(1-T)}|\alpha| \langle X(\phi + \pi/2) \rangle \quad (2.52)$$

其中

$$X(\phi) = (ae^{-i\phi} + a^\dagger e^{i\phi})/2 \quad (2.53)$$

值得注意的是式 (2.52) 第三项的干涉项，我们可以从中读出被测信号的相位信息。我们假设 LO 的信号足够强

$$(1-T)|\alpha|^2 \gg T \langle a^\dagger a \rangle \quad (2.54)$$

这样，我们可以忽略式 (2.52) 的第一项，从而得到探测器探测到的平均光子数

$$\langle n_c \rangle = (1-T)|\alpha|^2 - 2\sqrt{T(1-T)}|\alpha| \langle X(\phi + \pi/2) \rangle \quad (2.55)$$

类似的，探测器的光子数涨落为

$$(\Delta n_c)^2 = (1-T)|\alpha|^2 \{(1-T) + 4T [\Delta X(\phi + \pi/2)]\} \quad (2.56)$$

其中，第一项为 LO 引入的噪声，这是我们不希望看见的。

### 2.4.2.2 Balanced Homodyne Detection

接着2.4.2.1的式 (2.50) 讨论, 在 Balanced Homodyne Detection 中, 我们使用 50:50 的 BS, 并且测量两个探测器信号之差

$$n_{cd} = c^\dagger c - d^\dagger d = -i(a^\dagger b - b^\dagger a) \quad (2.57)$$

类似2.4.2.1推导, 我们仍然用 LO 输入相干态的光, 测量得到的信号为

$$\langle n_{cd} \rangle = -2|\alpha| \langle X(\phi + \pi/2) \rangle \quad (2.58)$$

以及方差

$$(\Delta n_{cd}) = 4|\alpha|^2 [\Delta X(\phi + \pi/2)] \quad (2.59)$$

此时可以看到相比 Ordinary Homodyne Detection, LO 引入的噪声被消除了。

#### 例 2.2 Mach-Zehnder Interferometer with Balanced Homodyne Detection

我们考虑 MZ 干涉仪在其中一路上有由于 Kerr Medium 引起的相位移动 (Phase Shift), 介质的折射率由外场调控  $n = n_0 + n_2 E^2$ , 从而其中一路产生额外相位

$$\phi_p = \Delta k z = \frac{\nu}{c} n_2 E^2 z \quad (2.60)$$

两束入射光经过第一个 BS(M1) 后为

$$a \begin{cases} a' = (a + ib)/\sqrt{2} \\ b' = (ia + b)/\sqrt{2} \end{cases} \quad (2.61)$$

$$(2.62)$$

其中一路光经过 Kerr 介质获得额外相位后经过第二个 BS(M2), 则

$$\begin{cases} c = (a' + ib'e^{i\phi_p}) = \left[ (1 - e^{i\phi_p}) a + i(1 + e^{i\phi_p}) b \right] / 2 \\ d = (ia' + b'e^{i\phi_p}) = \left[ i(1 + e^{i\phi_p}) a - (1 - e^{i\phi_p}) b \right] / 2 \end{cases} \quad (2.63)$$

$$(2.64)$$

最后, 探测器测得的信号为

$$n_{cd} = c^\dagger c - d^\dagger d = (b^\dagger b - a^\dagger a) \cos \phi_p - (a^\dagger b + b^\dagger a) \sin \phi_p \quad (2.65)$$

特别的, 当只有 LO 输入相干态  $|\alpha\rangle$ , 另一路无输入 (i.e. Vacuum) 时

$$\langle n_{cd} \rangle = |\alpha|^2 \cos \phi_p \quad (2.66)$$

方差为

$$(\Delta n_{cd})^2 = |\alpha|^2 \quad (2.67)$$

利用不确定度传递公式, 可以计算 Kerr 介质引入的相位不确定度

$$\Delta \phi_p = \frac{\Delta n_{cd}}{|\partial \langle n_{cd} \rangle / \partial \phi_p|} = 1/\sqrt{\bar{n}} \quad (2.68)$$

其中,  $\bar{n} = |\alpha|^2$ , 式 (2.68) 代表经典测量中的散粒噪声极限 (Shot-Noise Limit), 是量子测量 (Quantum Metrology) 中的一个重要概念, 表述了经典光测量不确定度的极限值。

作为一个比较, 我们假设另一路入射的是压缩真空态 (Squeezed Vacuum)  $|0, \xi\rangle$ , 探测器所得的信号为

$$\langle n_{cd} \rangle = (|\alpha|^2 + \sinh^2 r) \cos \phi_p \quad (2.69)$$



在 LO 信号很强 ( $\bar{n} \gg \sinh^2 r$ ) 时, 相位不确定度为

$$\Delta\phi = \frac{e^{-r}}{\sqrt{\bar{n}}} \quad (2.70)$$

可以看到散粒噪声极限被进一步压制了。

### 2.4.3 Heterodyne Detection

我们已经知道, Homodyne 测量是利用两束频率一致的光, 而外差测量 (Heterodyne Detection) 则是利用两束独立且频率不同的入射光进行的测量。

## 2.5 Introductions to Quantum Metrology



## 第三章 Boson Sampling





# 第四章 Quantum Distribution Theory & Representation

对电磁场的完备描述需要量子统计的处理方法。不失一般性，我们可以将讨论限制在单模场上。一个直接的思路是将电磁场的密度算符用 Fock 基矢展开，另外一个思路则是用相干态展开。

## 4.1 Expand in Number State

由于 Fock 基矢构成一组完备正交基，因此有

$$\rho = \sum C_{nm} |n\rangle \langle m| \quad (4.1)$$

以相干态  $|\alpha\rangle = \exp(-|\alpha|^2/2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$  为例：

$$\begin{aligned} \rho &= e^{-|\alpha|^2} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \right) \left( \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha^m}{\sqrt{m!}} \langle m| \right) \\ &= \sum_{n,m} e^{-|\alpha|^2} \frac{\alpha^n (\alpha^*)^m}{\sqrt{n!m!}} |n\rangle \langle m| \end{aligned} \quad (4.2)$$

## 第二部分

# Light-Matter Interaction

# 第五章 Light-Matter Interaction: Classical Description

## 5.1 Review

### 5.1.1 Quantum State & Density Operator

### 5.1.2 Picture

#### 5.1.2.1 Evolution

对于封闭体系 (耗散过程不发生), 可以由 Schrödinger 方程直接得到

$$\begin{aligned}\partial_t \rho &= (\partial_t |\psi\rangle\langle\psi|) + |\psi\rangle\partial_t\langle\psi| \\ &= -\frac{i}{\hbar}H\rho + \frac{i}{\hbar}\rho H \\ &= -\frac{i}{\hbar}[H, \rho]\end{aligned}\tag{5.1}$$

封闭体系下的量子态演化遵循 Schrödinger – vonNeuman equation。

封闭体系量子态在给定 Hamiltonian 情况下含时演化是么正的

$$|\psi(t)\rangle = U(t, t_0)|\psi(t_0)\rangle\tag{5.2}$$

我们知道, 在 Hamiltonian 不含时的情况下, 有

$$U(t, t_0) = \exp(-iH(t - t_0)/\hbar)\tag{5.3}$$

若 Hamiltonian 显含时间, 利用无限小么正变换

$$|\psi(t + dt)\rangle = \left(1 - \frac{i}{\hbar}Hdt\right)|\psi(t)\rangle\tag{5.4}$$

