

第五章 非惯性参考系

本章首先讨论不同参考系之间速度和加速度的变换关系。参考系的转动会引起牵连运动,只要在刚体运动学的基础上再加上相对运动部分,即可得出两个参考系之间的速度和加速度的变换关系。其次讨论非惯性系中的动力学方程,在牛顿力学中引进了惯性力后,质点的动量定理、角动量定理和动能定理与牛顿第二定律一样保持原来的形式不变;讨论拉格朗日函数的不确定性,给出了非惯性系中拉格朗日函数的一般形式。最后,作为非惯性系中动力学理论的应用实例,简单地讨论地球转动的动力学效应和磁共振的经典理论。

§ 5.1 不同参考系之间速度和加速度的变换关系

迄今为止,不论是运动学问题还是动力学问题,我们都是惯性系中来讨论的。地球并不是一个严格的惯性系,我们在地球上所观察到的各种力学现象,实际上是非惯性系中的力学问题。虽然在大多数问题中地球的非惯性效应可以忽略,但在某些问题中,如人造卫星相对于地球的运动,重力加速度随纬度的变化等,地球的自转效应就不能忽略了。

设 S 和 S' 是两个不同的参考系,譬如说 S 是一个惯性系, S' 是一个非惯性系。 S' 相对于 S 的运动,一般情况下既有平动,也有转动。我们先讨论 S' 相对于 S 只有转动的情况。在讨论刚体转动时,我们引进了两个坐标系:固定在空间的 $Ox_0y_0z_0$ 系和固定在刚体上的 $Oxyz$ 系。如果我们把前者看成参考系 S ,把后者看成参考系 S' ,那么由于参考系 S' 的旋转所引起的效应,实际上就是刚体的转动效应。

如图 5.1 所示,设 $Ox_0y_0z_0$ 是惯性系 S , $Oxyz$ 系(S' 系)相对 S 系以角速度 ω_0 旋转。让我们来考察质点 P 在两个参考系中的运动情况。 P 点的位置矢量为:

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}. \quad (1.1)$$

这个表示式不论在 S 系中还是在 S' 系中都是适用的。质点在非惯性系 S' 中的速度称为相对速度,用 \boldsymbol{v}' 表示:

$$\tilde{v}' = \frac{\tilde{d}\mathbf{r}}{dt} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k}. \quad (1.2)$$

符号 $\frac{\tilde{d}}{dt}$ 表示在 S' 系中的微商运算. 在 S' 系中, 单位矢量 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 是不随时间改变的, 因此

$$\frac{\tilde{d}\mathbf{i}}{dt} = \frac{\tilde{d}\mathbf{j}}{dt} = \frac{\tilde{d}\mathbf{k}}{dt} = 0.$$

质点 P 在惯性系 S 中的速度 \mathbf{v} 称为绝对速度:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k} + x \frac{d\mathbf{i}}{dt} + y \frac{d\mathbf{j}}{dt} + z \frac{d\mathbf{k}}{dt}. \quad (1.3)$$

因为 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 是固定在 S' 系中随 S' 系一起运动的, 因此

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{i}, \quad \frac{d\mathbf{j}}{dt} = \boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{j}, \quad \frac{d\mathbf{k}}{dt} = \boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{k}.$$

代入(1.3)式得

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k} + \boldsymbol{\omega}_0 \times (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \\ &= \tilde{v}' + \boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{r}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

显然, 如果(1.1)式中的 \mathbf{r} 不是位置矢量, 而换为任意一个矢量 \mathbf{A} , 则有

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{\tilde{d}\mathbf{A}}{dt} + \boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{A}.$$

因此两个相互间以角速度 $\boldsymbol{\omega}_0$ 转动的参考系之间对时间求微商的算符变换关系为

$$\frac{d}{dt} = \frac{\tilde{d}}{dt} + \boldsymbol{\omega}_0 \times. \quad (1.5)$$

(1.4)给出了 S 系和 S' 系之间的速度变换关系, 再利用(1.5)式即可方便地

求出绝对加速度 $\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$ 和相对加速度 $\mathbf{a}' = \frac{\tilde{d}\mathbf{v}'}{dt}$ 之间的关系:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\tilde{v}' + \boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{r}) \\ &= \frac{\tilde{d}\mathbf{v}'}{dt} + \boldsymbol{\omega}_0 \times \tilde{v}' + \frac{\tilde{d}\boldsymbol{\omega}_0}{dt} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega}_0 \times \frac{\tilde{d}\mathbf{r}}{dt} + \boldsymbol{\omega}_0 \times (\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{r}). \end{aligned}$$

因

$$\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{\omega}_0}{dt} &= \left(\frac{\tilde{d}}{dt} + \boldsymbol{\omega}_0 \times \right) \boldsymbol{\omega}_0 = \frac{\tilde{d}\boldsymbol{\omega}_0}{dt}, \\ \frac{\tilde{d}\mathbf{r}}{dt} &= \tilde{v}', \quad \frac{\tilde{d}\mathbf{v}'}{dt} = \mathbf{a}', \end{aligned}$$

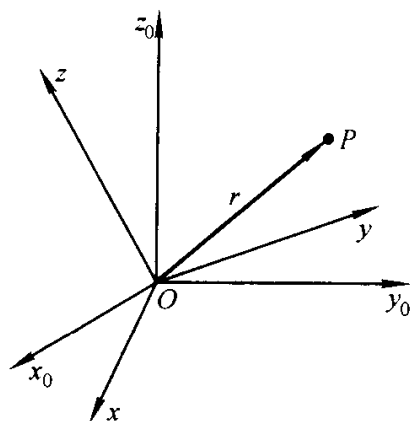


图 5.1

所以

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \frac{d\boldsymbol{\omega}_0}{dt} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega}_0 \times (\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{r}) + 2\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{v}'. \quad (1.6)$$

其中 $\frac{d\boldsymbol{\omega}_0}{dt} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega}_0 \times (\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{r})$ 称为牵连加速度, 这两项完全是由于参考系的旋转而引起的; $2\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{v}'$ 称为科里奥利 (Coriolis) 加速度, 它的出现除由于参考系的旋转外, 还和质点的相对速度有关.

如果 S' 相对于 S 的运动, 除了转动 $\boldsymbol{\omega}_0$ 外, 还有平动 \mathbf{v}_0 , 则在 (1.4) 和 (1.6) 中, 只要再加一项平动所引起的牵连速度 \mathbf{v}_0 和牵连加速度 $\mathbf{a}_0 = \frac{d\mathbf{v}_0}{dt}$ 即可:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{r}, \quad (1.7)$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \mathbf{a}_0 + \frac{d\boldsymbol{\omega}_0}{dt} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega}_0 \times (\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{r}) + 2\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{v}'. \quad (1.8)$$

最重要的一种非惯性系是以等角速度 $\boldsymbol{\omega}_0$ 旋转的、没有平动加速度的参考系, 此时 $\frac{d\boldsymbol{\omega}_0}{dt} = 0, \mathbf{a}_0 = 0$, 并且由图 5.2 得

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_0 \times (\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{r}) &= \boldsymbol{\omega}_0 (\boldsymbol{\omega}_0 \cdot \mathbf{r}) - \omega_0^2 \mathbf{r} \\ &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP} \omega_0^2 = -\omega_0^2 \mathbf{R}. \end{aligned}$$

于是 (1.8) 式简化为

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' - \omega_0^2 \mathbf{R} + 2\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{v}', \quad (1.9)$$

式中 $R = BP$ 为质点 P 到转动轴的距离, $-\omega_0^2 \mathbf{R}$ 是质点的向心加速度. 所以, 等速旋转而没有平动加速度的参考系中的牵连加速度只包含向心加速度.

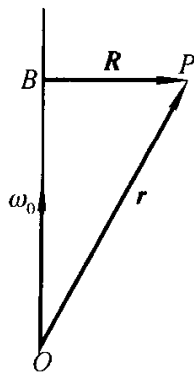


图 5.2

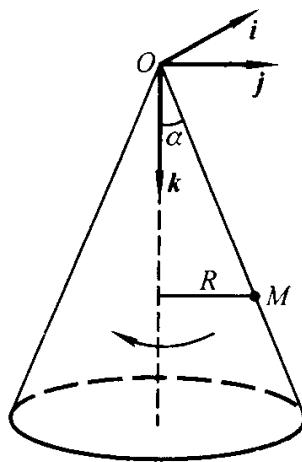


图 5.3

【例 1】 质点 M 离开圆锥顶点 O 沿母线以恒定相对加速度 a' 在槽内运动, 圆锥以等角速度 ω 绕其轴转动, 求经过时间 t 后, 质点 M 的绝对加速度. 设圆锥半顶角为 α .

