

## SD 振子的非线性动力学特征研究

曹庆杰, 田瑞兰, 韩彦伟

(石家庄铁道大学 非线性动力学研究中心, 河北 石家庄 050043)

**摘要:**介绍了 SD 振子的非线性动力学行为。该振子是一个具有强非线性特征的振动系统, 其动力学行为决定于一个光滑参数  $\alpha$  的连续变化, 当参数  $\alpha > 0$  时, 系统为光滑的, 而当参数  $\alpha = 0$  时, 系统为不连续的。SD 振子提供了一个从光滑动力学行为向不连续动力学行为光滑转迁的范例。当系统为光滑时, 表现出与 Duffing 系统类似的标准双阱动力学行为; 当系统表现为不连续时, 除表现为非标准的双阱动力学行为外, 同时具有如类鞍点和类同宿轨道等非标准动力学行为。还给出一个刚性耦合的 SD 振子, 该振子具有单阱、双阱、三阱动力学特征及随参数变化由光滑动力学行为向不连续动力学行为的转迁特性。

**关键词:** SD 振子; SD 吸引子; 类鞍点; 类同宿轨道

**中图分类号:** O322 **文献标识码:** A **文章编号:** 2095-0373(2010) 02-0032-06

## 0 SD 振子简介

近年来, 非光滑动力系统的研究引起越来越多的关注, 如 Filippov<sup>[1]</sup>, Kunze<sup>[2]</sup>, Shaw&Homes<sup>[3]</sup> 以及 Nordmark<sup>[4]</sup> 等。但是, 由光滑动力系统到非连续系统过渡的研究及认识仍不充分, 而 SD 振子的动力学行为取决于一个光滑参数  $\alpha$  的连续变化。当  $\alpha > 0$  时, 系统表现为光滑特征; 当  $\alpha = 0$  时, 系统表现为不连续特性, 提供了一个由光滑动力系统到不连续动力系统的光滑转迁, 参见文献[5]、文献[6]。该系统的力学模型如图 1 所示, 它由一个质量与一对分别刚性固定、可以压和伸的弹簧  $k$  连接而成。这个基本模型最早是由 Thompson 和 Hunt 在研究一个简支梁(见图 2)时提出的<sup>[7]</sup>。虽然弹簧本身具有线性特性, 但几何特征表现为非线性的恢复力。其运动方程为

$$m\ddot{X} + 2kX \left( 1 - \frac{L}{\sqrt{X^2 + L^2}} \right) = 0 \quad (1)$$

式中,  $L$  为弹簧的长度;  $X$  为质量的位移。

令  $\omega_0^2 = \frac{2k}{m}$ ,  $x = \frac{X}{L}$  及  $\alpha = \frac{1}{L} \geq 0$  ( $L$  为刚性支撑间距离的一半), 式(1)可变为

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{x^2 + \alpha^2}} \right) = 0 \quad (2)$$

光滑参数  $\alpha$  不仅代表振子图 1 的几何形状, 同时具有实际的物理背景, 当  $\alpha > 1$  时系统为预拉伸振子, 而当  $\alpha = 0$  时, 振子的质量被一对平行弹簧所竖直支撑, 此时系统(2)化为

$$\ddot{x} + \omega_0^2 (x - \text{sign}(x)) = 0 \quad (3)$$

值得注意的是该非连续系统是由光滑系统经过参数  $\alpha$  光滑变化到 0 直接得到, 这种转化并不需要连续性的过渡。因此, 命名该系统(2)与(3)为 SD 振子, 该振子受扰系统的吸引子为 SD 吸引子<sup>[5-9]</sup>。

未扰振子(2)的 Hamilton 函数可表示为

收稿日期: 2010-04-23

**作者简介:** 曹庆杰, 男, 1955 年出生, 博士, 教授, 博士生导师。研究方向: 非线性动力学理论与应用研究。主持完成 10 余项国家及国际合作科研项目, 发表论文 100 余篇, 其中 40 余篇 SCI、EI 及 ISTP 检索。主要研究成果为在英期间与英国皇家学会会员, Aberdeen 大学 M. Wiercigroch 等合作于 2006 年发现并提出 SD 振子及 SD 吸引子。

