

2022年10月15日 第六周第2次课

今天 | 阻尼. 共振 (外界驱动).

参量共振.

(1) 阻尼. $f = -\alpha \dot{x}$

(2) 共振.

$$m\ddot{x} = -m\omega_0^2 x^2 - \alpha \dot{x} + f(\omega t)$$

$f(\omega, t) = \cos t$.

$$m\ddot{x} = -m\omega_0^2 x^2 - \alpha \dot{x}$$



$f(\omega, t)$ 不为 0.

$$m\ddot{x} = -m\omega_0^2 x^2 - \alpha \dot{x} + f(\omega, t)$$

令 $f(\omega, t) = f e^{-i\omega t}$. 求实部的运动方程.

$$\tilde{x}(t) = \tilde{x}(\omega) e^{i\omega t}$$

$$= \text{Re} \frac{f}{m(\omega_i^2 - \omega^2) + i\alpha\omega} e^{i\omega t}$$



Lorentz 函数.

$$\text{Im} \frac{1}{x - x_0 + i\Gamma}$$

$$= \frac{\Gamma}{(x - x_0)^2 + \Gamma^2}$$

振幅 $\frac{f}{m(\omega_i^2 - \omega^2) + i\alpha\omega} = \frac{f}{\alpha^2 \omega^2 + m(\omega_0^2 - \omega^2)}$, 阻尼会减弱共振.

(3) 朗斯基行列式.

$$m\ddot{x} = -kx + \alpha\dot{x} \quad 2\text{个解.}$$

Wronskion 行列式.

$$\det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ \dot{x}_1 & \dot{x}_2 \end{pmatrix} = x_1 \dot{x}_2 - \dot{x}_1 x_2 = 0$$

$$\frac{dW}{dt} = -\alpha (x_1 \dot{x}_2 - \dot{x}_1 x_2)$$

$$= -\alpha W$$

$$\alpha = 0. \quad \frac{dW}{dt} = 0$$

$$\alpha \neq 0. \quad W(t) = W(0) e^{-\alpha t} \neq 0. \quad \text{但} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$$

(4) Mathieu 方程.

P85. 注脚.

19世纪下半叶

Mathieu.

Hell.

Floquet.