解: 根据本题所给条件, 可按(1.9)式来确定 M 点的绝对加速度. 经过时间 t 后, 质点自 O 点运动到 M 点, 此时

$$v' = a't,$$

$$R = \frac{1}{2}a't^2 \sin \alpha.$$

取一组单位矢量 i, j, k 如图 5.3 所示, 则

$$a' = a'(\cos \alpha k + \sin \alpha j),$$

$$a_t = -\omega^2 R = -\frac{\omega^2 a't^2}{2} \sin \alpha j,$$

$$a_c = 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}' = -2\omega a't \sin \alpha i.$$

因此

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}' + \boldsymbol{a}_t + \boldsymbol{a}_c$$

$$= -2\omega a't \sin \alpha i + \left(a' \sin \alpha - \frac{\omega^2 a't^2}{2} \sin \alpha \right) j + a' \cos \alpha k.$$

【例 2】如图 5.4 所示的离心调速器, 两根长为 l 的对称杆 OA 和 OB 以角速度 ω_1 绕一固定铅直轴 OC 转动, 同时两杆又可以角速度 $\omega_2 = \dot{\theta}$ 绕 O 点转动. 求小球 A 和 B 的绝对速度.

解: 本题可用质点运动学或刚体运动学的方法来解决, 也可用本节相对运动学的方法来解决. 如取杆 OA 和 OB 所在平面为活动参考系 S' , 并取如图 5.5(a) 所示的一组单位矢量, 则 S' 系的角速度为

$$\boldsymbol{\omega}_0 = \omega_1 \boldsymbol{k},$$

小球 A 的位置矢量为

$$\boldsymbol{r} = l \sin \theta \boldsymbol{i} - l \cos \theta \boldsymbol{k},$$

因此小球的相对速度为

$$\boldsymbol{v}' = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = l\omega_2 (\cos \theta \boldsymbol{i} + \sin \theta \boldsymbol{k}),$$

由于 S' 系的运动而引起的牵连速度为

$$\boldsymbol{v}_t = \boldsymbol{\omega}_0 \times \boldsymbol{r} = l\omega_1 \sin \theta \boldsymbol{j}.$$

所以小球 A 的绝对速度为

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{v}_t = l\omega_2 (\cos \theta \boldsymbol{i} + \sin \theta \boldsymbol{k}) + l\omega_1 \sin \theta \boldsymbol{j}. \quad (1)$$

我们在前面的讨论中, 都是把单位矢量 i, j, k 取为固定在参考系 S' 中随 S' 一起运动的, 即 i, j, k 是 S' 系中固定坐标(直角坐标)的单位矢量. 但是在 S' 系中我们也可取活动坐标.

例如可取图 5.5(b) 中所示的一组单位矢量, 这时 $\frac{d\tilde{\boldsymbol{i}}}{dt} \neq 0$, 而是

$$\frac{d\tilde{\boldsymbol{i}}}{dt} = \boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{i} = \omega_2 \boldsymbol{j}.$$

在这样一组单位矢量中,

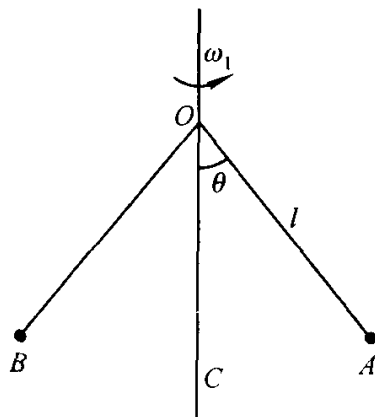


图 5.4

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= l\mathbf{i}, \\ \boldsymbol{\omega}_0 &= \omega_1(-\cos\theta\mathbf{i} + \sin\theta\mathbf{j}), \\ \tilde{\mathbf{v}}' &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} = l\omega_2\mathbf{j}, \\ \mathbf{v}_1 &= \boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{r} = -l\omega_1\sin\theta\mathbf{k}, \end{aligned}$$

所以得

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_1 = l\omega_2\mathbf{j} - l\omega_1\sin\theta\mathbf{k}. \quad (2)$$

和(1)比较,由于单位矢量的选取不一样,因此 \mathbf{v} 在 \mathbf{i} 、 \mathbf{j} 、 \mathbf{k} 上的投影也不一样.但 \mathbf{v} 的大小只和参考系有关,与 \mathbf{i} 、 \mathbf{j} 、 \mathbf{k} 的选取无关,无论由(1)或(2)式均可得

$$v = l\sqrt{\omega_2^2 + \omega_1^2\sin^2\theta}. \quad (3)$$

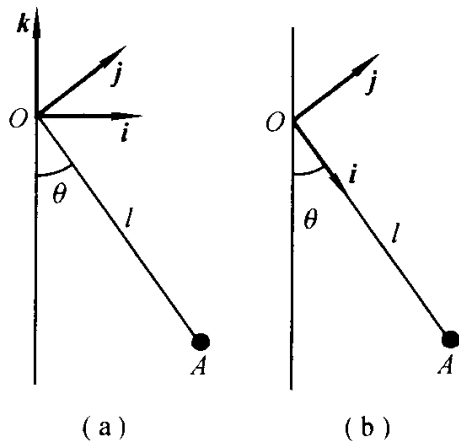


图 5.5

图 5.5 中所选取的两组单位矢量,对 S 系来说,(a)是柱面坐标,(b)是球面坐标,两者都是固定参考系中的活动坐标.但对 S' 系来说,(a)是直角坐标,(b)是平面极坐标,前者是活动参考系中的固定坐标,后者是活动参考系中的活动坐标.我们采用相对运动的方法解题时,一定要把参考系和坐标系分清楚.单位矢量 \mathbf{i} 、 \mathbf{j} 、 \mathbf{k} 的选取是和参考系无关的,而它们对时间的微商则和参考系有关.不要把牵连速度 $\mathbf{v}_1 = \boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{r}$ 中的 $\boldsymbol{\omega}_0$ 与 $\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i}$ 或 $\tilde{\frac{d\mathbf{i}}{dt}} = \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{i}$ 中的 $\boldsymbol{\omega}$ 和 $\boldsymbol{\omega}'$ 混为一谈. $\boldsymbol{\omega}_0$ 只和参考系的选取有关,和 \mathbf{i} 、 \mathbf{j} 、 \mathbf{k} 的选取无关; $\boldsymbol{\omega}$ 只和 \mathbf{i} 、 \mathbf{j} 、 \mathbf{k} 的选取有关,和 S' 是完全无关的; $\boldsymbol{\omega}'$ 则既和 S' 的选取有关,也和 \mathbf{i} 、 \mathbf{j} 、 \mathbf{k} 的选取有关.在本题中,只要选定杆 OA 和 OB 所在的平面为活动参考系,则不论选取怎样的 \mathbf{i} 、 \mathbf{j} 、 \mathbf{k} , $\boldsymbol{\omega}_0$ 总等于 $\boldsymbol{\omega}_1$. $\boldsymbol{\omega}$ 和 $\boldsymbol{\omega}'$ 在(a)、(b)两种情况下不一样:

$$\text{对(a)来说,} \quad \frac{d\mathbf{i}}{dt} = \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{i}, \quad \tilde{\frac{d\mathbf{i}}{dt}} = 0;$$

$$\text{对(b)来说,} \quad \frac{d\mathbf{i}}{dt} = (\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2) \times \mathbf{i}, \quad \tilde{\frac{d\mathbf{i}}{dt}} = \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{i}.$$

§ 5.2 非惯性系中的牛顿动力学方程 惯性力

在惯性系中,质点运动的动力学方程可由牛顿运动方程 $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$ 给出,这里的 \mathbf{a} 为质点在惯性系 S 中的加速度.上节我们给出了不同参考系 S 和 S' 之间的速度和加速度的变换关系,利用它就可以由惯性系 S 中的质点运动方程导出非惯性系 S' 中的质点运动方程.

将(1.8)代入 $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$ 中得

$$m \left[\mathbf{a}' + \mathbf{a}_0 + \frac{d\boldsymbol{\omega}_0}{dt} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega}_0 \times (\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{r}) + 2\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{v}' \right] = \mathbf{F},$$

或

$$ma' = F - m \left[a_0 + \frac{d\omega_0}{dt} \times r + \omega_0 \times (\omega_0 \times r) \right] - 2m\omega_0 \times v', \quad (2.1)$$

和惯性系中的牛顿第二定律相比,可以看到只要引入两项惯性力:

$$F_t = -ma_t = -m \left[a_0 + \frac{d\omega_0}{dt} \times r + \omega_0 \times (\omega_0 \times r) \right], \quad (2.2)$$

$$F_c = -ma_c = -2m\omega_0 \times v', \quad (2.3)$$

则非惯性系中的质点动力学方程将和惯性系中具有同样的形式:

$$ma' = F + F_t + F_c. \quad (2.4)$$

F_t 称为牵连惯性力, F_c 称为科里奥力. 在等速旋转、平动加速度为零的非惯性系中,由(1.9)式得牵连惯性力为

$$F_t = -ma_t = m\omega_0^2 R. \quad (2.5)$$

【例】 图 5.6 是记录横向振动的地震仪的简图. 在地下室中,有一长为 l 的普通的摆. 在不发生地震时,它处于铅直的平衡位置 OM . 当发生横向地震时,将引起摆相对于地下室的摆动. 若地震的规律为简谐振动,即摆的悬挂点 A 的运动为 $OA = x_{1A} = a \sin \omega t$, 求摆的运动规律.

