2021 春复分析(H)期中

授课教师：李皓昭 时间：2 小时 30 分钟

一、 计算题（20 分）

（1） 求$\mathrm{Log}\frac{z-1}{z-2}$各单值分支$|z|>2$中的 Laurent 展开

（2） 计算

$$\int_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{z^{10}}{(z^5+1)^2(z+2)}dz$$

二、 (10 分)是否存在$\mathbb{D}$上的调和函数，但它不是全纯函数的实部？请详细说明理由。

三、 (10 分)

（1） 叙述四个点z_1,z_2,z_3,z_4交比的定义

（2） 利用分式线性变换将广义圆周映为广义圆周证明：四个点z_1,z_2,z_3,z_4共圆当且仅当

$$Im(z_1,z_2,z_3,z_4)=0$$

四、 (10 分)

（1） 设$F(z)=\sqrt[3]{z^2(1-z)}, D=\mathbb{C}\backslash[0,1]$。$\gamma$是$D$内任一简单闭曲线，证明$\Delta_\gamma F(z)=0$，因此$F$可以在$D$内取出全纯的单值分支。(要有详细计算，不得直接套用课上相关结论)

（2） 设$f(z)$是$F(z)$在$(0,1)$上方极限为正值的单值分支，计算$f(-2), f'(-2)$。

五、 (10 分)设f在$\mathbb{C}_\infty$上亚纯，其极点只有$z=1, z=2$和$z=\infty$。若f在这三个极点处的 Laurent 展开式的主要部分分别为$\frac{1}{z-1}, \frac{1}{z-2}+\frac{1}{(z-2)^2}$和$z+z^2$，并且$f(0)=0$，求$f(z)$。

六、 (10 分)设$f \in H\big(B(0,1)\big)$，$f(0)=0$，$f\big(B(0,1)\big) \subset B(0,1)$。证明：若存在$z_1, z_2 \in B(0,1)$，使得$z_1 \neq z_2, |z_1| = |z_2|, f(z_1) = f(z_2)$，则

$$|f(z_1)| = |f(z_2)| \leq |z_1|^2 \leq |z_2|^2$$

七、 (15 分)

（1） 叙述有界区域上全纯函数的最大模原理；

（2） 设$\mathbb{H}$为上半平面，f在$\mathbb{H}$上全纯有界，且在$\overline{\mathbb{H}}$上连续。若$\sup\limits_{z\in\partial\mathbb{H}}|f(z)| \leq 1$，利用有界区域上全纯函数的最大模原理证明：

$$\sup_{z\in\mathbb{H}}|f(z)| \leq 1$$

八、 (15 分)

（1） 设γ为简单闭曲线，f, g在γ上连续，在γ内全纯，且f在γ上无零点。设f在γ内全部零点为$z_1, z_2, \dots, z_n$，其中没有相同的，且相应零点的重数为$k_1, k_2, \dots, k_n$。证明：

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma g(z)\frac{f'(z)}{f(z)}dz = k_1 g(z_1) + k_2 g(z_2) + \cdots + k_n g(z_n)$$

（2） 设$D = \{z \,|\, |z-a| < R\}$，$f$在包含$D$的区域$U$上全纯单叶。设$\Omega = f(D)$，$f$在$\Omega$上的反函数为$f^{-1}(w)$。证明：

$$f^{-1}(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=R}\frac{zf'(z)}{f(z)-w}dz, \forall w \in \Omega$$

（题目为回忆版，叙述和条件可能会有出入）