維基百科

轉動慣量列表

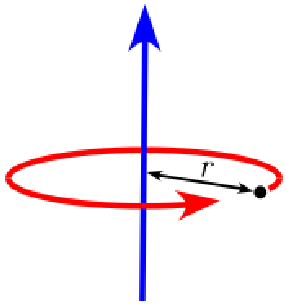
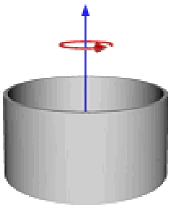
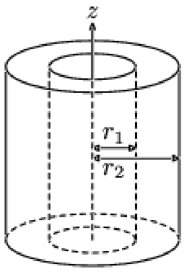
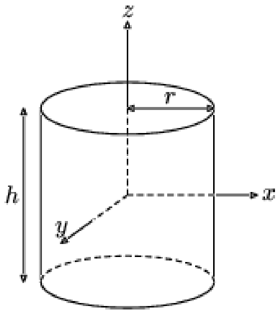
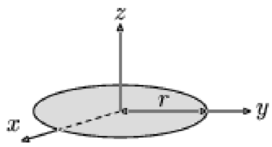
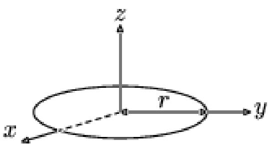
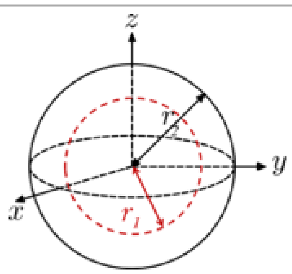
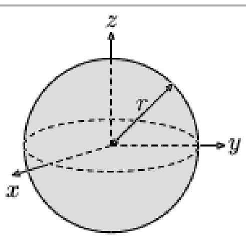
维基百科，自由的百科全书

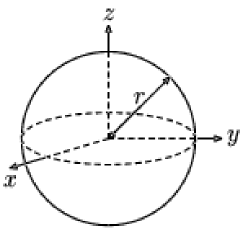
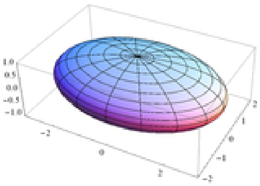
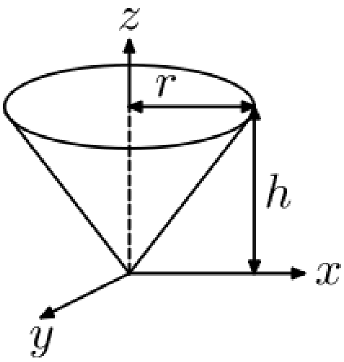
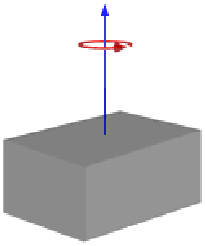
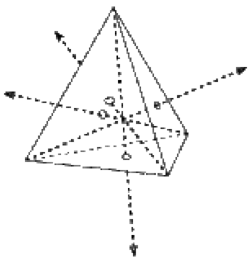
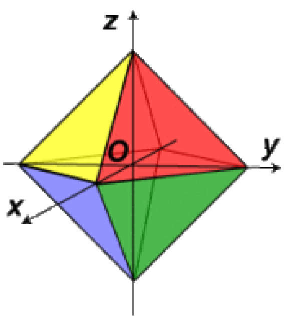
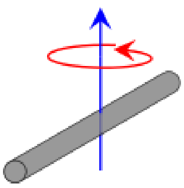
對於一個有多個質點的系統，$I=\sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2$。若該系統由剛體組成，可以用無限個質點的轉動慣量和，即用積分計算其轉動慣量。以下列表给出了常见物理模型的转动惯量。

