

- ① 求极限 (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})$; (2) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} [\sin(\frac{\pi}{2}-x)]^{\frac{1}{x}}$
- ② (1) $f(x) = x^3 e^{2x}$, 求 $f^{(n)}(x)$; (2) 将 $f(x) = \ln(1+\sin x)$ 在 $x=0$ 处展开到 4 阶, 带 P_n 余项
- ③ 求积分 (1) $\int \frac{dx}{1+x^2}$; (2) $\int e^x \cos x dx$
- ④ (1) 求椭圆曲线 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$ 长度; (2) 求曲线 $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 1$ ($a < x < at+b$, $a, b > 0$) 绕 x 轴旋转一周的旋转体体积
- ⑤ $f(x)$ 在有界开区间 (a, b) 上一致连续, 证明: $f(a^+), f(b^-)$ 存在且有限
 举例说明当 $b = +\infty$ 时, 结论不一定成立
- ⑥ $f \in C(\mathbb{R})$ 为偶函数, $a \in \mathbb{R}$, $F(x) = \int_a^x f(t) dt$
 证明: $F(x)$ 可表示为线性函数与周期函数之和
- ⑦ 有界闭区间 $[a, b]$ 上, $f'(x) > 0$, $f(a) > 0 > f(b)$, 证明:
 (1) $\exists! c \in (a, b)$, $f(c) = 0$;
 (2) 设 $x_0 \in (a, b)$, $f(x_0) > 0$, $x_n = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$, 则在 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$
- ⑧ $f \in R[0, 1]$, 常数 $\lambda > 0$, 记 $D_\lambda(f) = \{x \in [0, 1] \mid \omega_f(x) \geq \lambda\}$, $\omega_f(x)$ 为 f 在 x 处振幅
 证明: $\forall \varepsilon > 0$, \exists 有限个开区间 I_1, \dots, I_m , s.t.
 (1) $D_\lambda(f) \subset \bigcup_{i=1}^m I_i$;
 (2) $\sum_{i=1}^m |I_i| < \varepsilon$.