记  $U(t + dt, t) = 1 - \frac{i}{\hbar}Hdt$ , 再由

$$U(t + dt, t_0) = U(t + dt, t)U(t, t_0) = \left(1 - \frac{i}{\hbar}Hdt\right)U(t, t_0)\tag{5.5}$$

写成微分的形式

$$\partial_t U(t, t_0) = -\frac{i}{\hbar}HU(t, t_0)\tag{5.6}$$

对于一段含时演化, 由

$$U(t + dt, t) = 1 - \frac{i}{\hbar}Hdt = e^{-iHdt/\hbar}\tag{5.7}$$

可得

$$\begin{aligned}
 U(t, t_0) &= \prod_{t_0}^t e^{-iHt_i dt_i/\hbar} \\
 &= \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} \sum_{t_0}^t H(t_i) dt_i \right] \\
 &= \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t H(t') dt' \right]
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

注意式 (5.8) 需要满足条件  $[H(t), H(t')]$ , 即任意时刻的 Hamiltonian 都相互对易。如果这个条件不被满足, 我们记

$$U(t, t_0) = \mathcal{T} \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t H(t') dt' \right] \tag{5.9}$$

其中算符  $\mathcal{T}$  为编时算符 (Chronological Operator), 用于表示有一定时序 (time-order) 的无限小么正变换的积。

### 5.1.2.2 Heisenberg Picture

在 Schrödinger Picture 下, 含时演化是作用在态上的。此时算符均值的含时演化为

$$\begin{aligned}
 \langle A(t) \rangle &= \langle \psi(t) | A_s | \psi(t) \rangle \\
 &= \langle \psi(0) | U^\dagger(t, 0) A_s U(t, 0) | \psi(0) \rangle \\
 &= \langle \psi(0) | A_H(t) | \psi(0) \rangle
 \end{aligned} \tag{5.10}$$

其中  $A_H(t) = U^\dagger(t, 0) A_s U(t, 0)$ , H 和 S 分别表示两种 Picture, 含时演化被转移到了算符上。

直接的计算, 可以直接导出 Heisenberg Equation of motion

$$\begin{aligned}
 \partial_t A_H &= \partial_t [U^\dagger A_s U] \\
 &= \frac{i}{\hbar} U^\dagger H_s(t) U U^\dagger A_s U - \frac{i}{\hbar} U^\dagger A_s U U^\dagger H_s(t) U \\
 &= -\frac{i}{\hbar} [A_H, U^\dagger H U]
 \end{aligned} \tag{5.11}$$

对于不含时的 Hamiltonian, 则有

$$\partial_t A_H = -\frac{i}{\hbar} [A_H, H] \tag{5.12}$$

### 5.1.2.3 Interaction Picture

相互作用绘景在多系统耦合问题中经常使用, 对于

$$H = H_0 + V(t) \tag{5.13}$$

作变换

$$|\widetilde{\psi}\rangle = e^{iH_0 t/\hbar} |\psi\rangle \tag{5.14}$$

对应密度算符变换为

$$\widetilde{\rho} = e^{iH_0 t/\hbar} \rho e^{-iH_0 t/\hbar} \tag{5.15}$$



将上述变换应用于 Schrödinger – vonNeuman equation, 则

$$\begin{aligned}\partial_t |\widetilde{\psi}\rangle &= -\frac{i}{\hbar} \widetilde{V}(t) |\widetilde{\psi}\rangle \\ \partial_t \widetilde{\rho} &= -\frac{i}{\hbar} [\widetilde{V}(t), \widetilde{\rho}]\end{aligned}\quad (5.16)$$

### 5.1.3 Entanglement

## 5.2 Two-Level Atom with a Classical Field

### 5.2.1 Dipole Interaction

现考虑原子和单模场的相互作用

$$\mathbf{E}(t) = \hat{e} E_0 \cos(\omega t) \quad (5.17)$$

**注** 实际上的电场是存在空间分布的, 但这里用到 Dipole approximation, 即在原子尺度上, 电场的空间变化可以忽略不计。

实验上, 电偶极相互作用比其他 (磁偶极, 电四极) 相互作用大几个量级, 整个系统可以写成

$$\begin{aligned}H &= H_0 + H_d \\ &= \hbar\omega_1 |1\rangle\langle 1| + \hbar\omega_0 |0\rangle\langle 0| - \mathbf{d} \cdot \mathbf{E}\end{aligned}\quad (5.18)$$

其中  $\mathbf{d} = -e\mathbf{r}$ 。

我们现在来讨论电偶极矩阵元的性质, 由于 Dipole 算符是奇宇称的, 所以

$$\Pi \mathbf{d} \Pi^\dagger = -\mathbf{d} \quad (5.19)$$

即  $[\Pi, \mathbf{d}]_+ = \Pi \mathbf{d} + \mathbf{d} \Pi = 0$  矩阵元

$$0 = \langle a | [\Pi, \mathbf{d}]_+ | b \rangle = (\pi_a + \pi_b) \langle a | \mathbf{d} | b \rangle \quad (5.20)$$

其中  $\pi_{a,b} = \pm 1$  为原子态的宇称, 对于对角元有

$$\langle 1 | \mathbf{d} | 1 \rangle = \langle 0 | \mathbf{d} | 0 \rangle = 0 \quad (5.21)$$

因此, 电偶极算符可以写成

$$\mathbf{d} = \langle 0 | \mathbf{d} | 1 \rangle |0\rangle\langle 1| + \langle 1 | \mathbf{d} | 0 \rangle |1\rangle\langle 0| \quad (5.22)$$

非对角元为实数, 则

$$\mathbf{d} = \langle 1 | \mathbf{d} | 0 \rangle (\sigma + \sigma^\dagger) \quad (5.23)$$

其中  $\sigma = |0\rangle\langle 1|$  为原子跃迁算符, 相当于  $N = 2$  截断的湮灭算符。

最后, 系统 Hamiltonian 可写成

$$H = \hbar\omega_1 \sigma^\dagger \sigma + \hbar\omega_0 \sigma \sigma^\dagger - \langle 1 | \mathbf{d} | 0 \rangle \cdot \mathbf{E} (\sigma + \sigma^\dagger) \quad (5.24)$$



### 5.2.2 Rotating-Wave Approximation

将电场写成正频和负频的形式

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(t) &= \hat{\epsilon} \frac{E_0}{2} (e^{-i\omega t} + e^{i\omega t}) \\ &= \mathbf{E}_0^{(+)} e^{-i\omega t} + \mathbf{E}_0^{(-)} e^{i\omega t}\end{aligned}\quad (5.25)$$

记

$$\mathbf{d} = \langle 1 | \mathbf{d} | 2 \rangle (\sigma + \sigma^\dagger) = \mathbf{d}^{(+)} + \mathbf{d}^{(-)} \quad (5.26)$$

我们在 Heisenberg Picture 下看 Dipole 算符， $\mathbf{d}^\pm$  是以  $e^{\mp i\omega_0 t}$  频率振荡的。于是，相互作用项由两项高频项和低频项组成的。我们之后可以看到，在一次 Rabi 振荡过程中，若高频项远大于 Rabi 频率，则高频项在一次 Rabi 振荡周期中的动力学演化平均贡献几乎为 0。作为近似，我们可以将高频项舍去

$$\begin{aligned}H_{AF} &= -(\mathbf{d}^{(+)} + \mathbf{d}^{(-)}) \cdot (\mathbf{E}^{(+)} + \mathbf{E}^{(-)}) \\ &\simeq -\mathbf{d}^{(+)} \cdot \mathbf{E}^{(-)} - \mathbf{d}^{(-)} \cdot \mathbf{E}^{(+)}\end{aligned}\quad (5.27)$$

