理论力学A. 2022年11月23日.

1. 期中考试.（下周，2~4 h）

4个题.
- Lagrange.
- 碰撞.
- 微振动.
- 刚体.

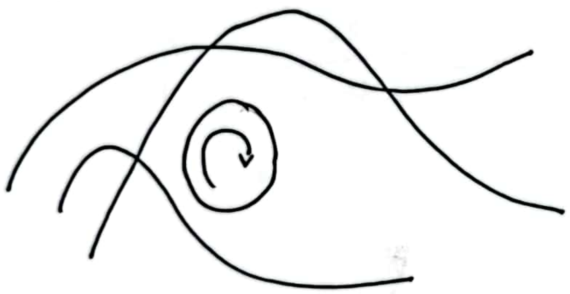
半开卷.（半张A4纸）

2. 补充

① Stokes力. $\vec{f} = -6\pi\eta r\vec{v}$ （低速）

$\vec{f} = -\frac{1}{2}\pi\rho r^2|\vec{v}|\vec{v}$ （高速）

② Magnus force.（升力）（lift force）



$$\left.\begin{aligned}\vec{f}_m &= \frac{8}{3}\pi\rho r^2\,\vec{v}\times\vec{\omega}\\ \vec{f}_c &= 2m\,\vec{v}\times\vec{\omega}\end{aligned}\right\}\text{真实存在的力.}$$

3. $m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) + 2m\vec{\omega}\times\vec{v}$

复杂 ⟶ 不可解 ⟶ 数值

特殊的性质 ⇒ 近似 ⇒ 两个极限.

① $\vec{\omega}\to 0$.

自由落体向东偏移.

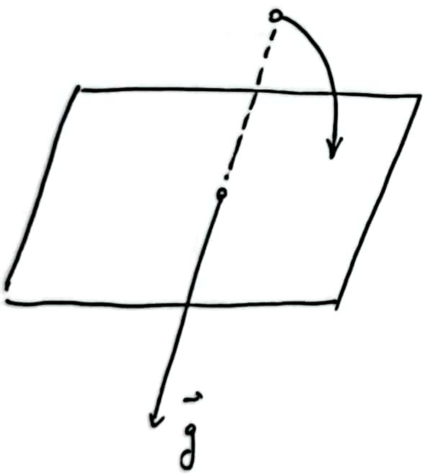
② $\vec{v}\to 0$.

* 讨论内容可以参考 Landau 书. P134. 例1~例3.

①. 地球自转小. ($\vec{\omega}\to 0$).

$\omega \sim 5.7\times 10^{-4}$ rad/s

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{24\times 3600} = \frac{2\pi}{2.4\times 3.6}\times 10^{-4}$$



$U = -m\vec{g}\cdot\vec{r}$

$m\dot{\vec{v}} = 2m\vec{v}\times\vec{\omega} - \frac{\partial U}{\partial r}$

$\dot{\vec{v}} = 2\vec{v}\times\vec{\omega} + \vec{g}$

由于 $2\vec{v}\times\vec{\omega} \ll \vec{g}$. ($\vec{\omega}\to 0$)

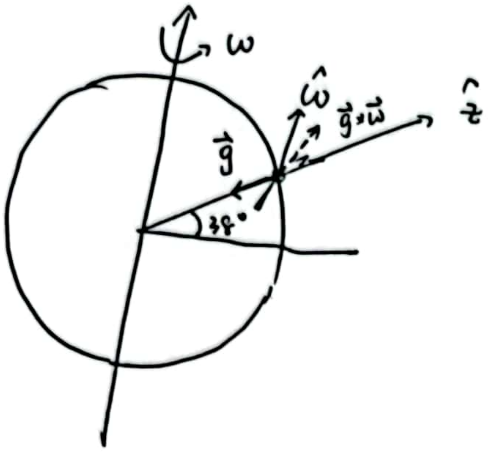
所以令 $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_1$. $\vec{v}_0 \gg \vec{v}_1$

