

中国科学技术大学数学科学学院  
2020~2021 学年第 2 学期考试试卷 A 卷

课程名称: 线性代数 A1 课程代码: MATH1004

开课院系: 数学科学学院 考试形式: 闭卷

姓名: \_\_\_\_\_ 学号: \_\_\_\_\_ 专业: \_\_\_\_\_

题号	1~6	7	8	9	10	总分
得分						

说明: 1. 若某题有 a、b 两个版本, 则选择其中 1 个版本, 多做不得分.  
2. 不得使用计算器等电子设备.

一、简答题. 每小题 6 分, 共 36 分. 需简要说明理由或举出例子, 结果需化简.

1. 写出一个 2 阶实方阵  $A$ , 满足  $A^4 - A^2 + I = O$ .
2. 已知复方阵  $A$  的特征多项式为  $x^4 + x^3 + 1$ . 写出  $A^3$  的特征多项式.
3. 已知复方阵  $A$  的 Jordan 标准形为  $J_{2021}(0)$ . 写出  $A^{100}$  的 Jordan 标准形.
4. 对于任意复方阵  $A$ , 是否一定存在复方阵  $B$ , 使得  $B^2 = A$ ?
5. 若  $n$  阶复方阵  $A, B$  都可以相似成对角阵, 则  $AB$  是否一定可以相似成对角阵?
6. 若  $n$  阶复方阵  $A, B$  满足对于任意  $x \in \mathbb{C}$  和  $k \in \mathbb{N}$  都有  $\text{rank}(xI - A^k) = \text{rank}(xI - B^k)$ , 则  $A$  与  $B$  是否一定相似?

(装订线内不要答题)

二、解答题. 每小题 16 分, 共 64 分. 需给出详细解答和证明过程.

7. 设复方阵  $A, B$  的特征多项式都等于其最小多项式, 即  $\varphi_A = d_A$ ,  $\varphi_B = d_B$ . 证明: 当且仅当  $\varphi_B$  整除  $\varphi_A$  时, 存在列满秩矩阵  $P$  使得  $AP = PB$ .

8. 设  $m, n$  是正整数, 映射  $f: \mathbb{C}^{m \times m} \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$  满足: 对于任意  $X, Y \in \mathbb{C}^{m \times m}$  和  $\lambda \in \mathbb{C}$ , 有  $f(X + Y) = f(X) + f(Y)$ ,  $f(\lambda X) = \lambda f(X)$ ,  $f(XY) = f(X)f(Y)$ ,  $f(I_m) = I_n$ . 证明:  $f$  是单射并且  $m$  整除  $n$ .

9a. (1) 把实方阵  $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$  表示成  $A = QR$  的形式, 其中  $Q$  是正交方阵,  $R$  是上三角方阵,  $R$  的对角元素都是正数. (2) 证明上述表示方式是唯一的.

9b. 设  $m, n$  是正整数,  $f(x) = \prod_{i=1}^m (x - u_i)$  和  $g(x) = \prod_{j=1}^n (x - v_j)$  是给定的复系数多项式,  $V$  是次数  $\leq m + n - 1$  的复系数多项式全体构成的复线性空间,  $V$  上的线性变换  $\rho: x^i \mapsto x^i g(x), x^{m+j} \mapsto x^j f(x), \forall i = 0, 1, \dots, m-1, j = 0, 1, \dots, n-1$ .

(1) 求  $\rho$  在  $V$  的基  $x^{m+n-1}, \dots, x, 1$  下的矩阵  $A$ . (2) 证明:  $\det(A) = \prod_{i,j} (u_i - v_j)$ .

- 10a. 设实二次型 $Q(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + ax_2x_3$ .  
(1) 求 $a = 0$ 时 $Q$ 的相合标准形. (2) 求所有实数 $a$ 使得 $Q$ 是正定的.
- 10b. 设 $\mathcal{A}$ 是线性空间 $V$ 上的线性变换,  $U_1, U_2, U_3$ 分别是 $\alpha, \beta, \alpha + \beta \in V$ 生成的 $\mathcal{A}$ 循环子空间. 证明: 若 $\alpha, \beta$ 相对于 $\mathcal{A}$ 的最小多项式 $d_\alpha, d_\beta$ 互素, 则 $U_3 = U_1 \oplus U_2$ .

## 参考答案与评分标准

1.  $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$       2.  $x^4 + (x+1)^3$       3.  $\text{diag}\left(\underbrace{J_{21}(0), \dots, J_{21}(0)}_{21 \text{ 个}}, \underbrace{J_{20}(0), \dots, J_{20}(0)}_{79 \text{ 个}}\right)$

4. 不一定. 例如:  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  不是任何矩阵的平方.

5. 不一定. 例如:  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  不可相似成对角.

6. 不一定. 例如:  $A = \text{diag}(J_3(1), 1)$  与  $B = \text{diag}(J_2(1), J_2(1))$  不相似. 设  $k \geq 1$ .

$A^k$  与  $A$  相似,  $B^k$  与  $B$  相似. 当  $x \neq 1$  时,  $\text{rank}(xI - A^k) = \text{rank}(xI - B^k) = 4$ .

当  $x = 1$  时,  $\text{rank}(xI - A^k) = \text{rank}(xI - B^k) = 2$ .