另外，我们定义实验上比较关注的参数，Rabi 频率：

$$\begin{aligned}H_{AF} &= -\hat{\epsilon} \cdot \langle 1 | \mathbf{d} | 0 \rangle \left( E_0^{(-)} \sigma e^{i\omega t} + E_0^{(+)} \sigma^\dagger e^{-i\omega t} \right) \\ &= \frac{\hbar\Omega}{2} \left( \sigma e^{i\omega t} + \sigma^\dagger e^{-i\omega t} \right)\end{aligned}\quad (5.28)$$

其中，Rabi 频率<sup>1</sup>定义为

$$\Omega = -\hat{\epsilon} \cdot \langle 1 | \mathbf{d} | 0 \rangle E_0 / \hbar \quad (5.29)$$

**注** 对于不同偏振入射光对应的 Rabi 频率表达式和原子能级相关的选择定则，参照??

### 5.2.3 Rabi Oscillation

设二能级原子态

$$|\psi\rangle = c_1|1\rangle + c_0|0\rangle \quad (5.30)$$

直接代入 Schrödinger 方程，有

$$\begin{cases} \partial_t c_0 = -i\omega_0 c_0 - i\frac{\Omega}{2} c_1 e^{i\omega t} \\ \partial_t c_1 = -i\omega_1 c_1 - i\frac{\Omega}{2} c_0 e^{-i\omega t} \end{cases} \quad (5.31)$$

$$\quad (5.32)$$

一个常用的方法是转移到 Rotating Frame 下，令  $\tilde{c}_j = c_j e^{i\omega_j t}$ ,  $j = \{0, 1\}$ ，式 (5.31) 化为

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{c}_0 = -i\frac{\Omega}{2} \tilde{c}_1 e^{-i(\omega_{10}-\omega)t} \\ \partial_t \tilde{c}_1 = -i\frac{\Omega}{2} \tilde{c}_0 e^{i(\omega_{10}-\omega)t} \end{cases} \quad (5.33)$$

$$\quad (5.34)$$

其中， $\omega_{10} = \omega_1 - \omega_0$ 。我们记 Laser Detuning 为

$$\Delta = \omega_{10} - \omega \quad (5.35)$$

<sup>1</sup>也有定义没有带符号，总体上没影响

这样，式 (5.33) 有如下通解

$$\begin{cases} \tilde{c}_1(t) = \left( A_1 e^{i\tilde{\Omega}t/2} + B_1 e^{-i\tilde{\Omega}t/2} \right) e^{i\Delta t/2} \\ \tilde{c}_0(t) = \left( A_0 e^{i\tilde{\Omega}t/2} + B_0 e^{-i\tilde{\Omega}t/2} \right) e^{-i\Delta t/2} \end{cases} \quad (5.36)$$

$$\quad (5.37)$$

其中  $A_i, B_i, i = 1, 0$  为由初值确定的常数， $\tilde{\Omega} = \sqrt{\Omega^2 + \Delta^2}$  为考虑失谐的等效 Rabi 频率。

在共振条件下，我们有

$$\begin{cases} \tilde{c}_1 = \tilde{c}_1(0) \cos(\Omega t/2) - i\tilde{c}_0(0) \sin(\Omega t/2) \\ \tilde{c}_0 = \tilde{c}_0(0) \cos(\Omega t/2) - i\tilde{c}_1(0) \sin(\Omega t/2) \end{cases} \quad (5.38)$$

原子的布居数是周期性振荡的。

我们通过程序验证上述过程，同时检验 RWA 的近似效果。

```

from qutip import *
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Parameter
wa = 100.0 * 2 * np.pi
wb = 110.0 * 2 * np.pi # Energy level of atoms
Omega = 1.0 * 2 * np.pi # Rabi Frequency
Delta = 0 # Detune
w = wb - wa - Delta # Driven Frequency
Omega2 = 5.0 * 2 * np.pi
tau = 2 * np.pi/Omega
tau2 = 2 * np.pi/Omega2

# Operator
a = basis(2,0)
b = basis(2,1)

def D(t,args):
    return Omega * np.cos(w*t)
def D2(t,args):
    return Omega2 * np.cos(w*t)

# Hamiltonian
H0 = (wb-wa)/2*sigmaz() #wa*a*a.dag() + wb*b*b.dag()
H1 = [H0, [(sigmap()+sigmam()),D]]
H2 = [H0, [(sigmap()+sigmam()),D2]]
HRWA1 = Omega/2 * (sigmap()+sigmam())
HRWA2 = Omega2/2 * (sigmap()+sigmam())

```

```

# initial state and observables
psi_0 = b

na = a*a.dag()
nb = b*b.dag()
expt_ops =[na,nb]

# Evolution
t = np.linspace(0, tau, 1000)
t2 = np.linspace(0, tau2, 1000)
result = mesolve(H1,psi_0,t,[],expt_ops)
result2 = mesolve(H2,psi_0,t2,[],expt_ops)
result_RWA1 = mesolve(HRWA1,psi_0,t,[],expt_ops)
result_RWA2 = mesolve(HRWA2,psi_0,t2,[],expt_ops)

#plot
fig, ax = plt.subplots(1,2,figsize=(18,12))
ax[0].plot(t, result.expect[0],label=r'n_a')
ax[0].plot(t, result.expect[1],label=r'n_b')
ax[0].plot(t, result_RWA1.expect[0],label=r'n_a RWA')
ax[0].plot(t, result_RWA1.expect[1],label=r'n_b RWA')
ax[0].legend(loc=1)
ax[1].plot(t2, result2.expect[0],label=r'n_a')
ax[1].plot(t2, result2.expect[1],label=r'n_b')
ax[1].plot(t2, result_RWA2.expect[0],label=r'n_a RWA')
ax[1].plot(t2, result_RWA2.expect[1],label=r'n_b RWA')
ax[1].legend(loc=1)

plt.show()

```

输出结果如图 (5.1) 所示, 可以看到, 激光频率和原子共振时, 若 Rabi 频率和低频振荡为同个量级, 则 RWA 的近似效果会变差。

最后, 我们给出近共振 ( $\Delta \neq 0$ ) 的拉比振荡的解, 同时我们会在下一节讨论它:

$$\begin{cases} \tilde{c}_1 = \left\{ \tilde{c}_1(0) \left[ \cos(\tilde{\Omega}t/2) - \frac{i\Delta}{\tilde{\Omega}} \sin(\tilde{\Omega}t/2) \right] - i\frac{\Omega}{\tilde{\Omega}} \tilde{c}_0 \sin(\tilde{\Omega}t/2) \right\} e^{i\Delta t/2} \\ \tilde{c}_0 = \left\{ \tilde{c}_0(0) \left[ \cos(\tilde{\Omega}t/2) + \frac{i\Delta}{\tilde{\Omega}} \sin(\tilde{\Omega}t/2) \right] - i\frac{\Omega}{\tilde{\Omega}} \tilde{c}_1 \sin(\tilde{\Omega}t/2) \right\} e^{-i\Delta t/2} \end{cases} \quad (5.39)$$

