

中国科学技术大学
2021-2022 学年实变函数期末考试试卷

所在院系 _____ 姓名 _____ 学号 _____

注意：请将所有答案写在题后空白处。所有题目的解答要有详细过程，其中使用的定理或命题需要注明。

1. 概念题 (20 分, 每小题 5 分)

- (a). 叙述 Lusin 定理 (提示: 关于可测函数和连续性的那个定理);
- (b). 叙述控制收敛定理;
- (c). 设 f 是 \mathbb{R}^d 上定义的有限值可测函数, 叙述 f 的极大函数的定义;
- (d). 叙述 $[a, b]$ 上定义的绝对连续函数的定义。

2. (20 分, 每小题 5 分) 通过分别构造具体的定义在 \mathbb{R} 上的实值函数列来说明以下的命题:

- (a). L^1 收敛不保证几乎处处收敛;
- (b). L^3 收敛不保证 L^2 收敛;
- (c). 依测度收敛不保证 L^1 收敛;
- (d). 依测度收敛不保证几乎处处收敛。

3. (10 分) 设 $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ 有连续的导数。问 f 是不是有界变差函数? 为什么?

4. (15 分) 设 B 是 \mathbb{R}^d 中的单位球, $f_n : B \rightarrow \mathbb{R}$ 是一列可测函数, 而且满足 (a). f_n 几乎处处收敛于函数 f ; (b). $\|f_n\|_{L^2(B)} \leq 1$ 对于任何的 n ; 求证:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_B f_n = \int_B f.$$

5. (15分) 设 f_n 是定义在 $[a, b]$ 上的单调增的绝对连续函数。如果函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ 在 $[a, b]$ 上点点收敛于 f , 求证: f 也是绝对连续的。

6. (15分) 设 $\phi \in L^1(\mathbb{R}^d)$, 而且 $\int_{\mathbb{R}^d} \phi = 1$, 对于任何 $t > 0$, 定义 $\phi_t(x) = t^{-d} \phi(\frac{x}{t})$.
- (a). 若 f 是有紧支集的连续函数, 求证: 当 $t \rightarrow 0$ 时, $f * \phi_t$ 一致收敛于 f ; (10分)
- (b). 若 $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, 求证: $\lim_{t \rightarrow 0} \|f * \phi_t - f\|_{L^1} = 0$ (5分)。

7. (5分) 设 E 是 \mathbb{R} 上指定的零测度集合, 证明存在一个单调的函数 f , 使得 f 在集合 E 上不可导。