

# 2015年春季学期复分析(H)期末考试

整理人: 章俊彦 zhangjy9610@gmail.com

2015.07.09 8:30-10:30 主讲教师:罗罗

1.(20分) 计算积分:

$$(1) \int_{|z|=1} \frac{z^3}{2z^2+1} dz; \quad (1)$$

$$(2) \int_0^{+\infty} \frac{x \sin(ax)}{x^2+b^2} dx, \text{ 其中 } a, b > 0. \quad (2)$$

2.(15分) 求一共形映射, 将  $B(0,1) \cap \{Im(z) > 0\}$  映为  $B(0,1)$ .

3.(15分) 用Rouche定理证明代数学基本定理.

4.(10分) 设  $f(z)$  在  $\mathbb{C}_\infty$  上仅有一个极点  $z=1$ , 主要部分为  $\frac{1}{(z-1)^2}$ ,  $f(0)=1$ . 求  $f(z)$  表达式, 并在  $\{z: 1 < |z| < \infty\}$  作Laurent展开.

5.(10分) 设  $f \in H(B(0,1))$ ,  $f(0)=0$ . 求证:  $\sum_{n=0}^{\infty} f(z^n)$  在  $B(0,1)$  中绝对收敛, 且内闭一致收敛.

6.(10分) 证明: 除去线性函数之外, 不存在其它整函数, 使得其反函数也是整函数.

7.(10分) 设  $f \in H(B(0,1)) \cap C(\overline{B(0,1)})$ ,  $|f(z)|=1$  ( $\forall z \in \partial B(0,1)$ ). 求证:  $f$  是有理函数.

8.(10分) 设区域  $D$  关于实轴对称,  $f$  在  $D$  上全纯. 求证: 存在  $D$  上的全纯函数  $f_1, f_2$ , 使得  $f(z) = f_1(z) + if_2(z)$ , 且  $f_1, f_2$  在实轴上取得实值.