当 Laser 出现失谐的时候, Rabi 振荡翻转的振幅相对共振的情况会减小。

### 5.2.4 Bloch Sphere

对于任意的二能级系统<sup>2</sup>, 我们可以利用 Bloch 球描述它的演化过程。

<sup>2</sup>例如, 量子点的自旋比特、激光驱动下的原子二能级



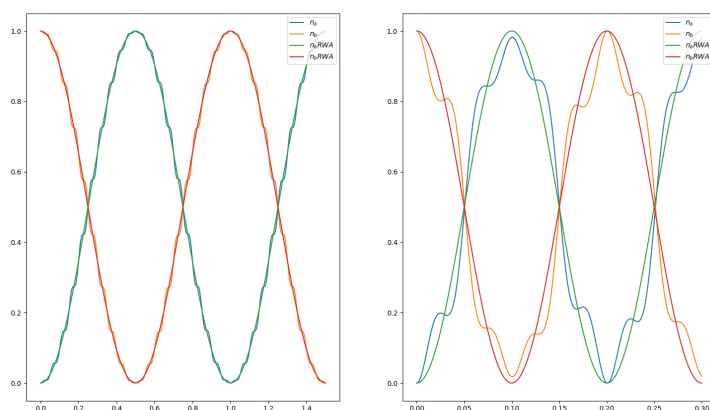


图 5.1: Full-Hamiltonian 和 RWA 的模拟结果: 左边为  $\omega \gg \Omega$  的情况, 右边为  $\omega \sim \Omega$  的情况

从最一般的哈密顿量出发

$$H/\hbar = \omega_g |g\rangle \langle g| + \omega_e |e\rangle \langle e| + g |g\rangle \langle e| + g^* |e\rangle \langle g| \quad (5.40)$$

我们在  $\{|g\rangle, |e\rangle\}$  的基矢下写出算符矩阵

$$H/\hbar = \begin{pmatrix} \omega_g & g^* \\ g & \omega_e \end{pmatrix} \quad (5.41)$$

我们引入 Pauli 矩阵:

$$\begin{cases} \sigma_z = |e\rangle \langle e| - |g\rangle \langle g| \\ \sigma_x = |e\rangle \langle g| + |g\rangle \langle e| \\ \sigma_y = -i(|e\rangle \langle g| - |g\rangle \langle e|) \end{cases} \quad (5.42)$$

这样, 我们可以用 3 个 Pauli 矩阵描述任意一个哈密顿量

$$H/\hbar = \frac{\omega_e + \omega_g}{2} \mathbb{I} + \frac{\omega_e - \omega_g}{2} \sigma_z + |g| \cos(\phi) \sigma_x + |g| \sin(\phi) \sigma_y \quad (5.43)$$

其中,  $g = |g| e^{i\phi}$ 。令  $\bar{\omega} = (\omega_e + \omega_g)/2$ ,  $\omega_0 = \omega_e - \omega_g$  以及  $\mathbf{B} = 2\hbar|g| \cos(\phi) \hat{e}_x + 2\hbar|g| \sin(\phi) \hat{e}_y + \hbar\omega_0 \hat{e}_z$ , 哈密顿量可以写成缩并的形式

$$H = \hbar\bar{\omega} \mathbb{I} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} \quad (5.44)$$

体系演化和粒子自旋在静磁场下演化是相似的, 第二项引入了进动。

我们设量子态

$$|\psi\rangle = \cos(\theta/2) |e\rangle + \sin(\theta/2) e^{i\varphi} |g\rangle \quad (5.45)$$

它对应 Bloch 球上的矢量

$$\vec{n} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta) \quad (5.46)$$

同时可以验证算符关系

$$\begin{cases} x := \langle \sigma_x \rangle = \sin \theta \cos \varphi \end{cases} \quad (5.47)$$

$$\begin{cases} y := \langle \sigma_y \rangle = \sin \theta \sin \varphi \end{cases} \quad (5.48)$$

$$\begin{cases} z := \langle \sigma_z \rangle = \cos \theta \end{cases} \quad (5.49)$$

### 5.2.5 a.c. Stark Effect

接下来我们讨论经典场驱动的二能级原子，取  $\hbar\omega$  为能量零点，此时哈密顿量可以写成

$$H/\hbar = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \omega_0 & \Omega e^{-i\omega t} \\ \Omega e^{i\omega t} & \omega_0 \end{pmatrix} \quad (5.50)$$

类似于式 (5.44) 的写法，我们把含时项写成类似的

$$H = B_0 S_z + \mathbf{B}_\perp \cdot \mathbf{S} \quad (5.51)$$

其中  $B_0 = \hbar\omega_0$ ， $\mathbf{B}_\perp = \hbar\Omega \cos(\omega t)\hat{e}_x + \hbar\Omega \sin(\omega t)\hat{e}_y$ ，时变相互作用项相当于一个在赤道面上以  $\omega$  角速度转动的磁场  $\mathbf{B}_\perp$ ，如果采取旋转坐标系，使  $\sigma_x$  和  $\sigma_y$  与这个磁场同步转动，预期上我们可以消除含时项。

我们利用变换

$$|\tilde{\psi}\rangle = U |\psi\rangle = e^{i\omega\sigma_z t/2} |\psi\rangle \quad (5.52)$$

引入 Laser Frame<sup>3</sup>，非对角元的算符对应么正变换为

$$e^{i\omega\sigma_z t/2} (|e\rangle\langle g| + |g\rangle\langle e|) e^{-i\omega\sigma_z t/2} = e^{i\omega t} |e\rangle\langle g| + e^{-i\omega t} |e\rangle\langle g| \quad (5.53)$$

这样，在 Laser Frame 下的哈密顿量为

$$\tilde{H} = (\Delta\sigma_z + \Omega\sigma_x)/2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \Delta & \Omega \\ \Omega & -\Delta \end{pmatrix} \quad (5.54)$$

其中， $\Delta = \omega_0 - \omega$  为 Laser Detuning，可以看到含时项被消除了。

现在讨论远失谐的情况， $\Delta \gg \Omega$  时，矩阵中的非对角元  $H' = \begin{pmatrix} 0 & \Omega \\ \Omega & 0 \end{pmatrix}$  较小，可以视为微扰，在 Laser Frame 下可以计算二阶微扰产生的能移为

$$\begin{cases} \delta E_g = \frac{\langle g|H'H'|g\rangle}{E_g - E_e} = -\frac{\Omega^2}{4\Delta} \\ \delta E_e = \frac{\Omega^2}{4\Delta} \end{cases} \quad (5.55)$$

当我们打入一束红失谐 ( $\Delta > 0$ ) 的 Gaussian 光，原子会感受到一个光势阱，这一原理被发展为偶极阱 (Dipole Trap)、光镊 (Optical Tweezers) 等。

### 5.2.6 Ramsey Interference

## 5.3 Adiabatic & Landau-Zener Crossings

### 5.4 Two-Level Atom with Damping & Optical Bloch Equation

### 5.5 Three-Level Atom: Raman Transition

<sup>3</sup>与 Rotating Frame 不同

## 第六章 Atomic Angular-Momentum Structure



## 第七章 Interacting with a Quantized Field

### 7.1 Spontaneous Emission: Weisskopf-Wigner Approach

这里讨论自发辐射的 Weisskopf-wigner 方法，这种处理思路和方法在后续主方程推导、量子化的 waveguide-cavity 耦合问题中经常出现，具有借鉴意义。

