2020年夏令营考试

分析学

2020年7月21日

1、正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛。证明：存在收敛的正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$使$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b_n}{a_n} = +\infty$.

2、设$\pi = \dfrac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}$. 证明$\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_0^{\pi} \dfrac{q^n}{n!} x^n (\pi - x)^n \sin x dx$是整数.

3. 设区域$D := \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$, $f \in C^2(D)$满足$\Delta f(x, y) + \sqrt{x^2 + y^2} = 0 \text{ in } D$. 计算积分$\int\int_D x\partial_x f + y\partial_y f dxdy$.

4. 设$f \in C^2(\mathbb{R})$, $f(x+1) = f(x)$, $f(0) = 0$, $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f''(x)| = 1$. 证明:$\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.

5. 设$f \in L^1(\mathbb{R}^d)$且对几乎处处大于0。若有可测集$A \in \mathbb{R}^d$满足$\int_A f dx = 0$，证明A是零测集。

6. 设$f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$连续且$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$。证明：$\forall a > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^a f(nx) dx = aA$.

7. 设全纯函数f, g满足$f(a) = g(a) = 0, g'(a) \neq 0$. 证明$z = a$是$h = f/g$的可去奇点。

8. 问：是否存在非常值的整函数$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$使得$f(\mathbb{C}) \subseteq \mathbb{C} \backslash \{|z| < 1\}$?