**基金项目:** 国家自然科学基金(10872136 及 10932006); 河北省自然科学基金(08M003); 河北省教育厅基金(2009470)

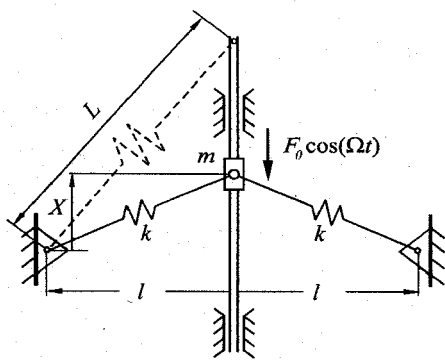


图 1 质量与具有刚性支撑的弹簧连接成的动力模型

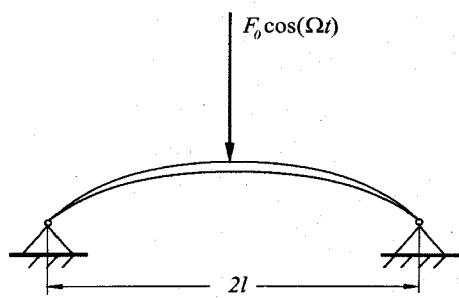


图 2 简支弹性梁

$$H(x,y)=\frac{1}{2}y^2+\frac{\omega_0^2}{2}x^2-\omega_0^2\sqrt{x^2+\alpha^2}+\omega_0^2\alpha \tag{4}$$

式中,  $y=\dot{x}$  利用 Hamilton 函数  $H(x,y)=E$  的不同取值对系统的相轨迹进行分析和分类(图 3)。当  $\alpha>0$  时, 振子(2)表现为类似于 Dufing 系统<sup>[3]</sup>的标准动力学行为(图 3(a))。当  $\alpha=0$  时, 振子(3)表现出与光滑系统同样的标准双阱动力学行为及轨道的不光滑性(图 3(b))。由于不连续系统在平衡点(0,0)处不可微, 但该点附近的拓扑结构类似于鞍点, 因此平衡点(0,0)称为类鞍点(图 3(c))。类鞍点与当  $E=0$  时的轨道组成一条特殊的同宿轨道, 具有与同宿轨道类似的性质和作用, 因此称为类同宿轨道。

令  $t=\frac{\tau}{\omega_0}$ , 方程(2)可无量纲化为

$$x''+x(1-\frac{1}{\sqrt{x^2+\alpha^2}})=0 \tag{5}$$

令  $y=x'$ , 有

$$\begin{cases} x'=y \\ y'=-x(1-\frac{1}{\sqrt{x^2+\alpha^2}}) \end{cases} \tag{6}$$

当  $0\leq\alpha<1$  时, 系统(6)的平衡点为  $(x_0,y_0)=(0,0), (x_{1,2},y_{1,2})=(\pm\sqrt{1-\alpha^2},0)$ 。

$\alpha\geq 1$ ,  $(x_0,y_0)=(0,0)$  为唯一的平衡点。易知, 不论  $\alpha$  为何值,  $(0,0)$  均为系统(6)的平衡点。下面分析平衡点(0,0)的特性。