我们认为原子和自由空间发生耦合，这种耦合体现在与空间中各个模式的电场都有以 Dipole 为方式的能量交换，这样，系统的哈密顿量可以写成

$$H = \hbar\omega_0|e\rangle\langle e| + \sum_{\vec{k},\zeta} \hbar\omega_{\vec{k}} \left( a_{\vec{k},\zeta}^\dagger a_{\vec{k},\zeta} \right) - \mathbf{d} \cdot \mathbf{E} \quad (7.1)$$

其中， $\mathbf{d} = \langle g|\mathbf{d}|e\rangle (\sigma^+ + \sigma^-) := \mathbf{d}_{ge}(\sigma^+ + \sigma^-)$ 。

对电场一次量子化

$$\mathbf{E}_{\vec{k},\zeta}(\mathbf{r}) = \sqrt{\hbar\omega_{\vec{k}}/2\epsilon_0} \mathbf{u}_{\vec{k},\zeta}(\mathbf{r}) a_{\vec{k},\zeta} + \text{H.c.} \quad (7.2)$$

其中， $\mathbf{u}_{\vec{k},\zeta}$  是归一化的电场空间模式分布，可直接由 Maxwell 方程和确定的边界条件解出。这样，相互作用的哈密顿量可以写成

$$\begin{aligned} H_{AF} &= - \sum_{\vec{k},\zeta} \sqrt{\hbar\omega_{\vec{k}}/2\epsilon_0} (\sigma^+ + \sigma^-) \mathbf{d}_{ge} \cdot \left( \mathbf{u}_{\vec{k},\zeta}(\mathbf{r}) a_{\vec{k},\zeta} + \mathbf{u}_{\vec{k},\zeta}^* a_{\vec{k},\zeta}^\dagger \right) \\ &= \sum_{\vec{k},\zeta} \hbar \left( g_{\vec{k},\zeta} \sigma^+ a_{\vec{k},\zeta} + g_{\vec{k},\zeta}^* \sigma^- a_{\vec{k},\zeta}^\dagger \right) \end{aligned} \quad (7.3)$$

上式第二个等号已使用 RWA。这样可以定义原子和外场的耦合系数 (one-photon Rabi Frequency)

$$g_{\vec{k},\zeta}(\mathbf{r}) = -\sqrt{\omega_{\vec{k}}/2\epsilon_0 \hbar} \mathbf{d}_{ge} \cdot \mathbf{u}_{\vec{k},\zeta}(\mathbf{r}) \quad (7.4)$$

原子自发辐射过程中，由高能级跃迁至低能级，并向真空场的某个模式释放一个光子。在这种情况下，我们可以把讨论的 Hilbert 空间局限在单次激发 (single excitation) 的子空间中，即设

$$|\psi\rangle = c_e|e\rangle + \sum_{\vec{k},\zeta} c_{\vec{k},\zeta}|g, 1_{\vec{k},\zeta}\rangle \quad (7.5)$$

由于原子和外场共同构成一个封闭的系统，整体演化可直接用薛定谔方程直接给出：

$$\begin{cases} \partial_t c_e = -i\omega_0 c_e - i \sum_{\vec{k},\zeta} g_{\vec{k},\zeta} c_{\vec{k},\zeta} \\ \partial_t c_{\vec{k},\zeta} = -i\omega_{\vec{k}} c_{\vec{k},\zeta} - i g_{\vec{k},\zeta}^* c_e \end{cases} \quad (7.6)$$

同样的，引入 Rotating Frame:  $\tilde{c}_e = c_e e^{i\omega_0 t}$  和  $\tilde{c}_{\vec{k},\zeta} = c_{\vec{k},\zeta} e^{i\omega_{\vec{k}} t}$  简化计算，这样有

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{c}_e = -i \sum_{\vec{k},\zeta} g_{\vec{k},\zeta} \tilde{c}_{\vec{k},\zeta} e^{-i(\omega_{\vec{k}} - \omega_0)t} \\ \partial_t \tilde{c}_{\vec{k},\zeta} = -i g_{\vec{k},\zeta}^* \tilde{c}_e e^{i(\omega_{\vec{k}} - \omega_0)t} \end{cases} \quad (7.7)$$

得到一个极多远微分方程组，求解 (7.7) 仍需要一些近似。将式 (7.7) 的第二式积分，得到

$$\tilde{c}_{\vec{k},\zeta}(t) = \tilde{c}_{\vec{k},\zeta}(0) - ig_{\vec{k},\zeta}^* \int_0^t dt' \tilde{c}_e(t') e^{i(\omega_{\vec{k}} - \omega_0)t'} = ig_{\vec{k},\zeta}^* \int_0^t dt' \tilde{c}_e(t') e^{i(\omega_{\vec{k}} - \omega_0)t'} \quad (7.8)$$

回代至式 (7.7) 的第一项，得到

$$\partial_t \tilde{c}_e = - \sum_{\vec{k},\zeta} |g_{\vec{k},\zeta}|^2 \int_0^\infty dt' \tilde{c}_e(t') e^{-i(\omega_{\vec{k}} - \omega_0)(t-t')} \quad (7.9)$$

### Large-Box Limit

我们将耦合系数中内积部分显式地写出

$$|\mathbf{d}_{ge} \cdot \mathbf{f}_{\vec{k},\zeta}(\mathbf{r})|^2 = |\hat{\epsilon}_{\vec{k},\zeta} \cdot \mathbf{d}_{ge}|^2 |f_{\vec{k},\zeta}(\mathbf{r})|^2 \quad (7.10)$$

考虑原子系综和线偏光相互作用<sup>1</sup>，有

$$|\hat{\epsilon}_{\vec{k},\zeta} \cdot \mathbf{d}_{ge}|^2 = \langle \cos^2(\theta) \rangle |d_{ge}|^2 = d_{ge}^2/3 \quad (7.11)$$

再利用先前推导的自由空间电场空间模式

$$\mathbf{u}_{\vec{k},\zeta}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \hat{\epsilon}_{\vec{k},\zeta} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \quad (7.12)$$

即

$$|\mathbf{u}_{\vec{k},\zeta}(\mathbf{r})|^2 = 1/V \quad (7.13)$$

这样，式 (7.8) 化简为

$$\partial_t \tilde{c}_e = - \frac{d_{eg}^2}{3\epsilon_0 \hbar V} \sum_{\vec{k}} \omega_{\vec{k}} \int_0^t dt' \tilde{c}_e(t') e^{-i(\omega_{\vec{k}} - \omega_0)(t-t')} \quad (7.14)$$

在箱归一化的前提下，我们可以利用 Large-Box limit，设  $V \rightarrow \infty$ ，这种情况下，类似于经典统计力学中的做法， $\Delta k_i = 2\pi/L (i = 1, 2, 3)$  变为准连续的，即

$$\sum_{\vec{k}} \rightarrow \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y \int_{-\infty}^{+\infty} dk_z = \frac{V}{(2\pi)^3} \int d\Omega \int dk k^2 \quad (7.15)$$

一般我们将角向的分布积分得到只与径向有关的分布

$$\frac{V}{(2\pi)^2} \int dk k^2 \quad (7.16)$$

将求和替换成积分，利用  $k = \omega/c$ ，式 (7.14) 化为

$$\partial_t \tilde{c}_e = - \frac{d_{eg}^2}{6\pi^2 \epsilon_0 \hbar c^3} \int_0^{+\infty} d\omega \omega^3 \int_0^t dt' \tilde{c}_e(t') e^{-i(\omega - \omega_0)(t-t')} \quad (7.17)$$

