

复变函数期中试题

1) -9) 每道题11分

1) 求下列值: $2^i, \log(-2 + 3i)$

2) 证明: $(-i)^{s-1} + i^{s-1} = 2 \sin \frac{\pi s}{2}, s \in \mathbf{C}$.

3) 设 $0 < |a| < |b|$, 把函数 $\frac{1}{(z-a)(z-b)}$ 在下列区域展开成Laurent级数。

i) 在 $|b-a| < |z-a| < \infty$ 上,

ii) 在 $0 < |z-b| < |a-b|$ 上。

4) 求下列函数的奇点 (包括 ∞) 并分类, 对于极点指出它们的阶数。

i) $\frac{1}{e^z-1}$

ii) $\sin \frac{1}{1-z}$

5) 求下列函数在极点的留数:

i) $\frac{z^{2n}}{1+z^{2n}}$

ii) $\frac{1}{(z-z_1)^m(z-z_2)^n}, z_1 \neq z_2, m, n \in \mathbf{N}$.

6) 计算积分

1) $\int_0^\infty \frac{x^{1-\alpha}}{1+x^2} dx, 0 < \alpha < 2,$

ii) $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}.$

7) 设 $f(z)$ 在 $|z| < 1$ 上全纯, $\operatorname{Re} f(z) > 0, f(0) = \alpha > 0$, 试证:

$|\frac{f(z)-\alpha}{f(z)+\alpha}| \leq |z|, |f'(0)| \leq 2\alpha.$

8) 设 $f(z)$ 在 $\{z | 0 < |z| < 1\}$ 上解析, $|f(z)| \leq M|z|^{-1/2}, |z| < 1$, 证明0是 f 的可去奇点。

9) 求 $|z| = 1$ 上的调和函数 u , 使 u 在 $|z| = 1$ 上的一段弧取值为1, 在圆周的其余部分取值为0.

10) (附加题, 10分) 设有理函数把单位圆 $|z| = 1$ 映成单位圆 $|z| = 1$, 它的零点与极点如何分布? 试构造出此类有理函数的一般形式。