

USTC概率论期中试题 2020年11月23日

数:

整理: 洪放
授课教师: 刘党政

- (15分) 小盆友 ζ 掷2021枚均匀硬币, 小盆友 δ 掷2020枚均匀硬币, 问 ζ 掷出的正面数比 δ 掷出的正面数多的概率?
- (15分) 2020年美国总统选举中Biden与Trump支持率近似为51.5%与48.5%, 但在民调时可能有人不愿意表明真实想法. 若在一次民调时Biden支持者中宣称支持Biden与Trump比例为4/5和1/5, Trump支持者中宣称支持Trump与Biden比例为3/5和2/5. 抽查到一人, 其宣称支持Biden, 问他确实是Biden支持者概率多大?
- (15分) 设 (X, Y) 为联合离散型向量, X 与 Y 的二阶矩存在, 记 $\psi(X) = \mathbb{E}[Y|X]$. 若 g 为可测函数且 $g(X)$ 二阶矩存在, 试证

$$\mathbb{E}[(Y - \psi(X))^2] \leq \mathbb{E}[(Y - g(X))^2].$$

- (35分) S_n 表示从 $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ 到 $[n]$ 双射全体, 从 S_n 中(均匀地)随机选取一个 σ , 定义不动点数为 $X(\sigma) = \#\{k : \sigma(k) = k\}$, 对换数为 $Y(\sigma) = \#\{(i, j) : \sigma(i) = j, \sigma(j) = i, i < j\}$. 回答
 - 详细给出一个有关的概率空间.
 - X 与 Y 是否独立? 说明理由.
 - 计算 X 的分布列.
 - 求 Y 的期望.

- (20分) 平面上—粒子‘向右向上’随机游走 S_n ,

$$S_0 = (0, 0), \quad S_n = S_{n-1} + X_n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

这里 $\{X_1, \dots, X_n\}$ 相互独立且同分布 $P(X_1 = (1, 0)) = P(X_1 = (0, 1)) = 1/2$. 记 $C_{n,m}$ 为粒子从 $(0, 0)$ 到 (mn, n) 且始终在直线 $y = x/m$ 或其上方运动的概率. 回答

- 当 $m = 1$ 时计算 $C_{n,1}$.
- 当 $m = 2$ 时计算 $C_{3,2}$, 并验证序列 $\{C_{n,2}\}$ 的母函数 $G(s)$ 满足方程

$$G(s) = 1 + \frac{s}{8}G^3(s).$$