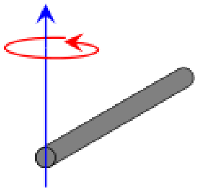
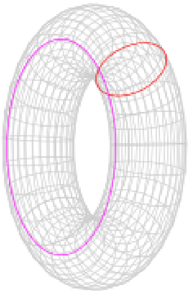
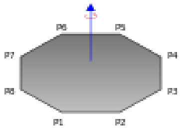
值得注意的是，不應將其與截面慣量（又稱截面二次轴矩（second axial moment of area）），截面矩（area moment of inertia）混淆，後者用於彎折方面的計算。以下之轉動慣量假設了整個物體具有均匀的常數密度。

目录

常见物理模型的转动惯量

描述	圖形	轉動慣量	註解
质点，离轴距离为r，质量为m		$I = mr^2$	—
兩端開通的薄圓柱殼，半徑為r，質量為m		$I = mr^2$[1]	此表示法假設了殼的厚度可以忽略不計。此為下一個物體，當其$r_1 = r_2$時的特例。
兩端開通的厚圓柱，內半徑為r_1，外半徑為r_2，高為h，質量為m		$I_z = \frac{1}{2}m\left({r_1}^2 + {r_2}^2\right)$ $I_x = I_y = \frac{1}{12}m\left[3\left({r_1}^2 + {r_2}^2\right) + h^2\right]$ 或者定義標準化厚度$t_n = t/r$並定義$r = r_2$， 可得$I_z = mr^2\left(1 - t_n + \frac{1}{2}t_n^2\right)$	—
實心圓柱，半徑為r，高為h，質量為m		$I_z = \frac{mr^2}{2}$[1] $I_x = I_y = \frac{1}{12}m\left(3r^2 + h^2\right)$	此為前面物體，當其$r_1 = 0$時的特例。
薄圓盘，半徑為r，質量為m		$I_z = \frac{mr^2}{2}$ $I_x = I_y = \frac{mr^2}{4}$	此為前面物體，當其$h = 0$時的特例。
圓環，半徑為r，質量為m		$I_z = mr^2$ $I_x = I_y = \frac{mr^2}{2}$	此為後面環面，當其$b = 0$時的特例。
球壳，内半径为r_1，外半径为r_2，质量为m		$I = \frac{2}{5}m\left(\frac{{r_2}^5 - {r_1}^5}{{r_2}^3 - {r_1}^3}\right)$[1]	—
實心球，半徑為r，質量為m		$I = \frac{2mr^2}{5}$[1]	此为前面物体，当其$r_1 = 0$时的特例；也是后面椭球，当其$a = b = c$时的特例。

空心球，半徑為r，質量為m		$I=\frac{2mr^2}{3}$	此为前面球壳，当其$r_1 \to r_2$时的极限。
椭球，半轴为a、b、c，质量为m		$I_a=\frac{1}{5}m\left(b^2+c^2\right)$ $I_b=\frac{1}{5}m\left(a^2+c^2\right)$ $I_c=\frac{1}{5}m\left(a^2+b^2\right)$	—
圆锥，半徑為r，高為h，質量為m		$I_z=\frac{3}{10}mr^2$ [2] $I_x=I_y=\frac{3}{20}m\left(r^2+4h^2\right)$ [2]	—
實心长方体，高為h，宽為w，长為d，質量為m		$I_h=\frac{1}{12}m\left(w^2+d^2\right)$ $I_w=\frac{1}{12}m\left(h^2+d^2\right)$ $I_d=\frac{1}{12}m\left(h^2+w^2\right)$	边长为s的立方体对任意过质心的轴的转动惯量$I_{\mathrm{CM}}=\frac{ms^2}{6}$。
正四面体，边长为s，质量为m		$I_{\mathrm{solid}}=\frac{1}{20}ms^2$ $I_{\mathrm{hollow}}=\frac{1}{12}ms^2$ [3]	“solid”意为实心，“hollow”意为空心，下同。
正八面体，边长为s，质量为m		$I_{x,\mathrm{hollow}}=I_{y,\mathrm{hollow}}=I_{z,\mathrm{hollow}}=\frac{1}{6}ms^2$ [3] $I_{x,\mathrm{solid}}=I_{y,\mathrm{solid}}=I_{z,\mathrm{solid}}=\frac{1}{10}ms^2$ [3]	—
细棒，长為L，質量為m		$I_{\mathrm{center}}=\frac{mL^2}{12}$ [1]	此表示法假設了棒的宽度和厚度可以忽略不計。此為前面实心长方体，當其$w=L$，$h=d=0$時的特例。
细棒，长為L，質量為m		$I_{\mathrm{end}}=\frac{mL^2}{3}$ [1]	此表示法假設了棒的宽度和厚度可以忽略不計。