$\alpha=0$  时,  $(0,0)$  称为类鞍点(图 3(c))。

$\alpha>0$  时, 平衡点(0,0)处的 Jacobian 矩阵为

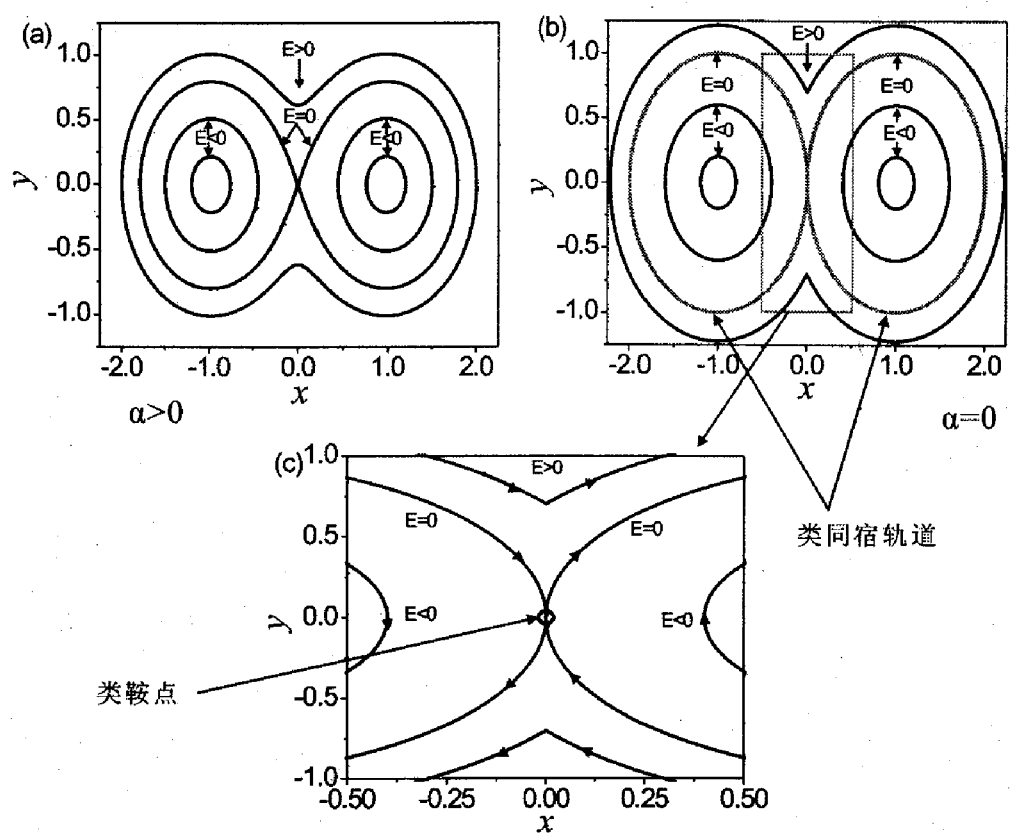
$$J_{0,0}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1-\alpha}{\alpha} & 0 \end{bmatrix} \tag{7}$$

特征方程为  $\lambda^2-\frac{1-\alpha}{\alpha}=0$ , 故

①  $0<\alpha<1$ ,  $(0,0)$  是鞍点, 特征值是  $\lambda_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{1-\alpha}{\alpha}}$ 。

② 当  $\alpha=1$ ,  $(0,0)$  处的 Jacobian 矩阵是  $J_{0,0}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ , 其特征值为  $\lambda_{1,2}=0$ ,  $(0,0)$  是非双曲的, 系统此时可能会发生余维 2 分岔。

③ 当  $\alpha>1$  时,  $(0,0)$  是中心, 其特征值是  $\lambda_{1,2}=\pm i\sqrt{\frac{1-\alpha}{\alpha}}$ 。



(a)光滑系统  $\alpha=0.5$  时的相轨迹; (b)不连续系统  $\alpha=0$  的相轨线; (c)类鞍点的局部结构。

图 3 利用 Hamilton 函数  $H(x,y)=E$  的不同取值对系统的相轨迹进行分析和分类

1 SD 振子的余维 2 分岔

考虑非线性阻尼, 系统( 5) 变为

$$x''+(\xi+\gamma x^2)x'+x(1-\frac{1}{\sqrt{x^2+\alpha^2}})=0$$
 ( 8)

$\xi$ 和  $\gamma$ 可取任意实数。当  $\alpha=1$ ,  $F(x)=-x(1-\frac{1}{\sqrt{x^2+\alpha^2}})$  在  $x=0$  处泰勒展开, 系统( 8) 可化为

$$x''+(\xi+\gamma x^2)x'-\frac{1-\alpha}{\alpha}x+\frac{1}{2\alpha^3}x^3=0$$
 ( 9)

