2022年11月9日. 理论力学A;

刚体 { 平动
转动 ⇒ { 机器手
陀螺(应用) → 方向 → 动量与恒;

四元数 (1.i.j.k)

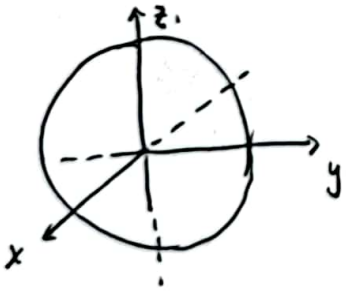
这本书最难的几个内容:

① 两体运动;
② 微振动 (近似);
③ 转动. (Euler角) ⇒ 图像;
} 计算;
④ Lagrange / Hamiltonian力学: (证明)

今天的内容: 欧拉刚体运动. (科大 4.2; Landau书§35);

解决: 转动 ⇒ 广义坐标, ⇒ 欧拉角 ⇒ 广义动量;

✓ 要和球坐标区分开来; (r. θ. φ)



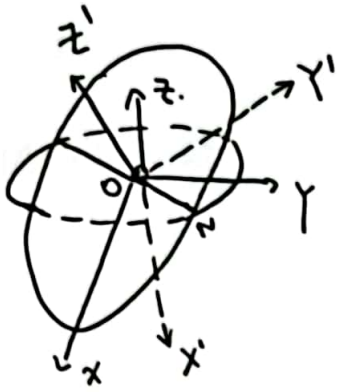
✓ 推导技巧. $\sin\theta.\ \sin\phi$ ~ $s\theta$; $s\phi$
$\cos\theta.\ \cos\phi$ ~ $c\theta$; $c\phi$

重要性: 1) 广泛工程上的应用;
2) 磁学, 量子力学;

图像(画图)

名词: 参考系. frame of reference. | rigid body

(非) 惯性系 (Non) Inertial
space fixed. ⇒ Lab ⇒ x.y.z;
body fixed ⇒ 固定在刚体上的;



一. 如何实现转动：（非唯一）

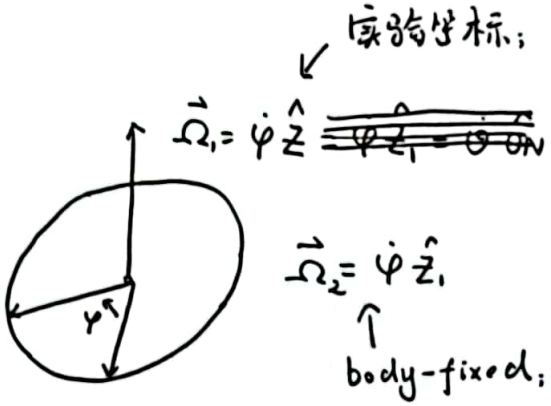
① 绕z转.

② z → z_1，角度不变.

③ 绕z_1转.

二. Euler转动

| 转动矩阵；
| $\dot\theta, \dot\phi, \dot\psi \Rightarrow$ 转动 Ω；



$$\begin{cases} \Omega_1 = \dot\theta_1 + \dot\varphi_1 + \dot\psi_1 = \dot\varphi \sin\theta \sin\psi + \dot\theta\cos\psi \\ \Omega_2 = \dot\varphi \sin\theta\cos\psi - \dot\theta\sin\psi \\ \Omega_3 = \dot\varphi\cos\theta + \dot\psi \end{cases} \Leftarrow \quad \vec\Omega = \vec\Omega_1 + \vec\Omega_2 + \vec\Omega_3$$

$$= \Omega_1 \hat x_1 + \Omega_2 \hat x_2 + \Omega_3 \hat x_3$$

重点：投影到刚体固定坐标系上；

$$\dot\theta \hat{ON} = \dot\theta_1 \hat x_1 + \dot\theta_2 \hat y_1 + \dot\theta_3 \hat z_1$$

$$\begin{cases} \dot\theta_1 = \dot\theta\cos\psi \\ \dot\theta_2 = -\dot\theta\sin\psi \\ \dot\theta_3 = 0 \end{cases}$$

$$\dot\varphi \hat z_1 \sim \dot\varphi \hat z_1$$

$$\dot\varphi \hat z = \dot\varphi_1 \hat z_1 + \dot\varphi_2 \hat z_2 + \dot\varphi_3 \hat z_3$$

$$\begin{cases} \dot\varphi_3 = \dot\varphi\cos\theta \\ \dot\varphi_2 = \dot\varphi \sin\theta\cos\psi \\ \dot\varphi_1 = \dot\varphi\sin\theta\sin\psi \end{cases}$$

面内

作业：画图. 指导 $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$

1) 简单的模型.

理解定的运动方程； I_{ij} 惯性主轴；

② $I_1 = I_2 = I_3 = I$

$$T = \frac{I}{2}(\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2)$$

$$= \frac{I}{2}(\dot{\varphi}^2 \sin^2\theta + \dot{\theta}^2 +$$

$$= \frac{I}{2}(\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2 + 2\dot{\varphi}\dot{\psi}\cos\theta)$$

运动方程：

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = \frac{\partial T}{\partial \varphi};$$

$$\frac{d}{dt}(2\dot{\varphi}\theta + 2\dot{\psi}\cos\theta) = 0,$$

$$2\ddot{\varphi} + 2\ddot{\psi}\cos\theta + 2\dot{\psi}\sin\theta\dot{\theta} = 0;$$