上式积分的计算需要用到 Long-time limit 近似。由于积分

$$\int_{[\ ]}^{[\ ]} d(\omega) \omega^3 e^{-i(\omega - \omega_0)(t-t')} \quad (7.18)$$

是一个 Sharply peaked 的函数，函数值集中在  $t' = t$  处，因此有近似

$$\tilde{c}_e(t') \simeq \tilde{c}_e(t) \quad (7.19)$$

<sup>1</sup>这里用到一个 trick，假设  $\vec{k}$  的两个正交分量，我们取其中一个分量在 x-y 平面上，这样只需要计算另一个垂直分量就行了

同时积分区间可由  $[0, t]$  延拓到  $[0, +\infty]$  处。再利用主值积分<sup>2</sup>的结论

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t d(t') e^{-i(\omega - \omega_0)(t-t')} = \pi \delta(\omega_0 - \omega) + i\mathcal{P} \frac{1}{\omega_0 - \omega} \quad (7.20)$$

式 (7.17) 进一步简化为

$$\begin{aligned} \partial_t \tilde{c}_e &= - \left( \frac{d_{eg}^2 \omega_0^3}{6\pi^2 \epsilon_0 \hbar c^3} + i \frac{d_{eg}^2}{6\pi^2 \epsilon_0 \hbar c^3} \mathcal{P} \int_0^\infty d(\omega) \omega^3 \frac{1}{\omega_0 - \omega} \right) \tilde{c}_e(t) \\ &= - \left( \frac{\gamma}{2} + i\Delta\omega \right) \tilde{c}_e(t) \end{aligned} \quad (7.21)$$

其中，自发辐射速率由第一项表示

$$\gamma = \frac{d_{eg}^2 \omega_0^3}{3\hbar \epsilon_0 \pi c^3} = 2\pi \sum_{\vec{k}, \alpha} |g_{\vec{k}, \alpha}|^2 \delta(\omega_0 - \omega) \quad (7.22)$$

第二项

$$\Delta\omega = \frac{d_{eg}^2}{3\hbar \epsilon_0 \pi c^3} \mathcal{P} \int_0^\infty d(\omega) \omega^3 \frac{1}{\omega_0 - \omega} \quad (7.23)$$

在实际计算中，这一项表现与 a.c. Stark Shift 相似，在 Lab Frame 中产生一个振幅极小的额布局数振荡。一般而言，它的值足够小可以忽略，这一项的具体讨论将在主方程推导时给出。

---

<sup>2</sup>推导见附录，等时左边视为算符



# 第八章 Dissipation in Quantum Mechanics & Master Equation

## 8.1 Failure in Classical Treatment

我们讨论最简单的例子：Damped Oscillator

$$H = p^2/2m + m\omega^2 q^2/2 \quad (8.1)$$

以及正则方程

$$\begin{cases} \dot{q} = p/m \\ \dot{p} = -m\omega^2 q - \gamma p \end{cases} \quad (8.2)$$

$$(8.3)$$

注意到我们在第二式中唯象加入耗散力  $f = -\gamma p$ ，意图由此引入量子力学的耗散项，这样，我们有

$$\ddot{q} + \gamma\dot{q} + \omega^2 q = 0 \quad (8.4)$$

利用正则量子化条件

$$[q, p] = i\hbar \quad (8.5)$$

有

$$\frac{d}{dt}[q, p] = -\gamma[q, p] \quad (8.6)$$

这说明算符的对易关系会随时间演化

$$[q(t), p(t)] = e^{-\gamma t}[q(0), p(0)] = e^{-\gamma t}i\hbar \quad (8.7)$$

从而导致不确定关系随时间演化到 0:

$$\Delta q \Delta p \geq \frac{1}{2}\hbar e^{-\gamma t} \quad (8.8)$$

这样的结果是荒谬的，说明及经典理论无法正确引入量子力学的耗散项。

## 8.2 System Plus Reservoir Approach

类似经典统计力学，我们认为研究的量子系统与外界的热库 (Reservoir) 耦合，被热库热化 (Thermalize) 的过程也就是耗散发生的过程。我们考虑如下的 Hamiltonian

$$H = H_S + H_R + H_{SR} \quad (8.9)$$

我们考虑系统与环境构成的总 Hilbert 空间  $S \otimes R$

## 8.3 Quantum Non-Markovian Progress

## 第三部分

# Cavity Quantum Electrodynamics



## 第九章 Classical Optical Cavity

### 9.1 Basic Concept & Parameter

#### 9.1.1 Planar Cavity

对于平面腔，光在腔内完成一次 round trip 的时间为

$$t_{RT} = 1/\Delta\nu_{FSR} = 2nl/c \quad (9.1)$$

其中  $\Delta\nu_{FSR}$  为自由光谱程， $l$  为腔长， $n$  为折射率。

双镜的反射率分别为  $R_1$  和  $R_2$ ，一次 round trip 的光子耗散为

$$(1 - R_1)(1 - R_2) = \Delta N_{out}/N \quad (9.2)$$

由此可以定义只考虑腔由于光子泄漏而导致的寿命  $\tau_c$ 。

考虑多次 round trip 的透射效果总和，可以给出腔的透射率

$$\mathcal{T} = \frac{1}{1 + (4\mathcal{F}^2/\pi^2) \sin^2(\Phi/2)} \quad (9.3)$$

其中  $\Phi = 4\pi nl/\lambda$  是一次 round trip 的 phase shift， $\mathcal{F} = \pi(R_1 R_2)^{1/4}/(1 - (R_1 R_2)^{1/2})$  为腔的精细度 (finesse)，对于腔的透射谱，半高全宽  $\text{FWHM} = 2\pi/\mathcal{F}$ 。

腔的寿命：round trip 中，腔内光子损耗比率 (已取  $R_1 = R_2$ ) 为

$$-\frac{N}{\tau_c} := \frac{dN}{dt} = -\frac{(1 - R)N}{nl/c} \quad (9.4)$$

由此给出 cavity decay rate  $\kappa = 1/\tau_c = \frac{c(1-R)}{nl}$ 。

#### 9.1.2 Cavity Spectrum

光学 or 电动力学都导出了谐振腔的共振模式  $\omega_m = m\pi \frac{c}{nl}$ 。考虑到腔的有限寿命，腔内电场有如下形式

$$E_q(t) = E_q e^{i\omega_q t} e^{-t/2\tau_c} \quad (9.5)$$

利用傅里叶变换将变量转到频域 (frequency domain)

$$\begin{aligned} E_q(\nu) &= \int dt E_q e^{i2\pi\nu_q t} e^{-t/2\tau_c} \cdot e^{-i2\pi\nu t} \\ &= E_q \frac{1}{(2\tau_c)^{-1} + i2\pi(\nu - \nu_q)} \end{aligned} \quad (9.6)$$

取模方并归一化可以得到洛伦兹线型的谱线

$$\begin{aligned} S(\nu) &= \frac{1}{\tau_c} \frac{1}{(2\tau_c)^{-2} + 4\pi^2(\nu - \nu_q)^2} \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{\Delta\nu_c}{(\Delta\nu_c)^2 + 4(\nu - \nu_q)^2} \end{aligned} \quad (9.7)$$