当  $\alpha\geq 1$ , 令  $\omega^2=\frac{\alpha-1}{\alpha}$ ,  $\alpha_0=\frac{1}{2\alpha^3}$ , 系统( 9) 成为

$$x''+(\xi+\gamma x^2)x'+\omega^2x+\alpha_0x^3=0$$
 ( 10)

当  $\alpha<1$ , 令  $\omega^2=\frac{1-\alpha}{\alpha}$ ,  $\alpha_0=\frac{1}{2\alpha^3}$ , 系统( 9) 化为

$$x''+(\xi+\gamma x^2)x'-\omega^2x+\alpha_0x^3=0$$
 ( 11)

显然, ( 9) 在  $\alpha=1$  附近具有复杂的非线性动力学现象。文献[ 9] 利用规范形和向量场的普适开折理论讨论了( 9) 在  $\alpha=1$  附近的余维 2 分岔<sup>[ 9-11]</sup>, 如图 4 所示。

2 刚性耦合的 SD 振子

耦合 SD 振子, 其力学模型如图 5, 它由一个质量  $m$  与一对分别刚性固定的弹簧连接而成。其运动微

分方程为

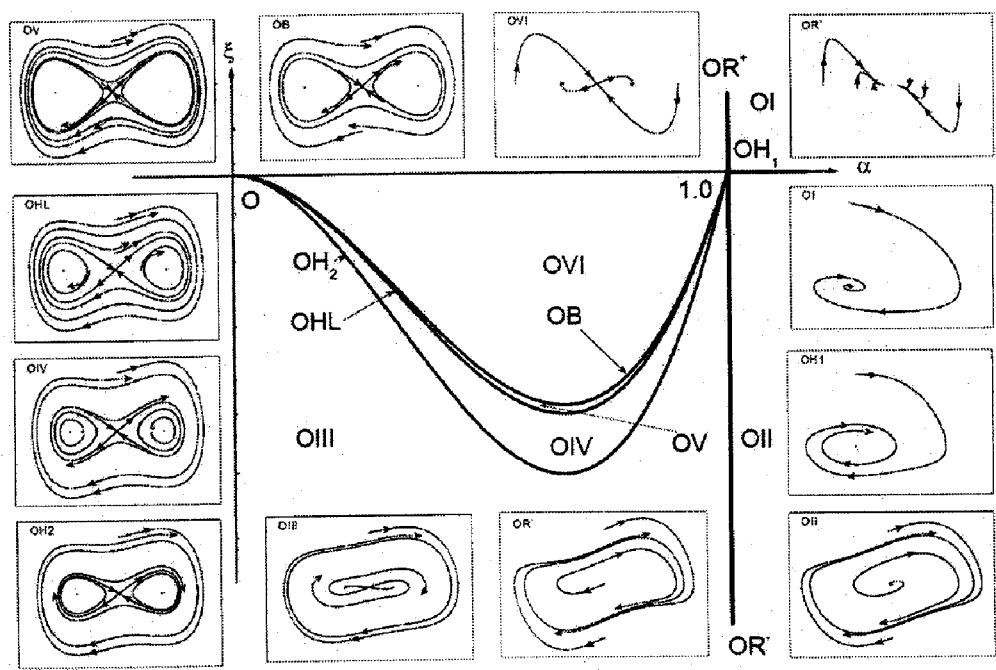


