

2022 年博士资格考试 代数学

考试时间：2022 年 9 月 17 日 14:30-17:30

1. (40 分) 设 A 是加法群 \mathbb{Z}^3 中由 $(2, 2, 4), (1, 3, -2), (1, -1, 6)$ 生成的子群,

$A = \mathbb{Z}^3/H$, $R = \text{End}_{\mathbb{Z}}(A)$ 。

- (1) 化 A 为标准形。
- (2) 是否存在 \mathbb{Z}^3 的子群 U , 使得 $\mathbb{Z}^3 = H \oplus U$?
- (3) R 是否为交换环 ?
- (4) R 是否为诺特环 ? 是否为阿廷环 ?

2. (50 分) 考虑 3 阶循环群 $G = \langle g \mid g^3 = 1 \rangle$ 的群代数。

- (1) 构造 $\mathbb{C}[G]$ 到 $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ 的代数同构。
- (2) 给出 $\mathbb{Q}[G]$ 上的所有单模。
- (3) 给出 $\mathbb{F}_2[G]$ 上的所有单模。
- (4) $\mathbb{Q}[G]$ 与 $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ 是否代数同构 ? $\mathbb{F}_2[G]$ 与 $\mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2$ 是否代数同构 ?
- (5) 给出 $\mathbb{F}_3[G]$ 上的所有单模。

3. (5 分) 设 $m, n \geq 1$, $\theta: M_n(\mathbb{Q}) \longrightarrow M_m(\mathbb{Q})$ 是么代数同态。证明: θ 是单射。

4. (5 分) 设有限群 G 作用在 X 上, p 是 $|G|$ 最小的素因子, $|X| < p$ 。证明: 这个作用是平凡的。