解: 取两个参考系, Ox_1y_1 是固定不动的惯性系 S , Axy 是固结于地下室而在地震时跟随地面一起运动的非惯性系 S' . 在仪器上记录下来的是摆在 S' 系中的运动规律.

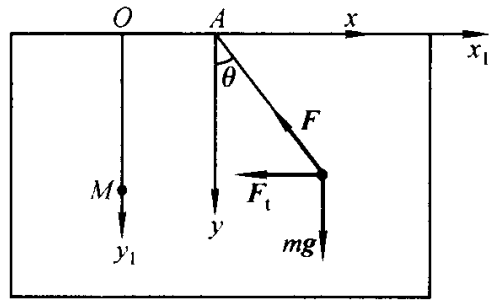


图 5.6

在 S' 系中,质点 m 受到三个力:重力 mg , 摆杆的约束力 F 和牵连惯性力 F_t . 取平面极坐标, e_θ 方向的运动方程为

$$ml \ddot{\theta} = mg \cos \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) - F_t \cos \theta.$$

将 $F_t = -m \ddot{x}_{1A} = ma\omega^2 \sin \omega t$ 代入上式得

$$l \ddot{\theta} + g \sin \theta = -a\omega^2 \cos \theta \sin \omega t. \quad (1)$$

上式就是摆在地下室中由于横向地震所引起的运动微分方程,通常这种振动是很小的,因此可作近似:

$$x = l \sin \theta \approx l\theta, \quad \cos \theta \approx 1,$$

这样(1)式就简化为

$$\ddot{x} + \frac{g}{l}x = -a\omega^2 \sin \omega t. \quad (2)$$

不难看出这是一个强迫振动的微分方程,在这里重力 mg 的切线分量起了恢复力的作用,而牵连惯性力 F_t 就起了周期性干扰力的作用. 摆的固有频率为

$$\omega_c = \frac{g}{l}. \quad (3)$$

根据强迫振动的理论得摆的相对振动的振幅为

$$b = \frac{-a\omega^2}{\omega_e^2 - \omega^2} = \frac{a}{1 - \left(\frac{\omega_e}{\omega}\right)^2}.$$

从上式可知,欲使地震仪记录的振幅 b 和实际振幅 a 间误差很小,必须满足条件

$$\omega_e \ll \omega. \quad (4)$$

即摆的固有频率应低于地震可能有的最低频率,所以地震仪的固有频率都很低.

由(2.4)式可以很容易证明,引入惯性力 \mathbf{F}_i 和 \mathbf{F}_c 后,不仅牛顿第二定律的形式在非惯性系中保持不变,而且质点动量定理,角动量定理和动能定理的形式也保持不变. 例如由 $\mathbf{L}' = \mathbf{r}' \times m\mathbf{v}'$ 得

$$\frac{\widetilde{d}\mathbf{L}'}{dt} = \frac{\widetilde{d}}{dt}(\mathbf{r}' \times m\mathbf{v}') = \mathbf{r}' \times m\mathbf{a}',$$

将(2.4)式代入上式即得

$$\frac{\widetilde{d}\mathbf{L}'}{dt} = \mathbf{r}' \times (\mathbf{F} + \mathbf{F}_i + \mathbf{F}_c). \quad (2.6)$$

这就是非惯性系中质点的角动量定理. 类似地可以证明:

$$\frac{\widetilde{d}\mathbf{p}'}{dt} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_i + \mathbf{F}_c, \quad (2.7)$$

$$\widetilde{d}T' = (\mathbf{F} + \mathbf{F}_i + \mathbf{F}_c) \cdot \widetilde{d}\mathbf{r}'. \quad (2.8)$$

它们就是非惯性系中质点的动量定理和动能定理,式中 $\mathbf{p}' = m\mathbf{v}'$ 和 $T' = \frac{1}{2}m\mathbf{v}'^2$ 分别为非惯性系中质点的动量和动能.

§ 5.3 拉格朗日函数的不确定性 非惯性参考系中的拉格朗日函数

完整、保守的质点系在惯性系中的拉格朗日函数和拉格朗日方程为

$$L(q, \dot{q}, t) = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 - V,$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, s.$$

在非惯性系中,如果拉格朗日方程保持上述的形式不变,则拉格朗日函数中的 v_i 应根据两个参考系之间的速度变换关系(1.7)式进行变换. 变换后的拉格朗日函数一般不再是 $\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^2 - V(\mathbf{r}')$ 的形式,那么在非惯性参考系中的拉格朗日函数应该怎样来写呢?

为了使非惯性系中的拉格朗日函数写得比较简洁,我们先来证明一个定理:两个拉格朗日函数 L_1 和 L_2 ,如果只相差一个坐标 q_a 和时间 t 的函数 $f(q, t)$ 的全微商 df/dt ,则这两个拉格朗日函数是等价的,即拉格朗日函数准确到相差一个坐标和时间的函数的全微商. 证明如下:

设

$$L_2 = L_1 + \frac{df(q, t)}{dt}, \quad (3.1)$$

我们只要证明由 L_1 和 L_2 所得出的运动方程相同即可. 为简单起见,我们假定体系只有一个广义坐标. 将(3.1)式代入上述拉格朗日方程便可看到,要证明 L_1 和 L_2 等价,只要证明

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \left(\frac{df}{dt} \right) - \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{df}{dt} \right) = 0 \quad (3.2)$$

即可. 因为 f 是 q 和 t 的函数,所以

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial f}{\partial t}, \quad \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{df}{dt} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial q^2} \dot{q} + \frac{\partial^2 f}{\partial q \partial t},$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \left(\frac{df}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial q} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial q^2} \dot{q} + \frac{\partial^2 f}{\partial q \partial t}.$$

代入(3.2)便可证明.

因此由(3.1)式所规定的 L_1 和 L_2 是等价的.

现在再来对拉格朗日函数进行变换. 我们分两步进行. 设有三个参考系,它们分别为 S, S_1 和 S' . S 为惯性系, S_1 为相对于 S 以速度 $v_0(t)$ 作平动的参考系, S' 和 S_1 有共同的原点,但相对于 S_1 以角速度 $\omega_0(t)$ 转动. 这样 S' 相对 S 既有平动,又有转动,如图 5.7 所示.

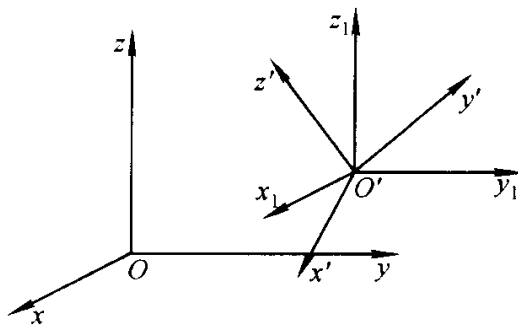


图 5.7

设粒子在 S 系中的速度为 v , 在 S_1 中的速度为 v_1 , 则

$$v = v_1 + v_0(t).$$

所以 S 系中单粒子的拉格朗日函数可表示为

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} m (v_1 + v_0)^2 - V \\ &= \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} m v_0^2 + m v_1 \cdot v_0 - V. \end{aligned} \quad (3.3)$$

因 $v_0^2(t)$ 是已知的函数, 我们总可以把它写成为 $df(q, t)/dt$ 的形式, 因此可以从(3.3)式中去掉. 此外 $v_1 = \frac{dr_1}{dt}$, 其中 r_1 为 S_1 系中粒子的位置矢量, 因此(3.3)式中第三项可改写为

$$m \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_0 = \frac{d}{dt}(m \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{v}_0) - m \mathbf{r}_1 \cdot \frac{d\mathbf{v}_0}{dt}.$$

将此式代入(3.3)式, 再次去掉 $\frac{d}{dt}(m \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{v}_0)$ 项, 最后得到

$$L = L_1 = \frac{1}{2} m v_1^2 - m \mathbf{r}_1 \cdot \frac{d\mathbf{v}_0}{dt} - V. \quad (3.4)$$

这就是用平动参考系中的位置 r_1 和速度 v_1 来表示惯性系中的拉格朗日函数的一般形式.

