

# 同调代数第一次考试

授课教师: 乐珏  
试卷整理: 周佳诺

1. 给定一个环  $R$ , 每个左  $R$ - 模都是一个阿贝尔群。定义一个函子  $H: R\text{-Mod} \rightarrow \text{Ab}$  使得对于任意  $R$ - 模  $M$  和  $R$ - 同态  $f$  有  $H(M) = M$  和  $H(f) = f$ 。

- (a) (5pts) 证明  $R \otimes_{\mathbb{Z}} -$  是  $H$  的左伴随。  
(b) (5pts) 构造  $H$  的一个右伴随并验证。

2. 给定一个阿贝尔范畴  $\mathcal{C}$ 、 $\mathcal{C}$  中的一个短正合列

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{w} E \longrightarrow 0$$

和一个态射  $f: A \rightarrow C$ , 取  $B$  和  $C$  的推出:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & B \\ \downarrow f & & \downarrow g \\ C & \xrightarrow{v} & D \end{array} \quad (1)$$

- (a) (10pts) 证明存在一个行正合的交换图:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{u} & B & \xrightarrow{w} & E & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow f & & \downarrow g & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & C & \xrightarrow{v} & D & \xrightarrow{\gamma} & E & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

- (b) (10pts) 证明图 (1) 也是拉回。

3. (20pts) 给定一个环  $R$ , 范畴  $R\text{-Mod}$  和  $M_n(R)\text{-Mod}$  是等价的。构造它们之间的一对等价函子并验证。