

# 中国科学技术大学 2020 春季学期复分析期中考试

2020 年 4 月 29 日

本试卷共六个大题。考试时间为 9:45-12:30. 请在答题纸上写上姓名、班级、学号。

一 (15 分) 考虑函数  $f(z) = \frac{z}{(z-2i)(z-1)}$ ,  $z \neq 2i, z \neq 1$ .

1. 分别给出  $f(z)$  在如下三个区域的 Laurent 展开:

i)  $|z| < 1$     ii)  $1 < |z| < 2$     iii)  $|z| > 2$

2. 计算积分:

i)  $I_1 = \oint_{|z|=\frac{3}{2}} f(z) dz$     ii)  $I_2 = \oint_{|z|=\frac{5}{2}} f(z) dz$

二 (20 分) 考虑如下问题:

1. 叙述区域上解析函数的最大模原理。

2. 叙述孤立奇点的定义。

3. 若点  $a$  是函数  $f(z)$  的一个极点, 则  $a$  可能是  $e^{f(z)}$  的什么类型的奇点? 说明理由。

4. 考虑函数  $f(z) = z/(e^z - 1)$ ,  $z \neq 2k\pi i$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ). 试问 0 和  $2\pi i$  分别为  $f(z)$  的什么类型的奇点。说明理由。

5. 求方程  $z^8 - 4z^5 + z^2 - 1 = 0$  在圆环  $1 < |z| < 2$  内的解的个数。说明理由。

三 (10 分) 设  $D$  为区域。考虑如下问题:

1. 设  $f$  为  $D$  上的单叶解析函数。试证明:  $\forall z \in D$ , 成立  $f'(z) \neq 0$ 。

2. 设  $f$  为  $D$  上的解析函数。如果  $\forall z \in D$ , 有  $f'(z) \neq 0$ , 试问  $f$  是否为  $D$  上的单叶解析函数? 如果是则给出证明, 否则请举例说明。

四 (15 分) 1. 叙述 Schwarz 引理。

2. 记  $D$  为单位圆盘  $B(0, 1)$ . 试用 Schwarz 引理证明如下结论: 若  $f$  为  $D$  上的单叶解析函数, 且满足  $f(D) = D$ ,  $f(0) = 0$ , 及  $\arg f'(0) = \alpha$ , 则  $f(z) = e^{i\alpha}z, \forall z \in D$ .

五 (25 分) 计算如下积分:

1.  $\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{z^{-4}}{e^z - 1} dz$     2.  $\int_0^{+\infty} \frac{(\log x)^2}{1+x^2} dx$

六 (15 分) 设  $D$  为区域,  $(f_n(z))_{n \geq 1}$  为  $D$  上的一个解析函数族 (即每个  $f_n(z)$  为  $D$  上的解析函数)。假设  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$  在  $D$  上收敛到  $S(z)$ , 并且在  $D$  的任意紧子集上一致收敛。证明:  $S(z)$  为  $D$  上的解析函数, 并且  $\forall k \geq 1, \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z)$  在  $D$  上收敛到  $S^{(k)}(z)$ , 且在  $D$  的任意紧子集上一致收敛。