

分类号:     O175    

密    级:     公开    

UDC:     517.9    

单位代码:     10360    

安徽工业大学

# 硕士学位论文

论文题目: 弱非线性振动方程中的几种非线性特性研究



学    号:     1820190293    

作    者:     潘陈蓉    

专业名称:     应用数学    

2021 年 6 月 7 日

# 安徽工业大学硕士学位论文

论文题目：弱非线性振动方程中的几种非线性特性研究

Study on several nonlinear properties of weakly nonlinear vibration equations

作 者： 潘陈蓉 学院： 数理科学与工程学院

指 导 教 师： 陈松林教授 单位： 安徽工业大学数理学院

协助指导教师： \_\_\_\_\_ 单位： \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_ 单位： \_\_\_\_\_

论文提交日期： 2021 年 5 月 28 日

学位授予单位： 安 徽 工 业 大 学

安徽马鞍山 243002

## 独创性说明

本人郑重声明：所提交的论文是我个人在导师指导下进行的研究工作及取得研究成果。尽我所知，除了文中特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果，也不包含为获得安徽工业大学或其他教育机构的学位或证书所使用过的材料。与我一同工作的同志对本研究所做的任何贡献均已在论文中做了明确的说明并表示了谢意。

签名： 潘陈蓉 日期： 2021.6.10

## 关于论文使用授权的说明

本人完全了解安徽工业大学有关保留、使用学位论文的规定，即：学校有权保留送交论文的复印件，允许论文被查阅和借阅；学校可以公布论文的全部或部分内容，可以采用影印、缩印或其他复制手段保存论文，保密的论文在解密后应遵循此规定。

签名： 潘陈蓉 导师签名： 陈彬林 日期： 2021.6.10.

## 摘要

本文主要利用多重尺度方法，研究弱非线性振动方程中的几种非线性特性。

第一章介绍了本文的研究背景、国内外研究进展和研究目的。

第二章研究了弱非线性 Klein-Gordon 波动方程的多波初值问题。使用多重尺度方法，引入解的形式渐近展开式，得到方程的首项近似解和波传播时速度相互影响的定量关系，研究结果表明，另外多个波的存在会使得波的传播速度（相速）超过独自传播时的速度（相速）。最后使用 Mathematica 进行数值仿真，仿真结果表明了多重尺度方法的有效性。

第三章在第二章的研究基础上，讨论了具有三次方弱非线性项和五次弱非线性项的波动方程的单个平面波和双波初值问题。在第一节中，考虑了具有三次方弱非线性项和五次弱非线性项的波动方程的单个平面波初值问题，使用多重尺度方法，得到方程的首项近似解和波传播时的频幅特性。在第二节中，考虑具有三次方弱非线性项和五次方弱非线性项的波动方程的双波初值问题，类似地，使用多重尺度方法，得到方程的首项近似解，研究结果表明多波传播时，由于非线性因素，解的频率特性会变得更复杂。

第四章研究了具有三次方弱非线性项和外部激励项的 Duffing-van der Pol 振动方程。使用多重尺度方法，引入解的形式渐近展开式，得到方程的首项近似解、系统振幅  $A$  与非线性效应  $\varepsilon$  和系统振幅  $A$  与频率参数  $\sigma$  之间的依赖关系。

**关键词：**波动方程；多重尺度方法；非线性特性；渐近展开式；首项近似解

## Abstract

In this paper, several nonlinear properties of weakly nonlinear oscillation equations are studied by using the multi-scale method.

The first chapter introduces the research background, domestic and foreign research progress and research purpose of this article.

In Chapter 2, we study the multi-wave initial value problem for the weakly nonlinear Klein-Gordon wave equation. By using the multi-scale method and introducing the formal asymptotic expansion of the solution, the quantitative relationship that the first approximate solution of the equation depend on the velocity of wave propagation is obtained. The results show that the propagation velocity (phase velocity) of wave is larger than that of wave propagation deduced by single initial wave. Finally, Mathematica is used for numerical simulation, and the simulation results show that the multi-scale method is efficient.

On the basis of the research in the second chapter, the third chapter discusses the problem of single plane wave and double wave initial value with three-sided weak nonlinear terms and five weak nonlinear equations. In the first section, the problem of individual plane wave initial values with three-way weak nonlinear terms and five weak nonlinear equations is considered, and the frequency range characteristics of the first approximation solution and wave propagation of the equation are obtained by means of multiple-scale methods. In the second section, considering the problem of double-wave initial values with three-way weak nonlinear terms and five weak nonlinear terms, similarly, the first approximate solution of the equation is obtained by using multi-scale method, and the results show that the frequency characteristics of the solution become more complex due to nonlinear factors when multi-wave propagation.

In Chapter 4, Duffing-van der Pol oscillation equation with cubic weak nonlinear term and external excitation term is studied. By using the multi-scale method and introducing the formal asymptotic expansion of the solution, the first approximate

solution of the equation, the dependence of the amplitude and nonlinear effect of the system, and the dependence of the amplitude and frequency parameters of the system are obtained.

