

# 2016年秋季学期泛函分析(H)期末考试

整理人: 章俊彦 zhangjy9610@gmail.com

2017.01.06 14:30-16:30 主讲教师: 刘聪文

1. 设 $H$ 是Hilbert空间,  $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $H$ 的一组标准正交基, 求证: $e_n \rightharpoonup^w 0$ .
2. 设 $H$ 是Hilbert空间, 证明:  $H$ 上的有界线性算子 $P$ 是正交投影算子, 当且仅当 $P^2 = P$ 且 $P$ 自伴.
3. 设 $K(\cdot, \cdot) \in C([0, 1] \times [0, 1])$ , 求证如下积分算子是 $C[0, 1]$ 上的紧算子.

$$T : u \mapsto \int_0^1 K(\cdot, t)u(t)dt.$$

4. 证明或否定:  $(0, 1)$ 上的有界连续函数空间, 赋予范数 $\|f\| := \sup_{0 < t < 1} |f(t)|$ 是可分的.
5. 设 $X, Y$ 是Banach空间,  $X$ 自反, 且存在 $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ 是满射, 求证:  $Y$ 是自反空间.
6. 设 $X$ 是Banach空间,  $f$ 为 $X$ 上的一个实线性泛函, 求证:  $f$ 的零空间要么是闭的, 要么是 $X$ 的稠密真子空间.
7. 设 $M$ 是 $L^2[0, 1]$ 是闭子空间, 且 $M \subseteq C[0, 1]$ , 求证:  $M$ 是有限维的.