2022年11月18日. 理论力学A.

1. 上节课内容回顾.

$$\left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_{s} = \left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_{s'} + \vec{\omega}\times\vec{A}$$

出发点 { 人在地球上. 探测器在卫星上. → 非惯性系

Newton eq: $\vec{F}' = m\vec{a}' = \vec{F} + \underset{\text{牵连;}}{\underset{\downarrow}{\vec{F}_t}} + \underset{\text{科氏力;}}{\underset{\downarrow}{\vec{F}_c}}$

1860. 傅科摆. 地球自转.

2. 今天

① 应用.

② $L_{s'}$ 中的推导. 以及物理意义.

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_0 + \vec{\omega}_0\times\vec{r}$$

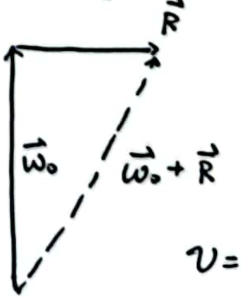
$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_0 + \underbrace{2\vec{\omega}_0\times\vec{v}'}_{\text{科氏力;}} + \vec{\beta}\times\vec{r} + \underbrace{\vec{\omega}_0\times(\vec{\omega}_0\times\vec{r})}_{\text{离心力,}}$$

对比科氏力和洛氏力
$F_c = 2m\vec{\omega}\times\vec{v}$
$F_L = e\vec{v}\times\vec{B}$

科氏力 → 应用

Coriolis 流量计,
地球科学, 河流.

$\propto \omega_0^2 \vec{R}$



$v = \omega\vec{R}$

$F = m\frac{v^2}{R}$
$= m\omega^2 R$

Landau书. §39

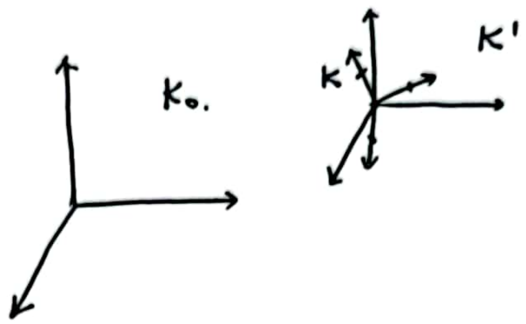
非惯性参考系中的 Lagrange 原理.

符号约定: K, K_0, K'

K_0: 惯性参考系.

K': v_0平动/无相对.

K: 转动+平动.



$$L_0 = \frac{1}{2} m v_0^2 - U(\vec{r}_0)$$

$$\Leftrightarrow \quad m\dot{\vec{v}}_0 = \frac{\partial U}{\partial r_0}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v_0}\right) = \frac{\partial L}{\partial r_0} \quad , \quad \vec{v}_0 = \vec{v}_0' + \vec{V}(t)$$

1) K'与K_0之间的联系.

2) K与K_0之间的联系.

$$L' = L_{K'} = \frac{1}{2} m (\vec{v}' + \vec{V}(t))^2 - U$$

$$= \frac{1}{2} m \vec{v}'^2 + \frac{1}{2} m \vec{V}(t)^2 + m \vec{v}' \cdot \vec{V}(t) - U$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \vec{v}'}\right) = m\dot{\vec{v}}' + m\dot{\vec{V}} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}}$$ 也可以在K'中有 Lagrange 原理.

变换: $m\vec{V}' \cdot \dot{\vec{r}} = \underbrace{\frac{d}{dt}(m\vec{V} \cdot \vec{r})}_{\text{全微分}} - m\dot{\vec{V}} \cdot \vec{r}$, 将 $\vec{r}$ 置换出来.

令 $m\vec{w} \cdot \vec{r} = m\dot{\vec{V}} \cdot \vec{r}$

$$L' = \frac{1}{2}m\vec{v}'^2 + \frac{1}{2}m\vec{v}^2 - \underbrace{\left[U + m\vec{\omega}\cdot\vec{r}' \right]}_{U_{eff}.\ \text{有效的势能.}}$$

☆ K'中 Lagrange 适用

☆ 加速项. $\cancel{\ }\ \vec{f}\cdot\vec{r}'$ （相对论） , $\vec{f} = m\dot{\vec{v}}$

$$L' = \frac{1}{2}m\vec{v}'^2 + \frac{1}{2}m\vec{v}^2 - \left[U + \vec{f}\cdot\vec{r} \right]$$