图 4 分岔图和相应的受扰动力学特征:粗线是  $\gamma=1$  时,  $(\alpha, \xi)$  的分岔图

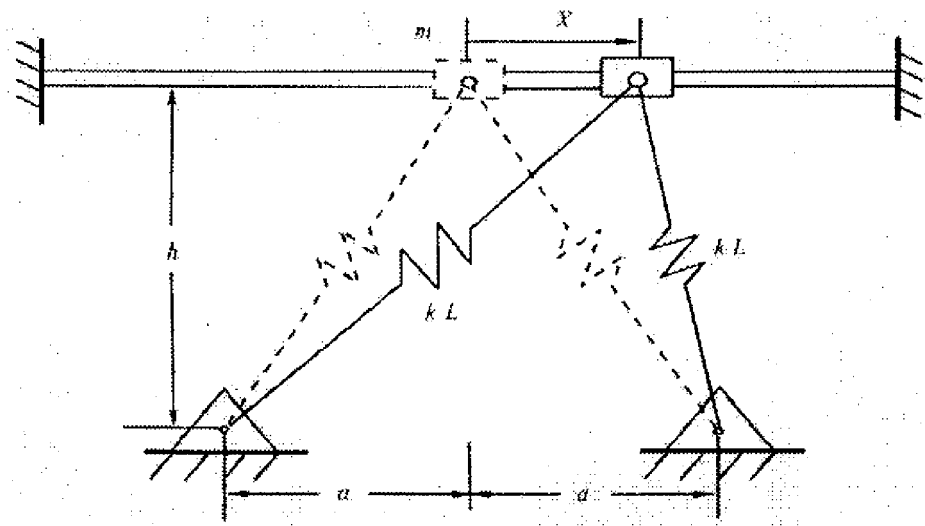


图 5 刚性耦合 SD 振子的力学模型

$$m\ddot{X}+k(X+a)\left(1-\frac{L}{\sqrt{(X+a)^2+h^2}}\right)+k(X-a)\left(1-\frac{L}{\sqrt{(X-a)^2+h^2}}\right)=0$$

( 12 )

式中，“·”表示对时间 t 的导数；m 是质点的质量；X 为水平方面的位移；k 为弹簧的弹性系数；a 为支撑间距离的一半；L 与 h 分别为弹簧的自然长度与竖直方向的高度。

令  $\omega_0^2=\frac{2k}{m}$ ,  $x=\frac{X}{L}$ ,  $\alpha=\frac{a}{L}\geq 0$ ,  $\beta=\frac{h}{L}\geq 0$  和  $\tau=\omega_0 t$  系统 (12) 变为

$$\ddot{x}+F(x,\alpha,\beta)=0$$

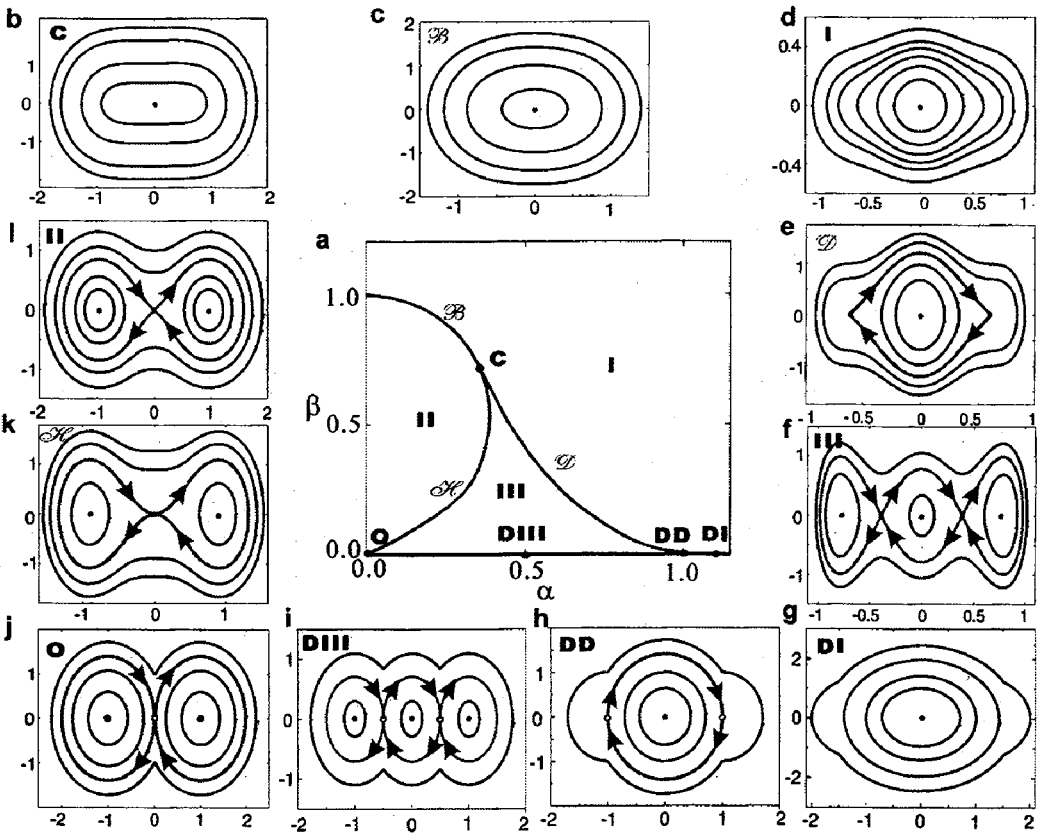
( 13 )

