

# 2017年中国科学技术大学新生入学考试（数学）

2017.8.19 15:00-17:00

## 一、填空题（50分）

1. 函数  $y = \underline{\hspace{2cm}}$  的图像与  $y = 1 + \sin(2x + 3)$  的图像关于原点  $(0, 0)$  中心对称.
2.  $\triangle ABC$  中,  $|AB| = 2$ ,  $|BC| = 3$ ,  $\angle BAC = 60^\circ$ , 则  $AC = \underline{\hspace{2cm}}$ .
3. 等差数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 + a_2 + a_3 = 3$ ,  $a_9 + a_{10} = 5$ , 则  $\sum_{n=1}^{10} a_n = \underline{\hspace{2cm}}$ .
4. 复数  $z = 1 + i$ , 则  $\sum_{n=1}^{2017} z^n = \underline{\hspace{2cm}}$ .
5. 设双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  的离心率是  $\frac{3}{2}$ , 则椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  的离心率是  $\underline{\hspace{2cm}}$ .
6. 从小到大排序:  $a = 0.99^{99}$ ,  $b = 0.99^{100}$ ,  $c = 0.999^{999}$ ,  $d = 0.999^{1000}$ .  $\underline{\hspace{2cm}}$
7. 设向量  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$  满足  $|\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}| = 3$ ,  $|2\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = 4$ , 则  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$  最小值为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .
8. 不等式组

$$\begin{cases} 2x - y > 0 \\ x + 4y > 0 \\ 2y - x < 3 \\ 4x + y < 15 \end{cases}$$

表示的平面区域的面积是  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

9. 设随机变量  $X_1, X_2, X_3$  相互独立且服从正态分布  $N(0, 1)$ , 若  $\mathbb{P}(X_i > 1) = p$ , 则  $\mathbb{P}(|X_1|, |X_2|, |X_3| \text{ 至少一个小于 } 1) = \underline{\hspace{2cm}}$ .
10.  $(x - 1)^{2017}$  展开式中, 系数为偶数的有  $\underline{\hspace{2cm}}$  项.

## 二、解答题（50分）

11. (10分) 过定点  $(3, 1)$  作动直线交椭圆  $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$  于  $A, B$  两点, 求  $AB$  中点  $M$  的轨迹方程.
12. (15分) 设四棱锥  $P - ABCD$  的底面边长  $AB = CD = 3$ ,  $AD = BC = 2$ , 侧面满足  $PAB \perp PCD$ ,  $PAD \perp PBC$ ,  $l$  是平面  $PAB$  与  $PCD$  的交线.
  - (1) 求证:  $l // AB // CD$ .
  - (2) 求四棱锥  $P - ABCD$  体积的最大值.
13. (10分) 设  $a, b, c > 0$ , 求

$$S = \frac{a^2}{a^2 + bc} + \frac{b^2}{b^2 + ca} + \frac{c^2}{c^2 + ab}$$

的取值范围.

14. (15分) 设数列  $x_n$  满足  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = 1$ ,  $x_n = ax_{n-1} + bx_{n-2} (n \geq 2)$ . 求所有正整数对  $(a, b)$ , 使得对任意正整数  $m, n$ , 都有  $(x_m, x_n) = x_{(m,n)}$ . 这里  $(u, v)$  表示  $u, v$  的最大公约数.