

中国科学技术大学  
应用随机过程 (2016年上学期期终考试)  
(满分100分, 120分钟)

本试卷总假设  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  是一个概率空间,  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  是它上面一个递增的  $\sigma$  代数流,  $B = (B(t))_{t \geq 0}$  是一个  $(\mathcal{F}_t)$ -布朗运动.

题目 1 (a) 设  $\Delta: 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$  是  $[0, t]$  的一个划分. 证明

$$\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \mathbb{E} \left| \sum_{i \in \Delta} |B_{t_i} - B_{t_{i-1}}|^2 - t \right|^2 = 0.$$

(b) 构造出  $[0, t]$  的一列划分  $\Delta_1 \subset \Delta_2 \subset \dots$  满足  $|\Delta_n| \rightarrow 0$ , 并且对任意的  $t \geq 0$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i \in \Delta_n} |B_{t_i} - B_{t_{i-1}}|^2 = t, \quad \text{a.s.}$$

题目 2 对任意的  $a \in \mathbb{R}$ , 定义  $\tau_a = \inf\{t > 0 : B(t) = a\}$ . 对  $-\infty < a < x < b < \infty$ , 令  $\tau = \min\{\tau_a, \tau_b\}$ .

(a) 在初始条件  $B(0) = x$  下, 写出  $\tau_b$  的分布(仅写答案), 并且计算  $\mathbb{P}_x(\tau_b < \infty)$  和  $\mathbb{E}_x \tau_b$ . 这里  $\mathbb{P}_x$  和  $\mathbb{E}_x$  分别表示在初始条件为  $B(0) = x$  下的概率和期望.

(b) 证明  $\mathbb{P}_x(\tau < \infty) = 1$ ,  $\mathbb{E}_x \tau < \infty$ . (提示: 首先证明  $\mathbb{P}_x(\tau > 1) \leq \theta < 1$ , 然后利用强马氏性证明  $\mathbb{P}_x(\tau > n) \leq \theta^n$ .)

(c) 证明  $(B_{t \wedge \tau_a \wedge \tau_b})_{t \geq 0}$  是一致可积鞅.

(d) 求  $\mathbb{P}_x(\tau_a > \tau_b)$ ?

题目 3 分别利用鞅的定义和 Itô 公式两种方法证明下列过程是鞅:

(a)  $M_1(t) = B^2(t) - t,$

(b)  $M_2(t) = B^3(t) - 3tB(t)$

(c)  $M_3(t) = e^{\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2}t}, \lambda > 0$  是常数.

题目 4 考虑下列随机微分方程

$$dX(t) = -X(t)dt + dB(t), \quad X(0) = 1.$$

(a) 求出它的解  $X(t)$ .

(b) 计算  $X(t)$  的期望和方差.

(c) 给出  $X(t)$  的分布, 和它的极限分布.