现在再将 r_1 和 v_1 用 S' 系中的 r' 和 v' 来表示. 粒子在 S' 中的 v' 和 v 的关系为

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{r}'.$$

将此式代入(3.4)式, 注意到 S_1 系和 S' 系中粒子的位置矢量 r_1 和 r' 是相同的, 于是得

$$\begin{aligned} L = L' &= \frac{1}{2} m v'^2 + m \mathbf{v}' \cdot (\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{r}') + \\ &\frac{1}{2} m (\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{r}')^2 - m \mathbf{r}' \cdot \frac{d\mathbf{v}_0}{dt} - V. \end{aligned} \quad (3.5)$$

这就是用任意的非惯性系 S' 中的位置 r' 和速度 v' 来表示惯性系中自由粒子的拉格朗日函数的一般形式. 它比 $L = \frac{1}{2} m (\mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{r}' + \mathbf{v}')^2 - V$ 要简单一些, 但又不是 $\frac{1}{2} m v'^2 - V$. 拉格朗日方程仍保持原来的形式

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \mathbf{v}'} - \frac{\partial L'}{\partial \mathbf{r}'} = 0$$

不变. 由于拉格朗日函数是标量, 广义坐标和广义速度也都是标量(上式中的 $\frac{\partial L'}{\partial \mathbf{v}'}$ 和 $\frac{\partial L'}{\partial \mathbf{r}'}$ 只是一种简写, 并不意味着它们是矢量), 而 $\frac{d}{dt}$ 和 $\frac{\tilde{d}}{dt}$ 对标量的作用是一样的, 因此上式又可写成

$$\frac{\tilde{d}}{dt} \left(\frac{\partial L'}{\partial \mathbf{v}'} \right) - \frac{\partial L'}{\partial \mathbf{r}'} = 0. \quad (3.6)$$

(3.5)和(3.6)合起来就是非惯性系中拉格朗日形式的动力学方程.

【例1】 在非惯性系中由拉格朗日方程导出单粒子的牛顿运动方程.

解: 由(3.5)式得

$$\frac{\partial L'}{\partial \mathbf{v}'} = m\mathbf{v}' + m(\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{r}'), \quad (1)$$

$$\frac{\partial L'}{\partial \mathbf{r}'} = -m\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{v}' - m\boldsymbol{\omega}_0 \times (\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{r}') - m \frac{d\mathbf{v}_0}{dt} - \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}'}. \quad (2)$$

将(1)、(2)式代入(3.6)式,化成标量形式,再经过整理得:

$$\begin{aligned} m \frac{\tilde{d}\mathbf{v}'}{dt} &= -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}'} - m \left[\frac{d\mathbf{v}_0}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\omega}_0}{dt} \times \mathbf{r}' + \right. \\ &\quad \left. \boldsymbol{\omega}_0 \times (\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{r}') \right] - 2m(\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{v}') \\ &= \mathbf{F} - m\mathbf{a}_i - m\mathbf{a}_c, \end{aligned}$$

和上节所得出的结果相同.

【例 2】 质量为 m 的小环 M , 套在半径为 R 的光滑圆圈上, 并可沿着圆圈滑动. 如圆圈在水平面内以角速度 ω_1 绕圆圈上某点 O 转动, 求小环沿圆周的运动微分方程.

解: 如图 5.8 所示, 取两个坐标系 Oxy 和 $O'x'y'$, O' 为圆圈的中心, $O'x'y'$ 是固定在圆圈上的. 小环 M 对 Oxy 的运动是绝对运动, 对 $O'x'y'$ 是相对运动. 我们可用两种不同的观点来处理问题:

(1) 站在圆圈上来看问题, 把 $O'x'y'$ 看作活动参考系, 取 θ 为广义坐标, 则体系的拉格朗日方程为

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L'}{\partial \theta} = 0, \quad (1)$$

拉格朗日函数与(3.5)式相同

$$\begin{aligned} L' &= \frac{1}{2} m v'^2 + m \mathbf{v}' \cdot (\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{r}') + \\ &\quad \frac{1}{2} m (\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{r}')^2 - m \mathbf{r}' \cdot \frac{d\mathbf{v}_0}{dt}. \quad (2) \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_0 &= \omega_1 \mathbf{k}, \quad \mathbf{r}' = R\mathbf{e}_r, \\ \mathbf{v}' &= \frac{\tilde{d}}{dt} \mathbf{r}' = \frac{\tilde{d}}{dt} (R\mathbf{e}_r) = R\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta, \\ \mathbf{v}_0 &= \frac{d}{dt} (\overrightarrow{OO'}) = \frac{d}{dt} (R\mathbf{i}) = R\omega_1 \mathbf{j}, \\ \frac{d\mathbf{v}_0}{dt} &= -R\omega_1^2 \mathbf{i}. \end{aligned}$$

将它们代入(2)得

$$L' = \frac{1}{2} m R^2 (\dot{\theta}^2 + 2\dot{\theta}\omega_1 + \omega_1^2 + 2\omega_1^2 \cos \theta). \quad (3)$$

将上式代入(1)得

$$\ddot{\theta} + \omega_1^2 \sin \theta = 0. \quad (4)$$

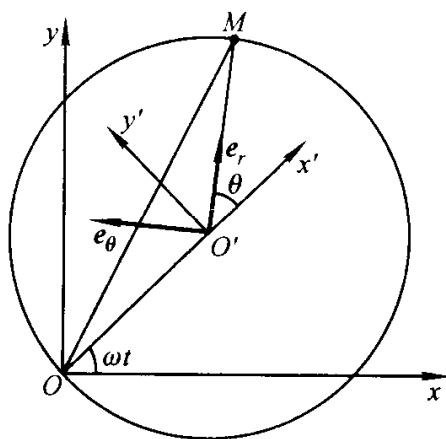


图 5.8

这就是小环 M 的运动方程.

(2) 我们也可以站在惯性系 Oxy 上来看这个问题, 这时可把 $O'x'y'$ 看作为一个活动坐标系, 体系的拉格朗日方程为

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0, \quad (5)$$

拉格朗日函数为

$$L = \frac{1}{2} m v^2. \quad (6)$$

其中

$$\begin{aligned} v = \dot{\mathbf{r}} &= \frac{d}{dt} \overrightarrow{OM} = \frac{d}{dt} (\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}) \\ &= \frac{d}{dt} (R\mathbf{i}) + \left(\frac{d}{dt} + \boldsymbol{\omega}_0 \times \right) R\mathbf{e}_r \\ &= R\omega_1 \mathbf{j} + R\dot{\theta} \mathbf{e}_\theta + R\omega_1 \mathbf{e}_\theta. \end{aligned} \quad (7)$$

将(7)式代入(6)式得

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} m R^2 [\omega_1 \mathbf{j} + (\dot{\theta} + \omega_1) \mathbf{e}_\theta]^2 \\ &= \frac{1}{2} m R^2 [2\omega_1^2 + \dot{\theta}^2 + 2(\omega_1 + \dot{\theta})\omega_1 \cos \theta + 2\dot{\theta}\omega_1]. \end{aligned} \quad (8)$$

将(8)式代入(5)式, 经过整理后得到和(4)式相同的方程.

从上面两种不同的处理方法中可以看到, 只要广义坐标选取得相同, 不论用哪种方法, 所得到的运动方程是相同的, 但拉格朗日函数(3)和(8)则可以不一样. 这是因为拉格朗日函数可以相差一个广义坐标和时间的函数的全微商, (8)式和(3)式相差的项正是这种形式的项.

*§ 5.4 地球自转的动力学效应

地球不是一个严格的惯性系. 地球自转的角速度为

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{24 \times 3600} \text{ s}^{-1} \approx 7.29 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}.$$

地球的半径为 $R = 6.37 \times 10^6 \text{ m}$. 因此由于地球自转所引起的向心加速度

$$a_c \leq \omega_0^2 R = 0.0338 \text{ m/s}^2 = 3 \times 10^{-3} g.$$

式中 g 为重力加速度. 因此在 g 起作用的问题中, 如果计算精度达到 10^{-3} 量级时, 必须考虑重力加速度的这一修正. 由于地球自转所引起的科里奥利加速度为

$$a_c \leq 2\omega_0 v,$$

由此引起的线偏离和角偏离分别为

$$\Delta s \leq \frac{1}{2} a_c t^2 = \omega_0 v t^2,$$

$$\Delta\theta = \frac{\Delta s}{vt} \leq \omega_0 t.$$

对于短时间的运动,因 $\omega_0 \approx 10^{-5} \text{ s}^{-1}$,这一效应可以忽略.但对长时间的运动,这一效应就不能忽略了.

