

2020年中国科学技术大学新生入学考试

数学学科

2020年9月5日 15:00-17:00

一、填空题(40分)

1. 函数 $f(x) = |x^2 + 4x + 3|$ 的单调递增区间是_____.
2. 把 $y = \sin(3x)$ 的图像往右平移3个单位, 得到 $y = \cos(3x + b)$ 的图像, 其中 $0 \leq b < 2\pi$, 则 $b =$ _____.
3. 不等式 $1 \leq x^2 + y^2 \leq x + y$ 表示的平面区域的面积为_____.
4. 设复数 $z = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}$, 则 $\sum_{k=1}^{2020} kz^k$ 的虚部是_____.
5. 已知向量 a, b 满足 $|2a - b| = 3, |a - 2b| = 4, |a + b| = 5$, 则 $|a - b| =$ _____.
6. 视地球作半径为 R 的球, 分别位于东经 120° 北纬 60° 和西经 120° 南纬 60° 的两地之间的球面距离是_____.
7. 已知一个圆柱体表面积是1, 则其体积最大值为_____.
8. 若方程 $\ln(1+x) - x + ax^2 = 0$ 具有两个不同的实根, 则实数 a 取值范围是_____.

二、解答题(60分)

9. 设 E, F, G, H 分别是四面体 $ABCD$ 四条棱 AB, BC, CD, DA 的中点。证明：
 - (1) 四边形 $EFGH$ 是平行四边形
 - (2) 平面 $EFGH$ 将四面体 $ABCD$ 分成体积相等的两部分。
10. 给定 $a, b > 0$, 过直线 $y = \frac{b}{a}x$ 上的动点 A (异于原点 O) 作双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的切线交直线 $y = -\frac{b}{a}x$ 于点 B . 证明: $\triangle OAB$ 面积是定植。
11. 从正整数 $1, 2, \dots, n$ 中随机选取3项, 设为随机变量 $X < Y < Z$, 证明: $\mathbb{E}[Z] = 3\mathbb{E}[X]$.
12. 给定正整数 n , 设 a_1, \dots, a_n 是 $1, 2, \dots, n$ 的排列。求 $S = \sum_{i=1}^n |a_i - a_{i-1}|$ 的取值范围, 和式中 $a_0 = a_n$.