			
环面，圆管的半徑為a，截面的半徑為b，質量為m		关于直徑：$\frac{1}{8}\left(4a^2+5b^2\right)m$[4] 关于纵轴：$\left(a^2+\frac{3}{4}b^2\right)m$	—
薄多边形，顶点為$\vec{P}_1$，$\vec{P}_2$，$\vec{P}_3$，……，$\vec{P}_N$，質量為m		$I=\frac{m}{6}\frac{\sum_{n=1}^{N}\lVert\vec{P}_{n+1}\times\vec{P}_n\rVert(\vec{P}_{n+1}^2+\vec{P}_{n+1}\cdot\vec{P}_n+\vec{P}_n^2)}{\sum_{n=1}^{N}\lVert\vec{P}_{n+1}\times\vec{P}_n\rVert}$	外接圆半径为R，质量为m的正n边形，对过其中心且垂直于所在平面的轴的转动惯量$I=\frac{1}{2}mR^2\left(1-\frac{2}{3}\sin^2\frac{\pi}{n}\right)$[5]

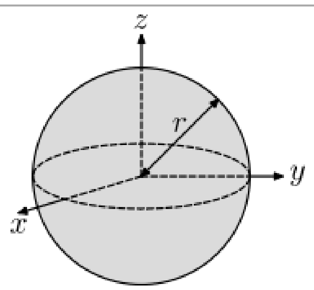
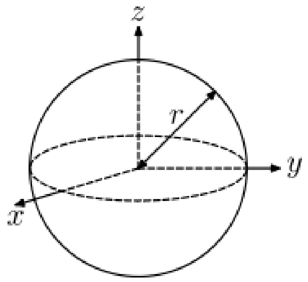
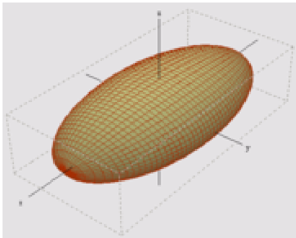
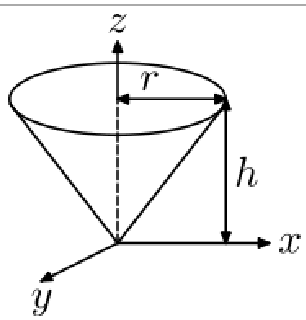
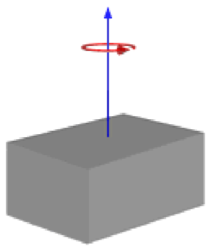
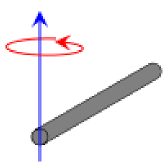
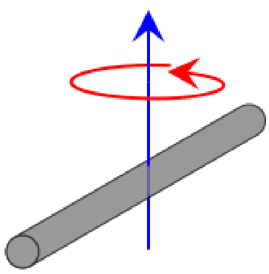
常見物理模型的三維慣量張量

