

中国科学技术大学期末考试 (A卷)

2017—2018 学年第 2 学期

课程名称: 复分析

学生姓名: _____

学 号: _____

专 业: _____

年级/班级: _____

说明: 解答要求卷面整洁, 计算结果尽可能化简。

一、(20分)计算题:

1. 计算积分:

$$\int_{|z|=1} \frac{3z-1}{z(z-2)} dz.$$

2. 利用留数定理计算积分, 并给出计算过程中所需要的引理的详细证明:

$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin(2x)}{4+x^2} dx.$$

二、(10分)求将区域 $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid -\pi < \operatorname{Re} z < \pi\}$ 映为 $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ 的共形映射。

三、(10分)求下列函数在 $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1\}$ 和 $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < \infty\}$ 中的Laurent 展式.

$$f(z) = \frac{z+1}{z^2(z-1)}.$$

四、(15分)

1. 叙述Rouché 定理。

2. 求方程

$$z^4 - 5z + 1 = 0$$

在区域 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ 和 $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 2\}$ 中的零点个数。

五、(15分)

1. 叙述Liouville 定理。

2. 若 $f(z)$ 是整函数, 且满足

$$|f(z)| \leq |\sin^3(z)|, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

则存在某个常数 $\lambda \in \mathbb{C}$, 使得对任何 $z \in \mathbb{C}$ 有 $f(z) = \lambda \sin^3(z)$.

六、(10分) 求证: $\sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$ 的收敛圆周上的每个点都为该幂级数的奇点。此处奇点的定义为在该点处幂级数不能全纯开拓到圆外。

七、(10分) 设 $f(z)$ 是 $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ 上的全纯函数, 且对任何 $z \in \mathbb{D}$ 有 $|f(z)| < 1$ 。若 $z=0$ 是 $f(z)$ 的二阶零点, 则

$$|f(z)| \leq |z|^2, \quad \forall z \in \mathbb{D}.$$

八、(10分) 求证:

1. 设 Ω 是 \mathbb{C} 中的一个区域, $F(z, s)$ 是 $(z, s) \in \Omega \times [0, 1]$ 上的连续函数, 且对任何固定的 $s \in [0, 1]$ $F(z, s)$ 是关于 z 的全纯函数。则函数

$$f(z) = \int_0^1 F(z, s) ds$$

在 Ω 上全纯。

2. 若函数 $f(t)$ 在 $t \geq 0$ 上连续有界, 则函数

$$g(z) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-zt} dt$$

在 $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$ 有定义且全纯。