得到 $\begin{cases} \dot{\vec{v}}_0 = \vec{g} \Leftrightarrow \vec{v}_0 = \vec{v}_0(0) + \vec{g}t. \\ \dot{\vec{v}}_1 = 2\vec{v}_0\times\vec{\omega} \end{cases}$

$$\vec{r} = \vec{h} + \vec{v}_0 t + \frac{t^3}{3}(\vec{g}\times\vec{\omega}) + t^2(\vec{v}_0\times\vec{\omega}) + \frac{1}{2}\vec{g}t^2$$

1) 如果初始的水平速度为 0，即 $\vec{v}_0 = 0$

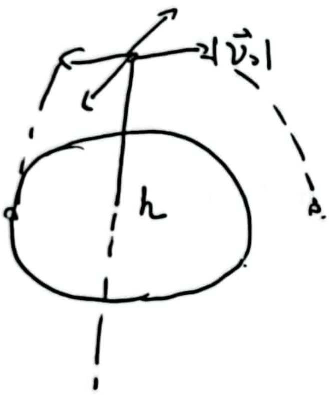
$$\vec{r} = \vec{h} + \frac{t^3}{3}(\vec{g}\times\vec{\omega}) + \frac{1}{2}\vec{g}t^2.$$



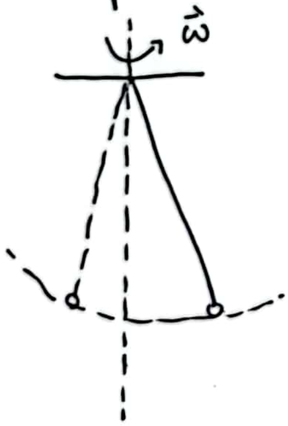
*

2) 作业：$|\vec{h}| = 100m$；g，

$|\vec{v}_0| = 10m/s$：求落地的轨迹.



② 傅科摆.



1) 没有转动.

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 2\Omega\dot{y}$$

$$\ddot{y} + \omega^2 y = -2\Omega\dot{x}$$

定义 $\xi = x + iy$，类似于受阻振动中 $z = x + i\dot{x}$

$|z| = x^2 + |\dot{x}|^2$

$$\ddot{\xi} + \omega^2\xi + \underbrace{2i\Omega\dot{\xi}}_{} = 0$$

if $-\gamma v$. $\gamma \in \mathbb{R}$. 则为阻尼. 有能量消耗.
此处为 $\in \mathbb{C}$. 则为振荡.

$$e^{i\gamma t}\cos(\omega t) \quad \gamma = 2i\Omega \Bigg\} \; e^{-2i\Omega t}\cos(\omega t)$$

令 $\quad \xi \propto e^{-2i\Omega t}\cos(\omega t)$

$$\propto e^{+iqt}$$

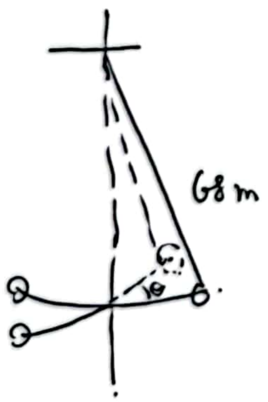
则 $\quad -q^2 + \omega^2 - 2\Omega q = 0.$

$$x + iy = e^{-i\Omega t}(x_0 + iy_0)$$

(i) 如果 $\Omega = 0$. 则

$$\left|\begin{aligned} & x + iy = x_0 + iy_0; \\ & \ddot{x}_0 + \omega^2 x_0 = 0; \\ & \ddot{y}_0 + \omega^2 y_0 = 0; \end{aligned}\right.$$