7. 充分性: 设  $\alpha$  使得  $d_{A,\alpha} = d_A = \varphi_A$ , 则  $\beta = \frac{\varphi_A}{\varphi_B}(A)\alpha$  满足  $d_{A,\beta} = \varphi_B$ . (4分)

设  $P_1 = (\beta, A\beta, \dots, A^{k-1}\beta)$ ,  $k = \deg(\varphi_B)$ , 则  $\text{rank}(P_1) = k$ ,  $AP_1 = P_1C$ , (4分)

其中  $C$  是  $\varphi_B$  的友方阵. 设  $B = P_2CP_2^{-1}$ , 则  $P = P_1P_2^{-1}$  满足要求. (4分)

必要性: 设可逆方阵  $Q = (P^*)$ . 由  $AQ = Q \begin{pmatrix} B & * \\ 0 & C \end{pmatrix}$ , 得  $\varphi_B$  整除  $\varphi_A = \varphi_B\varphi_C$ . (4分)

8. 假设存在  $A \neq O$  使  $f(A) = O$ . 对任意  $i, j$ , 存在  $P, Q \in \mathbb{C}^{m \times m}$  使  $E_{ij} = PAQ$ . (4分)

故所有  $f(E_{ij}) = O$ , 与  $f(I_m) = I_n$  矛盾. 因此,  $f$  是单射. (4分)

记  $A_i = f(E_{ii})$ . 由所有  $E_{ii}$  相似、幂等, 得所有  $A_i$  相似、幂等. (4分)

故  $\text{tr}(A_i) = \text{rank}(A_i)$  是常数, 记作  $r$ . 因此,  $n = \sum \text{tr}(A_i) = mr$ , (4分)

9a. (1) 计算过程略. 得  $Q = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{14}} & \frac{-1}{\sqrt{21}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{3}{\sqrt{14}} & \frac{-2}{\sqrt{21}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{14}} & \frac{4}{\sqrt{21}} \end{pmatrix}$ ,  $R = \begin{pmatrix} \sqrt{6} & \frac{3\sqrt{6}}{2} & \sqrt{6} \\ 0 & \frac{\sqrt{14}}{2} & \frac{2\sqrt{14}}{7} \\ 0 & 0 & \frac{3\sqrt{21}}{7} \end{pmatrix}$ . (12分)

(2) 若  $A = Q_1R_1 = Q_2R_2$ , 则  $Q_2^{-1}Q_1 = R_2R_1^{-1}$  是上三角的正交阵, 进而是单位阵. (4分)

9b. (1) 设  $f(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i$ ,  $g(x) = \sum_{j=0}^n b_j x^j$ , 则  $A = \begin{pmatrix} a_m & & & b_n & & \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \ddots & \\ \vdots & & a_m & \vdots & & b_n \\ a_0 & & \vdots & b_0 & & \vdots \\ & \ddots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & a_0 & & & b_0 \end{pmatrix}$ . (6分)

(2)  $WA = \begin{pmatrix} O & U \\ V & O \end{pmatrix}$ , 其中  $U = \begin{pmatrix} g(u_1) & & \\ & \ddots & \\ & & g(u_m) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^{m-1} & \cdots & u_1 & 1 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ u_m^{m-1} & \cdots & u_m & 1 \end{pmatrix}$ ,

$V = \begin{pmatrix} f(v_1) & & \\ & \ddots & \\ & & f(v_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^{n-1} & \cdots & v_1 & 1 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ v_n^{n-1} & \cdots & v_n & 1 \end{pmatrix}$ ,  $W = \begin{pmatrix} u_1^{m+n-1} & \cdots & u_1 & 1 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ u_m^{m+n-1} & \cdots & u_m & 1 \\ v_1^{m+n-1} & \cdots & v_1 & 1 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ v_n^{m+n-1} & \cdots & v_n & 1 \end{pmatrix}$ . (6分)

$\det(A) = \frac{(-1)^{mn} \det(U) \det(V)}{\det(W)} = \frac{\prod_i g(u_i) \prod_j f(v_j) \prod_{i < j} (u_j - u_i) \prod_{i < j} (v_j - v_i)}{\prod_{i < j} (u_j - u_i) \prod_{i, j} (v_j - u_i) \prod_{i < j} (v_j - v_i)} = \prod_{i, j} (u_i - v_j)$ . (4分)

10a. (1)  $Q = x_2^2 + x_3^2 + x_1(x_2 + x_3) = (\frac{1}{2}x_1 + x_2)^2 + (\frac{1}{2}x_1 + x_3)^2 - \frac{1}{2}x_1^2 = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$ . (6分)

(2)  $Q = x^T A x$ , 其中  $A = \begin{pmatrix} a & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{a}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{a}{2} & 1 \end{pmatrix}$ .  $Q$  是正定的  $\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ a - \frac{1}{4} > 0 \\ -\frac{1}{4}a^3 + \frac{5}{4}a - \frac{1}{2} > 0 \end{cases}$  (6分)

解得  $\sqrt{2} - 1 < a < 2$ . (4分)

10b. 根据 Bezout 定理, 存在多项式  $u, v$  使得  $ud_\alpha + vd_\beta = \gcd(d_\alpha, d_\beta) = 1$ . (4分)

设  $\gamma \in U_1 \cap U_2$ , 则  $d_\alpha(\mathcal{A})\gamma = d_\beta(\mathcal{A})\gamma = 0$ , 得  $\gamma = 0$ . (4分)

由  $\alpha = v(\mathcal{A})d_\beta(\mathcal{A})\alpha = v(\mathcal{A})d_\beta(\mathcal{A})(\alpha + \beta) \in U_3$ , 得  $U_1 \subset U_3$ . 同理  $U_2 \subset U_3$ . (4分)

显然,  $U_3 \subset U_1 + U_2$ . 综上,  $U_3 = U_1 \oplus U_2$ . (4分)