

中国科学技术大学
期中测试: 应用随机过程 (2020年春)
(满分100分)

姓名: _____ 学号: _____ 院系: _____

1.(15分) 已知 $X = \{X_n, n \geq 0\}$ 为一马氏链, 其状态空间为 $S = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, 一步转移概率为: $p_{00} = 0, p_{0i} = p_i > 0, p_{i,i-1} = 1, i \geq 1$ 。

- (1) 分析该马氏链各状态的周期;
- (2) 以下判断是否正确: X 所有状态为常返态。若正确给出证明; 若不正确给出反例。
- (3) 以下判断是否正确: X 所有状态为正常返态的充要条件为 $\sum_{n \in S} np_n < \infty$ 。若正确给出证明; 若不正确给出反例。

2.(70分) $X = \{X_n, n \geq 0\}$ 为一马氏链, 其状态空间为 $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, 一步转移概率矩阵 \mathbb{P} 为:

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

问题:

- (1) 画出转移概率图, 由马氏链的分解定理对该马氏链划分;
- (2) 分析每个状态的性质, 包含瞬时, 零常返, 非零常返, 周期;
- (3) 计算每个状态的平均返回时间 $\mu_i, i \in S$;
- (4) 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}(n), \forall i, j \in S$;
- (5) 求 $f_{66}(n), f_{67}(n), f_{44}(n), f_{45}(n), n = 0, 1, 2, 3, \dots$;
- (6) 求 $\sum_{n=1}^{\infty} P(X_n = i, T_k \geq n | X_0 = k)$, 这里 $k = 1, i = 1, 2, 4$;
- (7) 求 $X_0 = 5$ 的条件下, 不经过 1, 首次到达 6 的平均时间;
- (8) 求 $X_0 = 5$ 的条件下, 不经过 1, 首次到达 6, 经过 7 的平均次数。

3.(15分) 某研究员每隔一段时间观察一次实验进度, 间隔时间等概率地为10分钟、20分钟和30分钟。假设他在某整点进行了一次观察, 请问: 平均多长时间后, 他再一次恰好在整点进行观察?