(ii) $\quad \xi = re^{i\theta}$

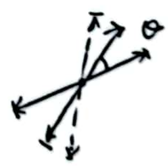


$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

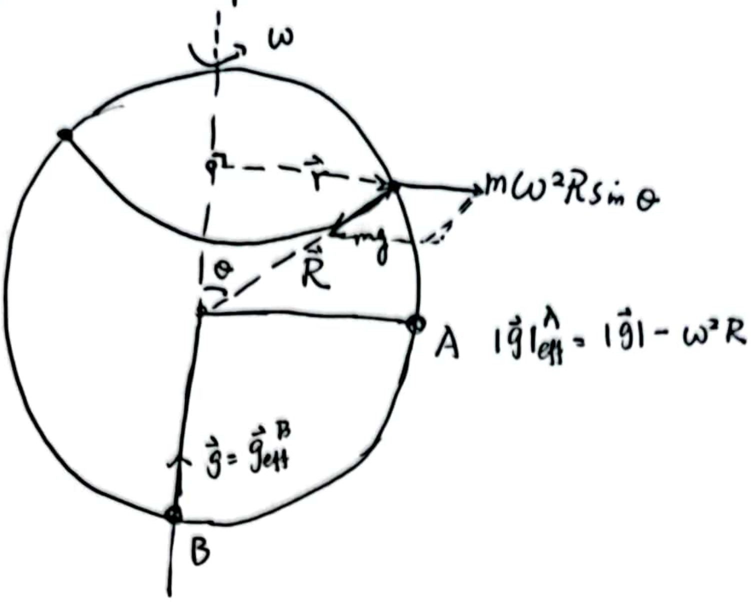
$$= 2\pi\sqrt{\frac{68}{10}}\left(\frac{m}{m\cdot s^{-2}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

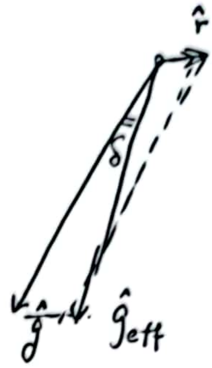
$$= 2\pi \times 2.5\,s$$

$$= 15\,s$$



③ 地球表面的加速度.





$$m\vec{g}_{eff} = -mg\frac{\vec{R}}{|\vec{R}|} + m\omega^2 R\sin\theta\,\hat{r}$$

(a) $\cos\delta = \dfrac{\vec{g}_{eff}\cdot\vec{g}}{|\vec{g}_{eff}||\vec{g}|} \Rightarrow \delta = \sim$

(b) $g_{eff}^{B} - g_{eff}^{A} = \omega^2 R$

测量 R ⇒ 给出 ω.

* 这里可以补充实验的数据.

*作业. 金书. 指导 §5.5 . 拉莫进动. (自旋. 磁矩).
(Lamori)

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \vec{\omega}\times\vec{A}$$

经典理解.
自旋转速超光速. (悖论).

4. 非对称 Top.

$$I_1 \neq I_2 \neq I_3$$

能量：$2E = \sum_i I_i \Omega_i^2$

动量：$M^2 = \sum_i I_i^2 \Omega_i^2$

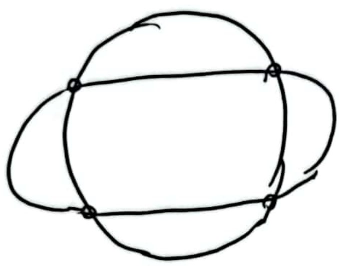
惯性椭球：$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3$ ， $M_i = I_i \Omega_i$.

$$\frac{M_1^2}{2I_1} + \frac{M_2^2}{2I_2} + \frac{M_3^2}{2I_3} = E \quad \text{，球.}$$

$$M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 = M^2 \quad \text{，椭圆.}$$

二者的交线：

(2D) 二维：



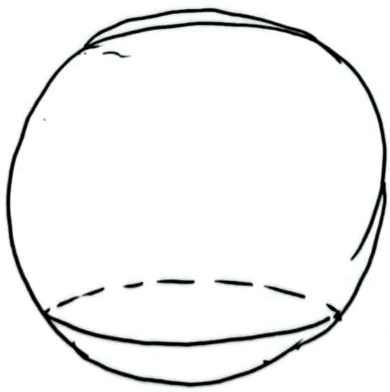
4个点（解）.

如果 $\Omega(t) = \Omega(t+T)$.

则有 $I_1 \dot{\Omega}(t+T) = I_1 \dot{\Omega}_1(t)$.

周期解. 椭圆函数.

3D：



点连成线.（周期解）.

$$T = 4K \sqrt{\frac{I_1 I_2 I_3}{(I_3 - I_2)(-2EI_1 + M^2)}}$$

$$I_1 \dot{\Omega}_1 - (I_2 - I_3)\Omega_2 \Omega_3 = 0 \text{ ，} \quad \Omega(t) = \Omega(t+T).$$

类似于：$\ddot{x} + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 = 0$ ， $x(t) = x(t+T)$.

*（t的平移对称性）