

中国科学技术大学数学科学学院
2020 年春 博士生资格考试 (分析学)

1. 证明 $z = 1$ 是 $f(z) := \frac{1}{\ln z}$ 的一阶极点.
2. 用幅角原理证明代数基本定理.
3. 设 $G \subset \mathbb{R}^n$ 为开集, $f: G \rightarrow \mathbb{R}^1$ 为实函数. 证明: f 在 G 上几乎处处连续 $\iff \forall t \in \mathbb{R}^1$, 点集

$$E_1(t) := \{x \in G | f(x) > t\}, \quad E_2(t) := \{x \in G | f(x) < t\}$$

中几乎处处是内点.

4. 设 $X = \{a, b, c\}$, \mathcal{M} 是 X 的幂集(即 X 的所有子集构成的 σ 代数), \mathcal{M} 上测度 μ 满足条件:

$$\mu(\{a\}) = 0, \quad \mu(\{b\}) = 1, \quad \mu(\{c\}) = \infty.$$

求向量空间 $L^1(\mu)$, $L^2(\mu)$ 和 $L^\infty(\mu)$ 的维数.

5. 证明: Hilbert 立方体 $\{(x_1, x_2, \dots) \in \ell^2 : |x_n| \leq 1/n, n = 1, 2, \dots\}$ 是 ℓ^2 的紧子集.
6. (15分) 设 X 是 Banach 空间, 线性算子 $P: X \rightarrow X$ 满足 $P^2 = P$, 且零空间 $\text{Ker}(P)$ 和值域 $\text{Ran}(P)$ 都是闭的. 证明: P 有界.