

# 2019年中国科学技术大学自主招生考试

数学学科

2019年6月

## 一、填空题（40分）

1. 平面区域 $\{(x, y) : |x + 2y| + |3x + 4y| \leq 5\}$ 的面积是\_\_\_\_\_.
2. 方程 $\sin 2x + \cos 3x = 0$ 在 $[0, 2\pi]$ 内的所有根之和为\_\_\_\_\_.
3. 已知平面直角坐标系上有三点 $A(1, 0)$ ,  $B(0, 1)$ ,  $C(x, \frac{1}{\sqrt{x}})$ , 则 $\triangle ABC$ 面积最小值为\_\_\_\_\_.
4. 令 $X = 3 + \cos(t - \frac{\pi}{3})$ ,  $Y = 4 + \cos(t + \frac{\pi}{6})$ , 则 $X^2 + Y^2$ 的最大值为\_\_\_\_\_.
5. 设有点 $P_0(1, 0)$ . 对 $i \geq 0$ , 向量 $\vec{OP}_i$ 绕 $O$ 顺时针旋转 $\theta$ 角得到向量 $\vec{OQ}_i$ ,  $Q_i$ 关于 $y$ 轴的对称点记作 $P_{i+1}$ . 则 $P_{2019}$ 的坐标为\_\_\_\_\_.
6. 若 $x_1 = \frac{1}{2}$ ,  $x_{n+1} = \frac{x_n}{1+2(n+1)x_n}$ , 则 $\sum_{k=1}^{2019} x_k =$ \_\_\_\_\_.
7. 设复数 $z$ 满足 $\frac{z-1}{z+1}$ 是纯虚数, 则 $|z^2 + z + 3|$ 的最小值为\_\_\_\_\_.
8. 设 $x_1, x_2, x_3, x_4$ 是正整数, 并满足 $\{x_i x_j x_k : 1 \leq i, j, k \leq 4\} = \{18, 36, 54\}$ . 则 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 =$ \_\_\_\_\_.

## 二、解答题（60分）

9. 将 $\triangle D_1 D_2 D_3$ 的各中点连线, 折成四面体 $ABCD$ . 已知 $D_1 D_2 = 12$ ,  $D_2 D_3 = 10$ ,  $D_3 D_1 = 8$ , 求四面体 $ABCD$ 的体积.
10. 证明: 对任意正整数 $n$ , 方程 $e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$ 在 $\mathbb{R}$ 上只有一个解 $x = 0$ .
11. 设 $n$ 是正整数.
  - (1) 证明: 存在多项式 $p(x)$ 满足 $\cos n\theta = p(\cos \theta)$
  - (2) 在 $\mathbb{R}[x]$ 中因式分解多项式 $p(x)$ .