式中， $\alpha, \beta$  分别表示无量纲水平支撑距离和无量纲垂直高度，令  $F(x,\alpha,\beta)=2x-\frac{x+\alpha}{\sqrt{(x+\alpha)^2+\beta^2}}-\frac{x-\alpha}{\sqrt{(x-\alpha)^2+\beta^2}}$

$$\frac{x-\alpha}{\sqrt{(x-\alpha)^2+\beta^2}}$$

利用  $F(x, \alpha, \beta)$  在参数空间  $(\alpha, \beta)$  上的投影,可以得到  $\alpha, \beta$  平面上的分岔曲线  $\Sigma$  与  $U$ ,如图 6(a) 所示。 $\Sigma$  在突变点  $(\alpha_0, \beta_0) = (\frac{4\sqrt{5}}{25}, \frac{8\sqrt{5}}{25})$  分为三个分支<sup>[13]</sup>;其中分别为分岔点集  $B$ , 滞后点集  $H$  和双极限点集  $D$ ,这三个分支将参数平面  $\{(\alpha, \beta) \mid \alpha \geq 0, \beta \geq 0\}$  划分为三个持久集分别用  $I, II, III$  表示,其中  $\Sigma = \{(\alpha, \beta) \mid F(x, \alpha, \beta) = 0, F_x(x, \alpha, \beta) = 0\}, U = \{(\alpha, \beta) \mid F(x, \alpha, \beta) = 0, \alpha > 0, \beta = 0\}$ 。

图 6(b)~图 6(j)分别给出对应于图 6(a)中的所有可能的参数所对应的相平面图。其中图 6(k)为表示系统的切鞍点动力学行为,图 6(e)为系统中的尖点动力学行为。图 6(g)~图 6(j)表明系统具有非光滑的单阱、双阱及三阱非标准动力学行为,同时具有诸如类鞍点及类同宿,类异宿及类同异宿轨道等动力学行为;而当系统光滑时,同样表现出单阱、双阱及三阱等标准非线性动力学行为,也具有诸如同宿,异



(a)  $\alpha, \beta$  平面上的分岔集图: 三个分支  $B, H$  和  $D$  将参数平面  $\{(\alpha, \beta) \mid \alpha \geq 0, \beta \geq 0\}$  划分为三个持久集分别用  $I, II, III$  表示; 分岔点集图及持久集对应的相图, 分别以图 (b)~(j) 表示。

图 6 分岔点集图及其对应相图

宿及同异宿轨道等动力学行为,分别由图 6(e)~(j) 给出。

3 结论

研究了 SD 振子的非线性动力学行为, SD 振子的动力学行为决定于一个光滑参数  $\alpha$  的连续变化。当  $\alpha > 0$  时,系统表现为光滑特征,而当  $\alpha = 0$  时,系统表现为不连续特性。本文探讨了  $0 < \alpha < 1$  时非线性动力学特征,当系统表现为不连续性态时,探讨了其新的非标准动力学行为,如类鞍点和类同宿轨道等。同时对于  $\alpha = 1$  的退化情形,探讨了此时受非线性阻尼作用的,SD 振子在平凡平衡点附近的余维 2 分岔,研