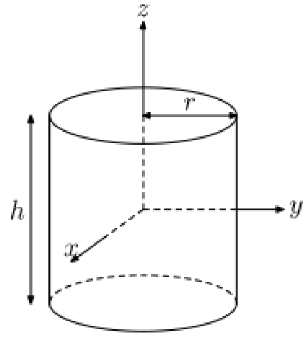
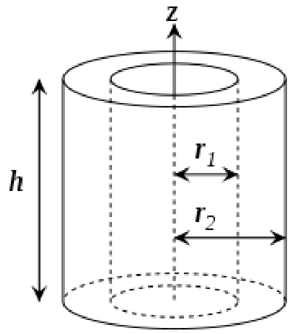
以下列表給出了每個物體主軸上的慣量張量。

為了保留上面的$\mathbf{I}$的標量矩，$\mathbf{I}$的張量矩根據以下式子被投射在由單位向量$\mathbf{n}$所定義的方向上：

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{I}\cdot\mathbf{n}\equiv n_i I_{ij} n_j\,,$$

其中點積表示用到了張量收縮和愛因斯坦求和約定。$\mathbf{n}$可以是I_x, I_y, I_z的笛卡爾基$\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$

描述	圖形	慣量張量矩
實心球，半徑為r，質量為m		$I = \begin{bmatrix} \frac{2}{5}mr^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5}mr^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5}mr^2 \end{bmatrix}$
空心球，半徑為r，質量為m		$I = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}mr^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3}mr^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}mr^2 \end{bmatrix}$
實心椭球，半轴为a、b、c，质量为m		$I = \begin{bmatrix} \frac{1}{5}m(b^2+c^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5}m(a^2+c^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5}m(a^2+b^2) \end{bmatrix}$
圆锥，半徑為r，高為h，質量為m		$I = \begin{bmatrix} \frac{3}{5}mh^2 + \frac{3}{20}mr^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5}mh^2 + \frac{3}{20}mr^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{10}mr^2 \end{bmatrix}$
實心长方体，高為h，宽為w，长為d，質量為m		$I = \begin{bmatrix} \frac{1}{12}m(h^2+d^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12}m(w^2+d^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12}m(w^2+h^2) \end{bmatrix}$
端點繞y軸旋轉的细棒，长為l，質量為m		$I = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}ml^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}ml^2 \end{bmatrix}$
中心繞y軸旋轉的细棒，长為l，質量為m		$I = \begin{bmatrix} \frac{1}{12}ml^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12}ml^2 \end{bmatrix}$

實心圓柱，半徑為r，高為h，質量為m		$I = \begin{bmatrix} \frac{1}{12}m(3r^2+h^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12}m(3r^2+h^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}mr^2 \end{bmatrix}$
兩端開通的厚圓柱，內半徑為r_1，外半徑為r_2，高為h，質量為m		$I = \begin{bmatrix} \frac{1}{12}m(3(r_1^2+r_2^2)+h^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12}m(3(r_1^2+r_2^2)+h^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}m(r_1^2+r_2^2) \end{bmatrix}$

相關條目

- 轉動慣量
- 截面慣量列表

參考資料

1. Raymond A. Serway. Physics for Scientists and Engineers, second ed.. Saunders College Publishing. 1986: 202. ISBN 0-03-004534-7.
2. Ferdinand P. Beer and E. Russell Johnston, Jr. Vector Mechanics for Engineers, fourth ed.. McGraw-Hill. 1984: 911. ISBN 0-07-004389-2.
3. Satterly, John. The Moments of Inertia of Some Polyhedra. The Mathematical Gazette (Mathematical Association). 1958, **42** (339): 11–13. JSTOR 3608345. doi:10.2307/3608345.
4. Eric W. Weisstein. Moment of Inertia — Ring. Wolfram Research. [2010-03-25]. （原始内容存档于2013-07-13）.
5. David Morin. Introduction to Classical Mechanics: With Problems and Solutions; first edition (8 january 2010). Cambridge University Press. 2010: 320. ISBN 0521876222.