其中半高全宽  $\Delta\nu_c = 1/2\pi\tau_c$

### 9.1.3 Cavity Spatial Mode

#### 9.1.3.1 General Recipe

在傍轴近似下，可以导出傍轴波动方程 (Paraxial Wave Equation, PWE)。此时可以设传播的电场为

$$E^{(+)} = \psi(\mathbf{r})e^{-ikz} \quad (9.8)$$

其中  $\psi(\mathbf{r})$  是对平面波的包络，在一个波长长度内变化需足够缓和 ( $\partial_z \psi \ll \psi/\lambda$ , i.e.  $\partial_z^2 \psi \ll k\partial_z \psi$ )。

将试探形式代入 Helmholtz 方程  $(\nabla^2 + k^2)E^{(+)}$ ，有

$$\begin{aligned} (\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2 - i2k\partial_z)\psi &\cong \\ (\partial_x^2 + \partial_y^2 - i2k\partial_z)\psi &= 0 \end{aligned} \quad (9.9)$$

从而得到 PWE:

$$(\nabla_{trans}^2 - i2k\partial_z)\psi = 0 \quad (9.10)$$

#### 9.1.3.2 Gaussian Beams

## 9.2 Classical Light Field in Atom-Cavity System

经典模型下处理原子和电磁场作用的思路是：将原子视为谐振子，原子核束缚电子，从而有了谐振子的本征频率  $\omega_0$

$$m\ddot{\mathbf{x}} + m\omega_0^2\mathbf{x} = 0 \quad (9.11)$$

其中， $\mathbf{x}$  代表电子与核之间的位矢。当外场作用于原子，原子会感应出相应的电偶极  $\mathbf{p} = -e\mathbf{x}$ ，再由辐射电磁场的结论可以计算原子激发的电场。

腔和自由空间的区别在于态密度的不同，腔内电场是由腔和原子以及入射场共同作用的结果。在弱激发的条件下，原子和腔内光场（稳态情况下，i.e. 腔模）的耦合很弱，原子能级与腔模交换光子的强度很弱，直接处理为腔内经典场与原子相互作用的思路仍然适用。

### 9.2.1 Classical Description of Light-Atom Interaction

#### 9.2.1.1 Free Space

首先要解决的问题是原子如何对外场响应。考虑入射场

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E^{(+)}(\mathbf{r})e^{-i\omega t} + \text{c.c} \quad (9.12)$$

引入偶极近似 (Dipole approximation): 假设原子的尺寸远小于电磁场的波长，从而认为电子感受到的电场即核处的电磁场。外场驱动下的电子运动满足:

$$m\ddot{\mathbf{x}} + m\omega_0^2\mathbf{x} = -\hat{\epsilon}eE_0^{(+)}e^{-i\omega t} \quad (9.13)$$



设试探解  $\mathbf{x}^{(+)}(t) = \hat{\epsilon}x_0^{(+)}e^{-i\omega t}$ , 回代式 (9.13) 有

$$x_0^{(+)} = \frac{eE_0^{(+)}/m}{\omega^2 - \omega_0^2} \quad (9.14)$$

从而电偶极矩  $\mathbf{p}^{(+)} = -e\mathbf{x}^{(+)}$ , 同时可以验证关系

$$\mathbf{p} = \alpha(\omega)\mathbf{E} \quad (9.15)$$

其中  $\alpha(\omega) = \frac{e^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2}$  定义为原子对外场响应的极化度 (Polarizability)。

再考虑 Damping 的影响, 则为 well-known 的 Lorentz 模型:

$$m\ddot{\mathbf{x}} + m\gamma\dot{\mathbf{x}} + m\omega_0^2\mathbf{x} = -\hat{\epsilon}eE_0^{(+)}e^{-i\omega t} \quad (9.16)$$

类似的有

$$\alpha(\omega) = \frac{e^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \quad (9.17)$$

由关系式  $\mathbf{P} = N\mathbf{p} = \epsilon_0\chi\mathbf{E}$ , 再定义 susceptibility

$$\chi(\omega) = \frac{Ne^2/m\epsilon_0}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \quad (9.18)$$

与之关联的可观测量为复折射率  $n(\omega) = \sqrt{1 + \chi(\omega)}$ , 弱激发下, 原子响应较弱

$$? \sim \approx \quad (9.19)$$



# 第十章 Cavity Quantum Electrodynamics



## 10.1 Quantized Cavity Mode

## 10.2 Jaynes–Cummings Model

# 第十一章 Quantum Langevin Equation



## 第十二章 Input-Output Formalism

---

光学量子主方程已经建立了量子力学中的 Markov 过程的定义，但是我们还没有建立与经典随机差分方程的 Counterpart。

### 12.1 Derivation of the Langevin Equation

我们考虑如下的哈密顿量

$$\begin{cases} H = H_{sys} + H_B + H_{int} \\ H_B = \hbar \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \omega b^\dagger(\omega) b(\omega) \\ H_{int} = i\hbar \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \kappa(\omega) [b^\dagger(\omega) c - c^\dagger b(\omega)] \end{cases} \quad (12.1)$$

我们研究一个系统和环境的玻色子库有交换，且玻色子库之间的模式满足关系  $[b(\omega), b^\dagger(\omega')] = \delta(\omega - \omega')$ 。其中相互作用项已经使用 RWA，需要说明的是，原始的相互作用哈密顿量为

$$H_{int} = i\hbar \int_0^{+\infty} d\omega \kappa(\omega) [b^\dagger(\omega) + b(\omega)] [c - c^\dagger] \quad (12.2)$$

当我们用 RWA 舍去高频项后，我们关注诸如  $e^{i(\omega - \Omega)t}$  振荡项的近共振情况，作为近似，可以将积分的下界延拓至  $-\infty$ 。

我们对玻色子库算符使用 Heisenberg 方程，得到

$$\dot{b}(\omega) = -i\omega b(\omega) + \kappa(\omega) c \quad (12.3)$$

以及系统中任意算符满足

$$\dot{a} = -\frac{i}{\hbar} [a, H_{sys}] + \int d\omega \kappa(\omega) \{ b^\dagger(\omega) [a, c] - [a, c^\dagger] b(\omega) \} \quad (12.4)$$

其中，式 (12.3) 可解得

$$b(\omega) = e^{-i\omega(t-t_0)} b_0(\omega) + \kappa(\omega) \int_{t_0}^t e^{-i\omega(t-t')} c(t') dt' \quad (12.5)$$

回代至式 (12.4) 可得

$$\begin{aligned} \dot{a} = & -\frac{i}{\hbar} [a, H_{sys}] \\ & + \int d\omega \kappa(\omega) \left\{ e^{i\omega(t-t_0)} b_0^\dagger(\omega) [a, c] - [a, c^\dagger] e^{-i\omega(t-t_0)} b_0(\omega) \right\} \\ & + \int d\omega |\kappa(\omega)|^2 \int_{t_0}^t dt' \left\{ e^{i\omega(t-t')} c^\dagger [a, c] - [a, c^\dagger] e^{-i\omega(t-t')} c(t') \right\} \end{aligned} \quad (12.6)$$

接下来我们讨论使用的各种近似。

**Markov 近似：** 与之前相同，我们将耦合系数写为与频率无关的形式

$$\kappa(\omega) = \sqrt{\gamma/2\pi} \quad (12.7)$$

我们定义玻色子库输入场算符为

$$b_{in}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\omega e^{i\omega(t-t_0)} b_0(\omega) \quad (12.8)$$

