整理：周佳诺
授课教师：刘永强

代数学期中考试

（本试卷中 R 表示含幺交换环）

1. 求出PID上的所有有限生成投射模、内射模和平坦模并证明。

2. 设 $R=\mathbb{Z}_6$，R 的理想 $I=(3)$ 作为 R-模是投射、内射、平坦的吗？证明你的结论。

3. 设有 R-模组成的交换图：

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & 0 \\ & & & & & & \downarrow \\ & & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & A'' & \longrightarrow & B'' & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

其中每行每列都正合。证明 $A'' \to B''$ 为单射。

4. 设 R 为PID，M 为有限生成-R 模，证明对于任意素理想 P 有

$$\operatorname{rank}(M)=\lim_{n\to\infty} \mathrm{d}_P(P^nM)$$

$$(\text{注：}\mathrm{d}_P(M)=\dim_{R/P}(M/PM))$$

5. 设 C 为范畴，$f, g : X \to Y$ 为两个态射。称态射 $h : H \to X$ 为 f 和 g 的 equalizer，如果 $fh = gh$ 且对任意满足 $fu = gu$ 的态射 $u : U \to X$，唯一存在态射 $s : U \to H$ 使得 $u = hs$。

   (a) 证明如果 equalizer 存在则在相差一个同构的意义下唯一。

   (b) 证明 equalizer 必为单射。

6. 设 $R = k[x, y]$，其中 k 为交换环。设有 R-模 $M_1 = k[x, y, y^{-1}]/k[x, y]$ 和 $M_2 = k[x, y, x^{-1}]/k[x, y]$。设 $M = M_1 \oplus M_2$，证明 $M \otimes_R M \otimes_R M = 0$。

7. 设 $A = \{(1, n), (n, 1), (n, n)\} \subset \mathbb{Z}^2$，$M$ 为 A 生成的 $\mathbb{Z}^2$ 的子 $\mathbb{Z}$-模。证明 M 是自由 $\mathbb{Z}$-模，$\mathbb{Z}^2/M = \mathbb{Z}_{n-1}$，且不能在 A 中选取 M 的一组基。

8. 设 M 是有限生成 R-模，$f : R^m \to M$ 为满射。证明 $\ker(f)$ 是有限生成 R-模。