

中国科学技术大学期末试卷
2021-2022 学年第一学期 A 卷

课程名称: 代数拓扑 课程编号: MATH5004P

考试时间: _____ 考试形式: 闭卷

学生姓名: _____ 学 号: _____

1. (30 分) 填空:

(a) 求同调群 $H_1(M_g, \mathbb{Z}) =$ _____;

(b) G 为交换群, 求同调群 $\tilde{H}_k(S^n, G) =$ _____;

(c) 求同调群 $H_3(\mathbb{R}P^5 \vee S^3, \mathbb{Z}) =$ _____;

(d) 求上同调群 $H^1(N_g, \mathbb{Z}) =$ _____;

(e) 求上同调环 $H^*(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2) =$ _____;

(f) 求上同调环 $H^*(T^6, \mathbb{Z}) =$ _____;

(g) M 为 7 维闭流型, 求其欧拉示性数 $\chi(M) =$ _____;

(h) $n \geq 3$, $f: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为嵌入映射, $X = \mathbb{R}^n \setminus f(S^1)$, $H_{n-2}(X, \mathbb{Z}) =$ _____;

(i) 找两个拓扑空间, 其上同调群相同, 但其环结构不同: _____;

(j) M 为 n 维连通闭流型, 求 $H_n(M - \{x\})$ _____;

2. (10 分) 证明: 若非空开集 $U \subset \mathbb{R}^n$ 和 $V \subset \mathbb{R}^m$ 同胚, 则 $m = n$.



3. (10 分) 设 X 为把射影平面的两个不同点等同得到的拓扑空间。构造一个 X 的 CW 复型结构并利用这个 CW 复型结构求 X 的同调群。

4. (10 分) 证明: 设 $k, l > 0$, $S^{2k+2l} \rightarrow CP^k \times CP^l$ 诱导了平凡的映射

$$H_{2k+2l}(S^{2k+2l}) \rightarrow H_{2k+2l}(CP^k \times CP^l).$$



5. (10分) 证明: 连续映射 $f: \mathbb{R}P^{2n} \rightarrow \mathbb{R}P^{2n}$ 有不动点。

6. (10分) G 为交换群, 若 A 是 X 的收缩 (retract), 证明: $H^n(X; G) \cong H^n(A; G) \oplus H^n(X, A; G)$.



7. (10分) 若 F 是域, 证明: $H^k(X, F) = \text{Hom}_F(H_k(X, F), F)$.

8. (10分) 证明带边界的紧流型不能收缩到它的边界。

