

# 中国科学技术大学

## 2016 年新生入学考试答题纸

考试科目: 数学 得分: \_\_\_\_\_  
学院: \_\_\_\_\_ 姓名: \_\_\_\_\_ 学号: \_\_\_\_\_

说明: 试卷满分 100 分, 考试时间 120 分钟, 禁止使用计算器。

一、填空题: 每小题 5 分, 共 40 分。填写不完整或没有化简均不得分。

1. 设函数  $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$  的图象关于直线  $x = -1$  和  $x = 2$  均对称, 则  $f(0)$  的所有可能取值是 \_\_\_\_\_。
2. 方程  $x^3 - 2ax + a^2 = 0$  有解  $x \in (0, 1)$  当且仅当实数  $a \in$  \_\_\_\_\_。
3. 设复数  $z$  满足  $|z| = 2$ ,  $i$  是虚数单位, 则  $|(1+z) + i(1-z)|$  的最大值是 \_\_\_\_\_。
4. 设边长 1 的正三角形可被边长  $b$  的正方形覆盖, 则  $b$  的最小值是 \_\_\_\_\_。
5. 在四面体  $ABCD$  中,  $AD = BD = CD$ ,  $AB = BC = CA = 1$ 。若二面角  $A-BC-D$  等于  $75^\circ$ , 则二面角  $A-BD-C$  的余弦值是 \_\_\_\_\_。
6. 在平面直角坐标系中,  $\triangle ABC$  是边长 1 的正三角形, 动点  $P$  满足  $\vec{PA} \cdot \vec{PB} + \vec{PB} \cdot \vec{PC} + \vec{PC} \cdot \vec{PA} = 0$ , 则  $P$  的轨迹所围成的平面区域的面积为 \_\_\_\_\_。

7. 化简  $\sum_{k=0}^{1008} (-1)^k C_{2016}^{2k} =$  \_\_\_\_\_, 其中  $C_m^n = \frac{m!}{n!(m-n)!}$  是组合数.

8. 设随机变量  $X$  服从正态分布  $N(1,1)$ . 若  $P(|X| > 1) = c$ , 则  $P(X < 2) =$  \_\_\_\_\_  
(用  $c$  表示).

二、解答题: 每小题 15 分, 共 60 分. 需写出详细的解答过程.

9. 设正数  $a, b, c$  满足  $ab + bc + ca = 1$ . 求  $\frac{a}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{b}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{c}{\sqrt{1+c^2}}$  的取值范围.

10. 过椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的右焦点  $F$  作两条相互垂直的弦  $AB, CD$ . 证明:  
 $A, B, C, D$  四点共圆当且仅当  $|AB| = |CD|$ .

11. 袋中共有  $3n$  个小球, 红、绿、蓝色各  $n$  个. 现从袋中随机取球, 每次取出 3 个小球不放回, 直至某种颜色的小球被全部取出. 求取球次数  $X$  的分布.

12. 设  $f(x) = e^x - \cos x$ , 正项数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = 1, f(a_n) = a_{n-1}, n \geq 2$ . 证明: 存在正整数  $n$  使得  $\sum_{k=1}^n a_k > 2016$ .