地球公转的角速度为地球自转角速度的 $1/365$. 地球离太阳的距离与地球半径之比为 $\frac{1}{4} \times 10^5$. 因此,地球公转的向心力与地球自转的向心力之比为

$$\left(\frac{1}{365}\right)^2 \times \frac{1}{4} \times 10^5 \approx 0.2,$$

科里奥利力之比为 $\frac{1}{365} \approx 0.03$. 因此由于地球公转所引起的非惯性效应比起地球自转的非惯性效应要小 $1 \sim 2$ 个数量级,一般均可忽略. 本节我们讨论地球自转的非惯性效应的一些重要例子.

(1) 重力加速度 g 随纬度 λ 的变化

在纬度为 λ 处,地面上质量为 m 的物体,对于地面上的观察者来说,受到两个力:地球的引力 F 和惯性离心力 F_t . 实际所观察到的重力 mg 是 F 和 F_t 的合力:

$$mg = F + F_t.$$

如果认为地球是均匀的刚性球体,则 F 的值各地相同. 但 F_t 的值随纬度 λ 而变,

$$F_t = mR\omega_0^2 \cos \lambda, \quad (4.1)$$

式中 R 为地球半径. 因此 mg 的大小和方向都随纬度 λ 而变,大小的变化反映在重力加速度 g 随 λ 的变化,方向的变化反映在 mg 的方向(即铅直方向)和引力 F 方向(即地球半径方向)之间的夹角 α 随 λ 的变化. 下面我们来找出 g 和 α 随 λ 而变化的函数关系.

将 F 、 F_t 和 mg 之间的关系用图 5.10 的三角形来表示. 从图中可看出:

$$F_t \sin \lambda = mg \sin \alpha, \quad (4.2)$$

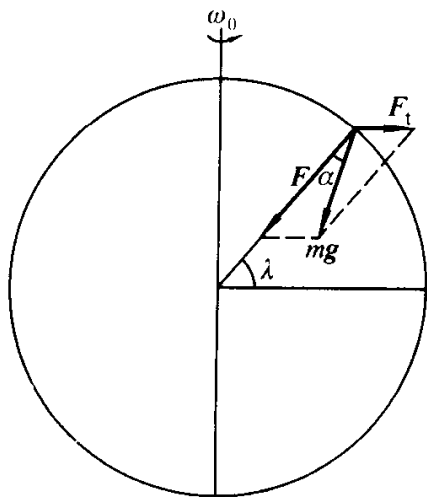


图 5.9

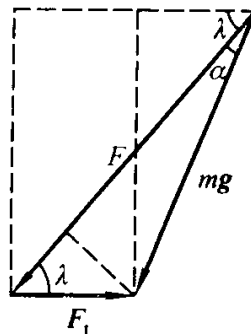


图 5.10

$$F \sin \lambda = mg \sin(\lambda + \alpha), \quad (4.3)$$

$$F = mg \cos \alpha + F_c \cos \lambda, \quad (4.4)$$

将(4.1)式代入(4.2)式得

$$\sin \alpha = \frac{R\omega_0^2 \sin 2\lambda}{2g}. \quad (4.5)$$

从上式可以看出, α 的值在纬度 45° 处最大. 如果我们把 $\lambda = 45^\circ$ 处实测的 $g = 9.8062 \text{ m/s}^2$ 的值和 ω_0 及 R 的值代入上式, 可算得

$$\alpha_{\max} \approx \frac{\omega_0^2 R}{2g} = 6'. \quad (4.6)$$

所以偏角 α 是很小的, 当 ω_0 是一级小量时, α 是二级小量.

在赤道处, $\lambda = \alpha = 0$, 由(4.1)式和(4.4)式得

$$F = m(g_0 + R\omega_0^2). \quad (4.7)$$

式中 g_0 是赤道地区的重力加速度. 将(4.7)式代入(4.3)式得

$$g = \frac{(g_0 + R\omega_0^2) \sin \lambda}{\sin \lambda \cos \alpha + \cos \lambda \sin \alpha}. \quad (4.8)$$

将(4.8)和(4.5)两式联立可解得 g 和 α 为 λ 的函数, 但这样解出来的 $g(\lambda)$ 和 $\alpha(\lambda)$ 将是很复杂的函数. 下面我们作一些近似. 首先将(4.5)式中的 g 用 g_0 来代替, 即

$$\sin \alpha \approx \alpha \approx \frac{R\omega_0^2}{2g_0} \sin 2\lambda. \quad (4.9)$$

然后将(4.9)式代入(4.8)式, 并取 $\cos \alpha \approx 1$, 得

$$\begin{aligned} g &\approx \frac{(g_0 + R\omega_0^2) \sin \lambda}{\sin \lambda + \cos \lambda \frac{R\omega_0^2}{2g_0} \sin 2\lambda} = \frac{g_0 + R\omega_0^2}{1 + \frac{R\omega_0^2 \cos^2 \lambda}{g_0}} \\ &\approx (g_0 + R\omega_0^2) \left(1 - \frac{R\omega_0^2 \cos^2 \lambda}{g_0} \right) \\ &\approx g_0 \left(1 + \frac{\omega_0^2 R}{g_0} \sin^2 \lambda \right). \end{aligned} \quad (4.10)$$

(4.10)和(4.9)就是 g 和 α 随 λ 改变的近似公式. 如果我们把 $\lambda = 45^\circ$ 时的 $g = 9.8062 \text{ m/s}^2$ 及 ω_0 和 R 的值代入(4.10)式, 则可得出 $g_0 = 9.7803 \text{ m/s}^2$. 于是我们得 g 的近似公式为

$$g = 9.7803(1 + 0.0053 \sin^2 \lambda) \text{ m/s}^2. \quad (4.11)$$

根据上式所算得 g 的变化如下表所示:

λ	0°	10°	20°	30°	40°
$g/(\text{m/s}^2)$	9.780 3	9.781 9	9.786 3	9.793 2	9.801 7
λ	50°	60°	70°	80°	90°
$g/(\text{m/s}^2)$	9.810 7	9.819 1	9.826 1	9.830 6	9.832 1

地球不是一个严格的球体,两极半径小,赤道半径大. 这使 g 随纬度的升高而增大的效应更显著,但比自转的影响要小.

由于这个原因,各地实测的 g 值比由(4.11)式所计算的值一般要大一些,如果把两个因素都考虑进去,就可以得到一个计算 g 的更精确的公式.

(2) 落体偏东

考虑到地球自转角速度 ω_0 是一个小量,略去 ω_0 的平方项,得质点相对于地球的运动方程为

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F} - 2m\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{v}'. \quad (4.12)$$

取固定在地球上的参考系 $Axyz$, x 轴向南, y 轴向东, z 轴垂直地面向上,如图 5.11 所示. 由于我们只保留 ω_0 的一级效应,因此重力方向和 z 轴平行. 而

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_0 &= \omega_0 \mathbf{e}_3 \\ &= \omega_0 (-\cos \lambda \mathbf{i} + \sin \lambda \mathbf{k}), \end{aligned} \quad (4.13)$$

式中 λ 为 A 点的纬度. 将(4.13)式代入(4.12)式得

$$\begin{cases} m \ddot{x} = F_x + 2m\omega_0 \dot{y} \sin \lambda, \\ m \ddot{y} = F_y - 2m\omega_0 (\dot{x} \sin \lambda + \dot{z} \cos \lambda), \\ m \ddot{z} = F_z + 2m\omega_0 \dot{y} \cos \lambda. \end{cases} \quad (4.14)$$

如果质点从有限高度 h 以初速 $\mathbf{v}' = 0$ 自由下落,不考虑阻力等其他力的作用,重力 mg 看成常数,则对(4.14)式积分可得

$$\begin{cases} \dot{x} = 2\omega_0 y \sin \lambda, \\ \dot{y} = -2\omega_0 [x \sin \lambda + (z - h) \cos \lambda], \\ \dot{z} = -gt + 2\omega_0 y \cos \lambda. \end{cases} \quad (4.15)$$

将(4.15)式代入(4.14)式,继续略去 ω_0^2 项,只保留到 ω_0 的一级项,得

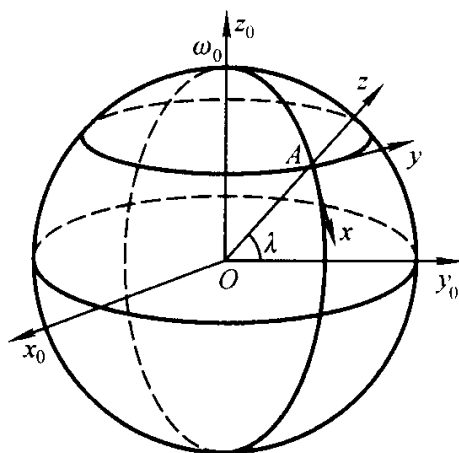


图 5.11

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0, \\ \ddot{y} = 2gt\omega_0 \cos \lambda, \\ \ddot{z} = -g. \end{cases} \quad (4.16)$$

再积分两次得

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = \frac{1}{3}gt^3\omega_0 \cos \lambda, \\ z = h - \frac{1}{2}gt^2. \end{cases} \quad (4.17)$$

消去 t 得落体的轨道方程为

$$y^2 = -\frac{8}{9} \frac{\omega_0^2 \cos^2 \lambda}{g} (z - h)^3. \quad (4.18)$$

这是位于东西铅直面内的半三次抛物线. 当落体到达地面时 $z = 0$, 由(4.18)式可得落体偏东的数值为

$$y = \frac{2\sqrt{2}}{3} \omega_0 h \sqrt{\frac{h}{g}} \cos \lambda. \quad (4.19)$$

落体偏东效应已被许多实验所证实.