时域上的产生湮灭算符仍然满足

$$\left[ b_{in}(t), b_{in}^\dagger(t') \right] = \delta(t - t') \quad (12.9)$$

再利用

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{-i\omega(t-t')} = 2\pi\delta(t-t') \quad (12.10)$$

和

$$\int_{t_0}^t c(t')\delta(t-t')dt' = c(t)/2 \quad (12.11)$$

代入式 (12.6), 我们得到 Quantum Langevin 方程

$$\dot{a} = -\frac{i}{\hbar} [a, H_{sys}] - [a, c^\dagger] [\gamma c/2 + \sqrt{\gamma} b_{in}(t)] + [\gamma c^\dagger/2 + \sqrt{\gamma} b_{in}^\dagger(t)] [a, c] \quad (12.12)$$

需要注意的是, 式 (12.12) 中的后两项 Noise Terms 中, 我们定义  $b_0(\omega)$  为  $b(\omega)$  在  $t = t_0$  时候的值, 我们可以将  $t_0$  取在系统和玻色子库之间还无耦合的时间点上。对式 (12.3) 积分, 有

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\omega b(\omega) = b_{in}(t) + \sqrt{\gamma} c(t)/2 \quad (12.13)$$

由于  $b(\omega)$  与系统算符对易, 因此,  $b_{in}(t) + \sqrt{\gamma} c(t)/2$  也和系统算符对易, 这个性质已经体现在上述推导中了。

若我们考虑  $t_1 > t$ , 类似于式 (12.5) 的推导, 数学上有

$$b(\omega) = e^{-i\omega(t-t_1)} b_1(\omega) - \kappa(\omega) \int_t^{t_1} e^{-i\omega(t-t')} c(t') dt' \quad (12.14)$$

类似的, 可以定义输出场

$$b_{out} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\omega e^{-i\omega(t-t_1)} b_1(\omega) \quad (12.15)$$

重复之前的近似假设以及计算过程, 可以得到包含输出场形式的 Langevin 方程

$$\dot{a} = -\frac{i}{\hbar} [a, H_{sys}] - [a, c^\dagger] [\gamma c/2 - \sqrt{\gamma} b_{out}(t)] - [\gamma c^\dagger/2 - \sqrt{\gamma} b_{out}^\dagger(t)] [a, c] \quad (12.16)$$

以及类似 (12.13) 的表达式

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\omega b(\omega) = b_{out}(t) - \sqrt{\gamma} c(t)/2 \quad (12.17)$$

式 (12.13) 和 (12.17) 联立, 有

$$b_{out}(t) - b_{in}(t) = \sqrt{\gamma} c(t) \quad (12.18)$$

## 第十三章 版本更新历史

---

根据用户的反馈，我们不断修正和完善模板。截止到此次更新，ElegantBook 模板在 GitHub 上有将近 100 次提交，正式发行版本 (release) 有 16 次。

---

**2020/02/10** 更新：版本 3.10 正式发布

- ① 增加数学字体选项 `math`，可选项为 `newtx` 和 `cm`。  
**重要提示：**原先通过 `newtxmath` 宏包设置的数学字体改为 L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X 默认数学字体，如果保持原来的字体，需要显式声明数学字体 (`math=newtx`)；
- ② 新增中文字体选项 `chinesefont`，可选项为 `ctexfont`、`founder` 和 `nofont`。
- ③ 将封面作者信息设置为可选，并且增加自定义信息命令 `\bioinfo`；
- ④ 在说明文档中增加版本历史，新增 `\datechange` 命令和 `change` 环境；
- ⑤ 增加汉化章节选项 `scheme`，可选项为汉化 `chinese`；
- ⑥ 由于 `\lvert` 问题已经修复，重新调整 `ctex` 宏包和 `amsmath` 宏包位置。
- ⑦ 修改页眉设置，去除了 `\lastpage` 以避免 page anchor 问题，加入 `\frontmatter`。
- ⑧ 修改参考文献选项 `cite`，可选项为数字 `numbers`、作者-年份 `authoryear` 以及上标 `super`。
- ⑨ 新增参考文献样式选项 `bibstyle`，并将英文模式下参考文献样式 `apalike` 设置为默认值，中文仍然使用 `gbt7714` 宏包设置。

---

**2019/08/18** 更新：版本 3.09 正式发布

- ① 由于 `\elegantpar` 存在问题，暂时性删除 `\elegantpar` 命令，并提示用户改用 `\marginnote` 和 `\marginpar` 旁注/边注命令。
- ② 积分操作符统一更改为 `esint` 宏包设置；
- ③ 新增目录选项 `toc`，可选项为单栏 `onecol` 和双栏 `twocol`；
- ④ 手动增加参考文献选项 `cite`，可选项为上标形式 `super`；
- ⑤ 修正章节习题 (`problemset`) 环境。



## 参考文献

---

- [1] LI Q, CHEN L, ZENG Y. The Mechanism and Effectiveness of Credit Scoring of P2P Lending Platform: Evidence from Renrendai.com[J]. China Finance Review International, 2018, 8(3):256-274.
- [2] CARLSTROM C T, FUERST T S. Agency Costs, Net Worth, and Business Fluctuations: A Computable General Equilibrium Analysis[J]. The American Economic Review, 1997:893-910.
- [3] QUADRINI V. Financial Frictions in Macroeconomic Fluctuations[J]. FRB Richmond Economic Quarterly, 2011, 97(3):209-254.
- [4] 方军雄. 所有制、制度环境与信贷资金配置[J]. 经济研究, 2007(12):82-92.
- [5] 刘凤良, 章潇萌, 于泽. 高投资、结构失衡与价格指数二元分化[J]. 金融研究, 2017(02):54-69.
- [6] 吕捷, 王高望. CPI 与 PPI “背离” 的结构性解释[J]. 经济研究, 2015, 50(04):136-149.

## 附录 A 测试区

附录  $d_s^2 E_0 + 2ikd_s E_0 + iE_0 d_s k = -\frac{2d_{eff}^2}{\omega} SHG c^2 E_F^2 e^{i \int_0^\theta \Delta k(\theta') r d\theta'}$  本包括了计量经济学中用到的一些基本数学，我们扼要论述了求和算子的各种性质，研究了线性和某些非线性方程的性质，并复习了比例和百分数。我们还介绍了一些在应用计量经济学中常见的特殊函数，包括二次函数和自然对数，前 4 节只要求基本的代数技巧，第 5 节则对微分学进行了简要回顾；虽然要理解本书的大部分内容，微积分并非必需，但在一些章末附录和第 3 篇某些高深专题中，我们还是用到了微积分。

### A.1 Computing Commutators

1. Glauber 公式：若  $[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0$ ，则

$$e^{A+B} = e^{-[A,B]/2} e^A e^B \quad (\text{A.1})$$

2. Baker-Hausdorff 公式：

$$e^A B e^{-A} = B + [A, B]/1! + [A, [A, B]]/2! + [A, [A, [A, B]]]/3! + \dots \quad (\text{A.2})$$

3. 若  $[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0$ ，则

$$[A, f(B)] = [A, B] \frac{\partial f(B)}{\partial B} \quad (\text{A.3})$$

4. 特别的，对于  $[a, a^\dagger] = 1$ ，有

$$[a^\dagger, f(a)] = -\frac{\partial f(a)}{\partial a} \quad (\text{A.4})$$

$$[a, f(a^\dagger)] = \frac{\partial f(a^\dagger)}{\partial a^\dagger} \quad (\text{A.5})$$