究表明系统具有叉形分岔, 单 Hopf 分岔, 双 Hopf 分岔, 双同宿轨分岔和闭轨迹分岔现象。此外, 引进一个刚性耦合的 SD 振子, 分析了耦合 SD 振子的简单性质。研究表明, SD 振子具有丰富的非线性动力学行为, 该系统处于非光滑性态时, 表现出的单阱、双阱、三阱非标准动力学行为, 及其具有的诸如类鞍点及类同宿, 类异宿及类同异宿轨道等动力学行为; 而当系统处于光滑性态时, 同样表现出单阱、双阱及三阱等非线性动力学行为, 且具有诸如同宿, 异宿及同异宿轨道等动力学行为。SD 振子的其他动力学行为及其工程实际中的应用将另文给出。

参 考 文 献

[ 1 ] Filippov a F. Differential equations with discontinuous righthand sides[ M] . The Netherlands, Kluwer Academic Publishers 1988.

[ 2 ] Kunze M. Non-Smooth dynamical system[ M] . New York: Springer-Verlag 2000.

[ 3 ] Shaw S W, Holmes P J A Periodically forced piecewise linear oscillator[ J] . J Sound Vib, 1983, 90( 1) : 129-155.

[ 4 ] Nordmark A B Non-periodic motion caused by grazing incidence in an impact oscillator[ J] . J Sound Vib, 1991, 145, 279-297.

[ 5 ] Cao Q, Wiercigroch M, Pavlovskaja E E et al Archetypal oscillator for smooth and discontinuous dynamics[ J] . Phys Rev E, 2006, 74, 046218( 1-5) .

[ 6 ] Cao Q, Wiercigroch M, Pavlovskaja E E et al Piecewise linear approach to an archetypal oscillator for smooth and discontinuous dynamics[ J] . Phil Trans R Soc A, 2008, 1865( 366) : 635-652.

[ 7 ] Thompson J M T, Hunt G W. A general theory of elastic stability[ M] . John Wiley & Sons London, 1973.

[ 8 ] Guckenheimer J, Holmes P. Nonlinear oscillation, dynamical system and bifurcation of vector field[ M] . New York: Springer-Verlag 1983.

[ 9 ] Tian R, Cao Q, Yang S The codimension-two bifurcation for the recent proposed SD oscillator[ J] . Nonlinear Dynamics 2010, 59, 19-27.

[ 10 ] Wiggins S. Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos[ M] . New York: Springer-Verlag 1983.

[ 11 ] Wiggins S. Global bifurcations and chaos: analytical method[ M] . New York: Springer-Verlag 1988.

[ 12 ] Golubitsky M, Stewart Ian, Schaeffer D G. Singularities and Groups in Bifurcation Theory, Volume I[ M] . New York: Springer-Verlag 1983.

Investigations of Nonlinear Dynamics for SD Oscillator

Cao Qingjie Tian Ruilan Han Yanwei

( Center for Nonlinear Dynamics Research, Shijiazhuang Tiedao University, Shijiazhuang 050043, China)

Abstract: In this paper, we introduce the nonlinear dynamics of the recently proposed SD oscillator, which behaves both smooth and discontinuous dynamics with strong nonlinearity. The dynamics of this oscillator depends on a smooth varying parameter  $\alpha$ . If  $\alpha > 0$ , the system is smooth behaving standard dynamics with double well potential while when  $\alpha = 0$ , it is discontinuous admitting a nonstandard dynamics with homoclinic-like double well potential and a saddle-like singularity. We also propose a rigid coupled SD oscillator which exhibits both standard and nonstandard nonlinear behavior with single, double and triple well potential and the transition as parameter changes.

Key words: SD oscillator; SD attractor; saddle-like equilibrium; homoclinic-like orbit