中国科学技术大学
2020–2021学年第2学期期末试卷

课程名称：概率论　日期：2021年7月11日　开课院系：数学科学学院

姓名：____________学号：____________

题号	1	2	3	4	5	6	7	总分
分数								

1. (15分) 设$\{X_k : 1 \le k \le n\}$独立同分布且方差有限的随机变量列, 记

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k,$$

求协方差$\mathrm{Cov}(\overline{X}, X_k - \overline{X})$.

2. (15分) (X, Y) 联合密度为

$$f(x,y) = cx(y-x)e^{-y},\ 0 \le x \le y < \infty.$$

求常数c, 条件密度$f_{X|Y}(x|y)$与条件期望$\mathbb{E}(Y|X)$.

3. (15分) 设U, V为独立地均匀地取自n维单位超立方体上两点，X_n表示两点欧氏距离. 证明

$$\mathbb{E}(X_n)/\sqrt{n} \to 1/\sqrt{6}, \quad n \to \infty.$$

4. (15分) 设$\{X_k\}$相互独立且服从指数分布, $\mathbb{E}(X_k) = \mu_k$. 证明若

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\max\{\mu_1, \dots, \mu_n\}}{\sum_{k=1}^{n} \mu_k} = 0,$$

则

$$\frac{1}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} \mu_k^2}} \sum_{k=1}^{n} (X_k - \mu_k) \xrightarrow{\mathrm{D}} N(0,1).$$

5. (15分) 对所有取正整数值的随机变量X，若给定$\mathbb{E}(X) = 1/p$ $(p \in (0,1))$, 问何时X的熵最大? 并求最大熵.

6. (10分) 对某概率空间上随机变量X, X_n 和N_k，其中N_k服从参数为正整数k的Poisson分布. 若$X_n \xrightarrow{\mathrm{D}} X$ 且$\{X_n\}$与N_k 独立, 试证明

$$X_{N_k} \xrightarrow{\mathrm{D}} X, \quad k \to \infty.$$

7. (15分) 高斯随机矩阵定义为$A_n = (a_{ij}^{(n)})_{i,j=1}^{2}$, 其中$\{a_{ij}^{(n)} : 1 \le i, j \le 2, n = 1, 2, \dots\}$ 为独立同标准正态分布随机变量列. $|\mathbf{x}|$表示2维列向量$\mathbf{x}$的标准欧氏范数，试回答

(i) 若非零随机向量$\mathbf{x}$(可能退化为一固定向量)与A_1独立, 则$|A_1\mathbf{x}|$与$\mathbf{x}$独立;

(ii)任给非零2维向量$\mathbf{x}$, 试证明

$$\frac{1}{n}\log\left(\frac{|A_n A_{n-1}\cdots A_1\mathbf{x}|}{|\mathbf{x}|}\right)$$

的极限存在且与$\mathbf{x}$无关(不必求出精确的值).