代入 $\vec{v}' = \vec{v} + \vec{\omega}\times\vec{r}$

$$L' = \frac{1}{2}m(\vec{v} + \vec{\omega}\times\vec{r})^2 + \frac{1}{2}m\vec{v}^2 - \left[U + \vec{f}\cdot\vec{r} \right]$$

$$\boxed{\begin{aligned} m\dot{\vec{v}}' &= m\dot{\vec{v}} + m\vec{\omega}\times\dot{\vec{r}} \\ &= \vec{F} + \vec{f} \end{aligned}} \sim \boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}}\right) = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \vec{p} = m\vec{v} + \underline{m\vec{\omega}\times\vec{r}}$$

$U(\vec{v})$

在电磁场中 $e\vec{B}\times\vec{r}$ 给出动量项;
（EM）

转动（相对运动）给出的广义动量增量.
电磁场中的广义动量增量.

$$L = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 + m \vec{v} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \frac{m}{2} (\vec{\omega} \times \vec{r})^2 - U - m \vec{W} \cdot \vec{r}$$

在 K 中引入 Lagrange 函数.

对U参考系（非惯性），普适的东西.

求导数：

$$dL = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} d\vec{v} + \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} d\vec{r} + \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

$$df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

$$= m\vec{v} \cdot d\vec{v} + m(\vec{\omega} \times \vec{r}) \cdot d\vec{v} + m\vec{v} \cdot (\vec{\omega} \times d\vec{r})$$

$$+ m(\vec{\omega} \times \vec{r}) \cdot (\vec{\omega} \times d\vec{r}) - \frac{\partial U}{\partial r} dr$$

$$- m\vec{W} \cdot \vec{r}$$

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial v}$$

$$= m\vec{v} + m(\vec{\omega} \times \vec{r})$$

$$\vec{f} = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}}$$

其中 $\dfrac{\partial\, m\vec{v} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r})}{\partial \vec{r}} = m \vec{v} \times \vec{\omega} = f_c$ $(\pm\ \vec{v} \times \vec{\omega})$

,科氏力.

$$\frac{\partial}{\partial \vec{r}} (\vec{\omega} \times \vec{r})^2 = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

$= f_t$ ，离心力.

（或者称为牵连加速度）.

$(\pm\ \vec{\omega} \cdot \vec{\omega}\, \vec{r} \pm \vec{\omega} \cdot \vec{r}\, \vec{\omega})$

$\left[\dfrac{\partial}{\partial \vec{r}} (\vec{r} \times \vec{r}) = 0 \right.$

$\Downarrow$

$\left. + \vec{\omega} \cdot \vec{\omega}\, \vec{r} - \vec{\omega} \cdot \vec{r}\, \vec{\omega} \right]$

$$m\dot{\vec{v}} = \vec{f}_c + \vec{F} + \vec{f}_t + \underset{\sim\sim}{\vec{f}_w}$$

总结：① 在非惯性系中，L eq^n 也成立.

② $f_c = m\vec{\omega} \times \vec{v}$. $f_t = m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$.

③ $\vec{f}_w$ ④ $\vec{p} = m\vec{v} + m\vec{\omega} \times \vec{r}$. ⑤ $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$

$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$

梯度算子.

$$\nabla(fg) = \nabla f\, g + f\,\nabla g$$

$$\nabla\times(\vec a\times\vec b) = (\nabla\cdot\vec a)\vec b - (\nabla\cdot\vec b)\vec a$$ ，分配

$$\nabla\cdot(\vec a\times\vec b) = \vec a\cdot(\vec b\times\nabla) + \vec b\cdot(\nabla\times\vec a)$$ ，轮换

$$= \vec a\cdot(-\nabla\times\vec b) + \vec b\cdot(\nabla\times\vec a)$$

应用：

$$m\vec a = \vec F + \vec f_c + \vec f_t$$

☆ $\vec f_c$ 和 f_t 的分析.

☆ 很多应用只有其中一项；

√ Landau书. P_{131}. 习题1：
- 地球自转（ω小）自由落体偏移.
- 傅科摆：$f_c = \vec\omega\times\dot{\vec r}\,m$（和速度有关）

√ 重力加速度 g 和纬度的关系，$f_t = \vec\omega\times(\vec\omega\times\vec r)\,m$（和位置有关）

$$\begin{cases} \dot{\vec v} = \vec g + 2\vec v\times\vec\Omega, & \vec v = (x, y, z), \ \vec g \parallel \hat z, \ \vec\Omega \parallel \hat z. \\ \vec v = \vec v_0 + \delta\vec v \\ \text{微扰法} \end{cases}$$