(3) 傅科摆

假如在北极悬挂一摆, 使之作微振动, 在惯性系中的观察者看来摆的振动面始终在铅直平面内. 考虑到地球以角速度 ω_0 自转, 因此在非惯性系的地球上的观察者看来, 摆的振动面以角速度 $-\omega_0$ 转动. 这是傅科(Foucault)在 1860 年首先指出的, 借此可以直接证实地球是具有自转的. 除了在赤道以外, 其他各地都可观察到这种效应, 但在两极地区这种效应最显著, 下面对这个问题作一近似分析.

设摆长为 l , 摆锤的质量为 m , 摆杆的张力为 F , 取和上例相同的坐标系 $Axyz$, A 点为摆锤平衡时的位置, 则张力 F 的三个分量为

$$\begin{cases} F_x = -\frac{x}{l}F, \\ F_y = -\frac{y}{l}F, \\ F_z = \frac{l-z}{l}F, \end{cases} \quad (4.20)$$

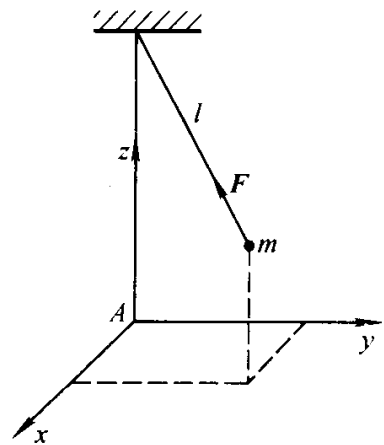


图 5.12

将它代入(4.12)式得摆的运动方程为

$$\begin{cases} m \ddot{x} = -\frac{x}{l}F + 2m\omega_0 \dot{y} \sin \lambda, \\ m \ddot{y} = -\frac{y}{l}F - 2m\omega_0 (\dot{x} \sin \lambda + \dot{z} \cos \lambda), \\ m \ddot{z} = \frac{l-z}{l}F - mg + 2m\omega_0 \dot{y} \cos \lambda. \end{cases} \quad (4.21)$$

外加一个约束方程

$$x^2 + y^2 + (l-z)^2 = l^2. \quad (4.22)$$

解这四个联立方程,即可得出摆的运动规律.但这一组方程很难严格求解.考虑到微振动的条件下 x 、 y 和 \dot{x} 、 \dot{y} 都是小量.计算中只需保留到一级小量,因而由(4.22)得

$$\begin{aligned} l-z &= \sqrt{l^2 - (x^2 + y^2)} \\ &= l \left(1 - \frac{x^2 + y^2}{2l^2} + \dots \right). \end{aligned}$$

因此, z 是二级小量, \dot{z} 和 \ddot{z} 也是二级小量.在忽略二级小量的情况下由(4.21)中的第三个方程可得 $F = mg$,代入另两个方程得:

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\omega_0 \dot{y} \sin \lambda + \omega^2 x = 0, \\ \ddot{y} + 2\omega_0 \dot{x} \sin \lambda + \omega^2 y = 0, \end{cases} \quad (4.23)$$

式中 $\omega^2 = g/l$.用 $i = \sqrt{-1}$ 乘上面的第二式,然后再与第一式相加,得一个复变数方程

$$\ddot{\xi} + i2\omega_0 \dot{\xi} \sin \lambda + \omega^2 \xi = 0, \quad (4.24)$$

其中

$$\xi = x + iy.$$

方程(4.24)的通解为

$$\xi = Ae^{n_1 t} + Be^{n_2 t}, \quad (4.25)$$

其中 A 、 B 为两个复常数,由初始条件决定. n_1 和 n_2 为特征方程

$$n^2 + i(2\omega_0 \sin \lambda)n + \omega^2 = 0$$

的两个根:

$$\begin{cases} n_1 = -i\omega_0 \sin \lambda + i\sqrt{\omega_0^2 \sin^2 \lambda + \omega^2} \approx -i\omega_0 \sin \lambda + i\omega, \\ n_2 = -i\omega_0 \sin \lambda - i\sqrt{\omega_0^2 \sin^2 \lambda + \omega^2} \approx -i\omega_0 \sin \lambda - i\omega. \end{cases} \quad (4.26)$$

将(4.26)式代入(4.25)式得

$$\xi = e^{-i(\omega_0 \sin \lambda)t} (Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}). \quad (4.27)$$

当地球没有自转,即 $\omega_0 = 0$ 时,由(4.27)得

$$\begin{aligned}\xi &= \xi_1 = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t} \\ &= (A+B)\cos \omega t + i(A-B)\sin \omega t = x' + iy'.\end{aligned}$$

所以

$$\begin{cases} x' = (A+B)\cos \omega t, \\ y' = (A-B)\sin \omega t. \end{cases} \quad (4.28)$$

上式表示当地球自转效应忽略时,摆锤走一椭圆轨道, x' 和 y' 分别为椭圆的两个主轴.当 $\omega_0 \neq 0$,即考虑了地球的自转效应时,由(4.27)式得

$$\begin{aligned}\xi &= x + iy = [\cos(\omega_0 t \sin \lambda) - i\sin(\omega_0 t \sin \lambda)](x' + iy') \\ &= [x' \cos(\omega_0 t \sin \lambda) + y' \sin(\omega_0 t \sin \lambda)] + \\ &\quad i[-x' \sin(\omega_0 t \sin \lambda) + y' \cos(\omega_0 t \sin \lambda)].\end{aligned} \quad (4.29)$$

所以

$$\begin{cases} x = x' \cos(\omega_0 t \sin \lambda) + y' \sin(\omega_0 t \sin \lambda), \\ y = -x' \sin(\omega_0 t \sin \lambda) + y' \cos(\omega_0 t \sin \lambda). \end{cases} \quad (4.30)$$

这表明摆锤平面作周期为

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

轨道为椭圆.另一方面此椭圆的轴 x' 和 y' 又以角速度 $-\omega_0 \sin \lambda$ 绕 Oz 轴转动,亦即摆的振动面以角速度 $-\omega_0 \sin \lambda$ 旋转,它们的几何关系如图 5.13 所示.

1851 年傅科在巴黎作了第一次这样的实验,他所用的摆长 $l = 67$ m,摆锤重 28 kg,巴黎的纬度为 49° , $\sin \lambda \approx 0.75$,摆锤所走的椭圆长轴为 3 m,摆的周期为 16 s,而椭圆旋转的周期则为 32 h.

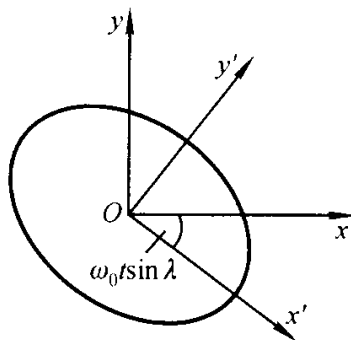


图 5.13

** § 5.5 拉莫尔进动 经典力学对 磁共振现象的解释

带电粒子作旋转运动时,除了机械角动量 L 外,同时必有磁矩 μ 存在,两者之间的关系表示为

$$\mu = \gamma L, \quad (5.1)$$

式中

$$\gamma = \frac{\mu}{L}, \quad (5.2)$$

称为旋磁比. 当 γ 为正时, $\boldsymbol{\mu}$ 和 \mathbf{L} 的方向相同; γ 为负时, $\boldsymbol{\mu}$ 和 \mathbf{L} 的方向相反. 下面我们以电子作圆轨道运动为例对这种关系作一说明.

根据磁矩的定义, 电子轨道运动的磁矩 μ_l 为

$$\mu_l = IS, \quad (5.3)$$

式中 I 是电子运动时所产生的电流, S 为电流所围面积. 设电子作半径为 R 的圆周运动, 其角速度为 ω , 则

$$I = -\frac{\omega}{2\pi}e, \quad S = \pi R^2,$$

式中 $(-e)$ 为电子电荷. 将它们代入(5.3)式得

$$\mu_l = -\frac{e}{2}\omega R^2. \quad (5.4)$$

电子绕半径为 R 的圆周运动时的机械角动量 L_l 为

$$L_l = |\mathbf{r} \times m_e \mathbf{v}| = m_e \omega R^2, \quad (5.5)$$

式中 m_e 为电子质量. 比较(5.4)和(5.5)两式, 并考虑到电子带负电, 它的运动方向和电流方向相反, 即得

$$\mu_l = -\frac{e}{2m_e}L. \quad (5.6)$$

所以电子轨道运动的旋磁比为

$$\gamma_e = -\frac{e}{2m_e}. \quad (5.7)$$

从电磁学中我们知道, 磁矩为 $\boldsymbol{\mu}$ 的粒子在磁场 \mathbf{B} 中将受到一个力矩

$$\mathbf{M} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B} \quad (5.8)$$

的作用. 因此将(5.1)式代入角动量定理得磁矩为 $\boldsymbol{\mu}$ 的粒子的运动方程为

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\gamma} \mathbf{L} \times \mathbf{B} = -\boldsymbol{\gamma} \mathbf{B} \times \mathbf{L}, \quad (5.9)$$

或

$$\frac{d\boldsymbol{\mu}}{dt} = -\boldsymbol{\gamma} \mathbf{B} \times \boldsymbol{\mu}. \quad (5.10)$$

我们以前曾指出, 常模矢量 \mathbf{A} 对时间的微商可表示为

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A},$$

式中 $\boldsymbol{\omega}$ 为 \mathbf{A} 转动的角速度. 将它和(5.9)、(5.10)式比较, 可知 \mathbf{L} 和 $\boldsymbol{\mu}$ 均为常模矢量, 在磁场 \mathbf{B} 的作用下, \mathbf{L} 和 $\boldsymbol{\mu}$ 的大小都不变, 但其方向则以角速度

$$\boldsymbol{\omega} = -\boldsymbol{\gamma} \mathbf{B} \quad (5.11)$$

绕磁场 \mathbf{B} 作进动. 当 $\boldsymbol{\mu}$ 和 \mathbf{L} 的方向相同时 (γ 为正, 如质子), $\boldsymbol{\omega}$ 的方向和 \mathbf{B} 方向相反, 如图 5.14(a) 所示; 当 $\boldsymbol{\mu}$ 和 \mathbf{L} 的方向相反时 (γ 为负, 如电子), $\boldsymbol{\omega}$ 的方向和 \mathbf{B} 方向相同, 如图 5.14(b) 所示. $\boldsymbol{\mu}$ 和 \mathbf{L} 的这种运动是由拉莫尔首先发现的, 所以这种运动称为拉莫尔(Larmor)进动, $\boldsymbol{\omega}$ 称为拉莫尔频率.

拉莫尔进动可用来定性解释磁共振(顺磁共振和核磁共振)现象. 磁共振是这样一种现象: 总角动量不为零的原子或自旋不为零的原子核, 在恒定外磁场 \mathbf{B}_0 中, 如在垂直 \mathbf{B}_0 的

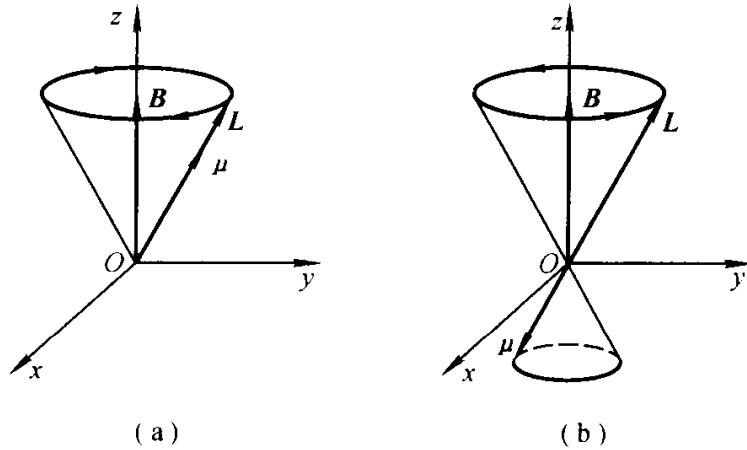


图 5.14

方向上再加上一个弱的交变磁场 B' , 则当 B' 的频率 ν 和 B_0 满足条件

$$\begin{cases} h\nu = g\mu_B B_0, & \text{顺磁共振,} \\ h\nu = g_N\mu_N B_0, & \text{核磁共振} \end{cases} \quad (5.12)$$

时, 将发生共振而大量吸收能量. 式中 $\mu_B = eh/2m_e$ 是玻尔(Bohr)磁子, $\mu_N = eh/2m_p$ 是核磁子, g 和 g_N 称为朗德(Landé)因子, 视不同的原子和原子核而异. 下面我们从经典力学角度来讨论一下这个问题.

如图 5.15 所示, 设 $Oxyz$ 是空间固定坐标系, Oz 轴的方向为外磁场 B_0 的方向. 设粒子的磁矩方向和角动量方向一致, 根据拉莫尔进动理论, 磁矩 μ 将以角速度

$$\omega^0 = -\gamma B_0 = -\omega_L^0 k \quad (5.13)$$

绕 Oz 轴作进动, $\omega_L^0 = \gamma B_0$.

现在我们在垂直 B_0 的方向(设为 Ox 轴方向)加一交变磁场:

$$B' = 2B_1 \cos \omega t i. \quad (5.14)$$

这个交变磁场可看成是两个大小相等, 一个左旋, 一个右旋的圆偏振磁场 B_1 和 B_2 的叠加(图 5.16):

$$\begin{aligned} B' &= B_1 + B_2, \\ \begin{cases} B_1 = B_1 \cos \omega t i - B_1 \sin \omega t j, \\ B_2 = B_1 \cos \omega t i + B_1 \sin \omega t j. \end{cases} \end{aligned} \quad (5.15)$$

B_1 的旋转方面和磁矩 μ 的进动方向相同, B_2 则相反. 现在我们暂不考虑 B_2 , 只看附加了 B_1 后所出现的新情况.

在 $Oxyz$ 系中看来, 根据拉莫尔进动的理论, 此时磁矩 μ 不再绕 B_0 作进动, 而是绕

$$B_e = B_0 + B_1$$

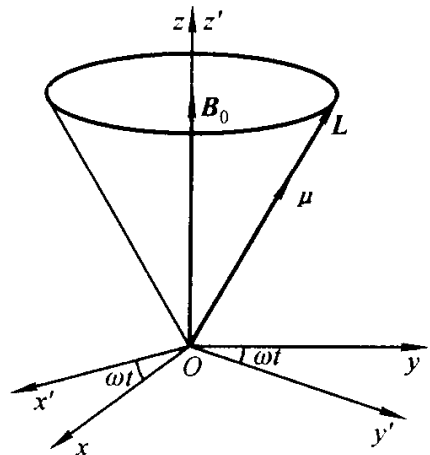


图 5.15

作拉莫尔进动. 由于 B_0 的方向是不断变化的, 故很难直观地看出 μ 究竟是怎样运动的.

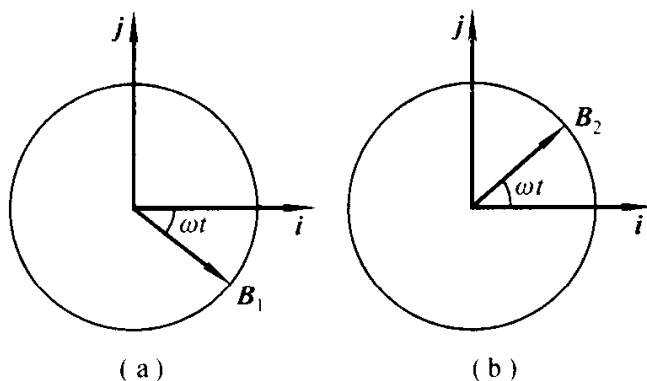


图 5.16

现在我们取图 5.15 中的另一个参考系 $Ox'y'z'$, 其中 Oz' 轴和 Oz 重合, Ox' 轴以角速度

$$\boldsymbol{\omega} = -\omega \mathbf{k} \quad (5.16)$$

绕 Oz 轴旋转. 在 $Ox'y'z'$ 系中, 磁矩 μ 所受到的总外场为

$$\mathbf{B}_e = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1 = B_0 \mathbf{k}' + B_1 \mathbf{i}'. \quad (5.17)$$

在惯性系 $Oxyz$ 中, 磁矩 μ 的运动方程为

$$\frac{d\boldsymbol{\mu}}{dt} = -\gamma \mathbf{B}_e \times \boldsymbol{\mu}.$$

利用

$$\frac{d}{dt} = \frac{\tilde{d}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times,$$

得磁矩 μ 在 $Ox'y'z'$ 系中的运动方程为

$$\frac{\tilde{d}\boldsymbol{\mu}}{dt} = -\gamma \mathbf{B}'_e \times \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\omega}'_L \times \boldsymbol{\mu}, \quad (5.18)$$

其中

$$\mathbf{B}'_e = \left(B_0 - \frac{\omega}{\gamma} \right) \mathbf{k}' + B_1 \mathbf{i}' = \frac{1}{\gamma} (\omega_L^0 - \omega) \mathbf{k}' + B_1 \mathbf{i}'. \quad (5.19)$$

(5.18) 式中的 ω'_L 为 $Ox'y'z'$ 系中新的拉莫尔进动频率, 其大小为

$$\omega'^2_L = (\omega_L^0 - \omega)^2 + (\gamma B_1)^2. \quad (5.20)$$

下面我们分几种情况对这一结果作讨论.

(1) 若 $B_1 = 0$, $\omega = \omega_L^0$, 即没有附加磁场, 且 $Ox'y'z'$ 系以原拉莫尔频率 ω_L^0 作旋转. 这时由 (5.19) 式得 $\mathbf{B}'_e = 0$, 它表明在 $Ox'y'z'$ 系中磁矩 μ 不会发生进动, 其方向是固定不变的. 我们不妨假定 μ 在 $Oy'z'$ 平面内, 于是 μ 将跟着 $Oy'z'$ 平面一起转动, 并且与 Oz' 轴的夹角 θ 不变. 从 $Oxyz$ 系中看这一现象, 就是 μ 以角速度 $-\omega_L^0 \mathbf{k}$ 在作进动. 磁矩 μ 在磁场 \mathbf{B} 中的势能为

$$V = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} = -\mu B \cos \theta,$$

即然 μ 和 \mathbf{B} 的夹角 θ 不变, 所以体系的能量也不变.

(2) 若 $B_1 \neq 0$, $\omega = \omega_L^0$. 这时由 (5.19) 式得 $\mathbf{B}'_e = B_1 \mathbf{i}'$. 这表示在 $Ox'y'z'$ 系中, μ 将绕 Ox' 轴作进动, 它使 μ 和 \mathbf{B}_0 的夹角增大, 从而使体系的能量增大. 由于 $B_1 \ll B_0$, 进动十分缓

慢,因此能量吸收过程可持续进行. 这就是上面所说的磁共振现象. 用 $\hbar = h/2\pi$ 乘 $\omega = \omega_L^0$ 两边,即可得到频率条件(5.12).

(3) 若 $B_1 \neq 0$, 但 $\omega \neq \omega_L^0$. 这时由(5.19)式知 \mathbf{B}'_e 并不在 Ox' 轴方向, 因而 $\boldsymbol{\mu}$ 将不是绕 Ox' 轴作进动, 因此 $\boldsymbol{\mu}$ 和 \mathbf{B}_0 间的夹角 θ 随时间增加和减少交替出现, 从而粒子的能量也是增加和减少交替出现. 因为 B_1 的频率极高, 因此平均来说观察不到能量的吸收, 共振现象不可能出现.

上面我们只讨论了 B_1 的作用, 现在再来看 B_2 的作用. B_2 的旋转方向和 ω_L^0 的方向相反, 因此在满足频率条件 $\omega = \omega_L^0$ 时, 由(5.19)式, \mathbf{B}'_e 将是

$$\mathbf{B}'_e = \frac{2}{\gamma} \omega_L^0 \mathbf{k}' + B_1 \mathbf{i}',$$

不可能在 Ox' 轴方向, 它和情况(3)一样, 平均效应为零, 可以不必考虑.

以上是从经典力学的角度来讨论单个粒子的磁共振现象的. 实际问题中样品总是由大量粒子组成的, 必须考虑统计规律性. 并且对于原子领域的问题, 经典力学应由量子力学取代, 所以上述理论只是一种定性的近似理论.

习 题

5.1 分别用质点运动学、刚体运动学和相对运动学方法求 § 5.1 例 2 中质点 A 的速度, 每一种方法又分别用直角坐标、柱坐标和球坐标三种坐标的单位矢量表示.

5.2 在上题中, 选一种你认为最方便的单位矢量, 用相对运动学的方法求质点 A 的加速度.

5.3 半径为 R 的圆周在自身平面内以角速度 ω 绕圆周上一固定点 C 沿逆时针方向转动, 一质点 M 在此圆周上以相对速度 $2R\omega$ 沿顺时针方向运动. 开始时质点 M 和 C 点在同一直径的两端. 求质点 M 的绝对速度、绝对加速度和轨迹.

5.4 螺旋桨飞机在空中以速率 v 沿半径为 R 的水平圆形轨道转弯, 求螺旋桨和铅垂轴成 θ 角的位置时, 螺旋桨端点的速度和加速度. 已知螺旋桨长为 l , 自转角速度为 ω .

5.5 质量为 m 的质点位于光滑水平面上, 此平面以角速度 ω 绕过平面上 O 点的铅直轴转动. 设质点受 O 点的吸引, 引力为 $\mathbf{F} = -m\omega^2 \mathbf{r}$, \mathbf{r} 为质点相对于 O 点的矢径, 证明在任何起始条件下, 质点以角速度 2ω 作圆周运动.

5.6 一光滑平面以角速度 ω 绕过此平面上 O 点的一固定轴旋转, 轴与此平面垂直. 有一质量为 m 的质点 B , 在此平面内受到 A 点的吸引, A 与 O 的距离为 d , 吸引力与质点到力心 A 点的距离 AB 成正比, 比例常数为 $4\omega^2 m$. 证明: 如当 $t=0$ 时, 质点自离 O 点 $\frac{8}{3}d$ 处以初速度 $\frac{4}{3}d\omega$ 垂直于 OB 发射, 则质点相对于平面作圆周运动, 并求质点相对于固定坐标的轨迹.

5.7 一半径为 R 的圆环以角速度 $\sqrt{\frac{ng}{R}}$ 绕其竖直直径旋转, 环上套一小珠, 今给小珠以初始速度, 使它可以自环的最低点沿环升至最高点, 证明质点走完第一象限所需的时间为

$$\sqrt{\frac{R}{(n+1)g}} \ln(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}).$$

5.8 有一帆船在赤道区域自东向西行驶,因无风停了下来,有人建议船长,将船上一只重为 200 kg 的锚升至 20 m 高的桅杆顶端,可使船继续向前行驶(船的其余部分的重量为 2 000 kg). 你认为这一建议是否可行,试定量解释之.

5.9 光滑钢丝圆圈的半径为 r ,其平面为铅直,圆圈上套有一质量为 m 的小环,如圆圈以加速度 a 沿竖直方向运动,求小环的相对速度及圆圈对小环的作用力.

5.10 一轮船以速度 v 沿赤道航行,试证明物体重量有 $\frac{2v\omega}{g}$ 的误差, ω 为地球转动角速度.

5.11 在北纬 λ 处将质量为 m 的物体垂直上抛,到达 h 高后又落回地面,不计空气阻力,求落地点和抛射点的偏离距离.

5.12 在北纬 λ 的地球表面,向正东以初速 v_0 、仰角 α 发射炮弹,不计空气阻力,求炮弹落地时的横向偏离.

5.13 对称轴为铅直的抛物线形金属丝,以均匀角速度 ω 绕对称轴转动,抛物线的方程式为 $x^2 = 4ay$. 有一质量为 m 的小环套在此金属丝上. 求小环的运动方程.

5.14 一质点约束在动平面 Oxy 上运动. 此平面用球面铰链连接于 O 点,它的法线 Oz 绕固定的 Oz_0 轴以等角速度 ω 转动, Oz 和 Oz_0 的夹角为 α . 质点受到 O 点的吸引,引力大小与质点离 O 点的距离成正比. 求此质点的运动.

5.15 长为 l 的轻杆 OA 可绕水平轴 Ox 转动, Ox 轴以角速度 ω 绕铅垂轴 Oz 转动,在 A 点有一质量为 m 的质点,即旋转单摆. 求质点的运动微分方程及相对平衡位置.

5.16 讨论匀加速参考系中拉格朗日陀螺的运动.

5.17 质量分别为 m 和 m' 的两个质点,用一固有长度为 l 的弹簧相连,弹簧的劲度系数为 $k = \frac{2mm'}{m+m'}$, ω^2 . 将此体系放在光滑水平管内. 设开始时质点相对于管子静止,求当管子绕管上某点以角速度 ω 转动时,两质点间的距离随时间的变化.

5.18 一光滑平面可绕固定的水平轴 AA' 自由转动,一半径为 R ,质量为 m 的圆环被约束在此平面上绕环上 O 点自由转动, O 点在 AA' 轴上,求圆环的运动方程.