**Keywords:** Wave equation; multi-scale method; nonlinear property; asymptotic expansion; first term approximate solution

## 目 录

摘 要.....	I
Abstract.....	II
目 录.....	IV
第一章 绪 论.....	1
1.1 引言.....	1
1.2 研究背景与进展.....	1
1.3 研究目的、意义及内容.....	3
第二章 Klein-Gordon 波动方程多波传播的非线性特性.....	6
2.1 引言.....	6
2.2 弱非线性 Klein-Gordon 波动方程的多波相互作用.....	8
2.3 数值仿真.....	11
第三章 五次弱非线性波动方程的非线性特性.....	13
3.1 引言.....	13
3.2 五次方弱非线性波动方程的单个平面波初值问题.....	13
3.3 五次方弱非线性波动方程的双波初值问题.....	15
第四章 弱非线性 Duffing-van der Pol 波动方程的非线性特性.....	18
第五章 总结与展望.....	22
参考文献.....	23
攻读硕士学位期间发表的论文.....	26
致 谢.....	27

## 第一章 绪论

### 1.1 引言

在现实生活中,大多数问题都具有非线性行为的特点。这就使得非线性系统的研究成为各个领域的一个重要的课题。弱非线性 Klein-Gordon 波动方程在力学、非线性光学、旋转波和一些数学物理问题中<sup>[1][2][3]</sup>,有着非常重要的研究和应用价值,所以弱非线性 Klein-Gordon 波动方程被认为是一种重要的非线性系统。

近几十年来,许多学者在社会科学和自然科学领域建立了许多非线性数学模型,并且提出了许多求解非线性波动方程的方法。例如,多重尺度方法<sup>[4][5]</sup>,齐次平衡法<sup>[6][7][8]</sup>,Jacobi 椭圆函数展开法<sup>[9][10]</sup>,直接代数法<sup>[11][12]</sup>,同伦扰动方法<sup>[13]</sup>等。

在 20 世纪 90 年代初,Mark H. Holmes<sup>[14]</sup>使用多重尺度方法研究了弱非线性 Klein-Gordon 波动方程的单个平面波和双波初值问题,使用多重尺度方法,解得波在传播过程中的速度相互受影响的定量关系式,所得结果表明另一个波的存在会使得波的传播速度超过单波传播的速度。Yi Wei<sup>[6]</sup>等人使用齐次平衡法,讨论了一类非线性偏微分方程,并使用齐次平衡法导出非线性偏微分方程的更通用的双线性方程。接着,选择了 Eckhaus 方程, KdV 方程和广义的 Boussinesq 方程来说明齐次平衡法的有效性。由此得出齐次平衡法可以推广用于处理某些类型的非线性偏微分方程。E. Tala-Tebue<sup>[10]</sup>等人通过使用新的 Jacobi 椭圆函数有理展开方法和指数有理函数方法,获得了不稳定非线性 Schrödinger 方程的精确解。通过检验得出 Jacobi 椭圆函数有理展开方法和指数有理函数方法是非常简单有效的,并且可以应用于讨论其他类型的非线性方程。于亚璇<sup>[11]</sup>等人使用直接代数法,讨论了 Hybrid 晶格方程,计算得到方程的新孤波解。直接代数法也可以用于求解其他的差分方程。

### 1.2 研究背景与进展

20 世纪 50 年代末,多重尺度方法开始发展起来,后来被广泛应用于求解微分方程的近似解。多重尺度方法主要有两种不同的变型:导数展开法和两变量展



开法。它是奇异摄动理论中被广泛使用的方法之一，被应用于工程、物理和数学等众多领域的问题中。

20 世纪 90 年代初，Mark H. Holmes<sup>[14]</sup>使用多重尺度方法研究了非线性 Klein-Gordon 波动方程中的双波初值问题

$$\begin{cases} \partial_x^2 u = \partial_t^2 u + u + \varepsilon u^3, & -\infty < x < \infty, 0 < t, \\ u(x, 0) = \alpha_1 \cos(k_1 x) + \alpha_2 \cos(k_2 x), \\ \partial_t u(x, 0) = \alpha_1 \omega_1 \sin(k_1 x) + \alpha_2 \omega_2 \sin(k_2 x). \end{cases} \quad (1.1)$$

得到双波传播过程中速度相互受影响的定量关系式，将所得结果与非线性 Klein-Gordon 波动方程中的单波初值问题进行对比，结果表明另一个波的存在会使得波的传播速度超过单波传播的速度。

1999 年，李家春<sup>[15]</sup>等学者使用多重尺度方法讨论了具有三次方弱非线性项的 Duffing 方程

$$\begin{cases} y'' + y + \varepsilon y^3 = 0, \\ y(0) = a_0, y'(0) = 0. \end{cases} \quad (1.2)$$

通过求解，得到了方程的二阶近似解，通过检验，得到使用的多重尺度方法具有较好的有效性。

1998 年，S. Yang<sup>[16]</sup>等学者研究了具有三次方弱非线性项和三个外部频率激励的 Duffing 方程

$$x'' + \omega^2 x = \varepsilon(-\alpha x^3 - 2\mu x') + \sum_{n=1}^3 K_n \cos(\Omega_n t + \theta_n). \quad (1.3)$$

采用多重尺度方法，求出具有三次方弱非线性项和三个外部频率激励的 Duffing 方程的一致有效近似解。

2007 年，J.I. Ramos<sup>[17]</sup>提出了一种人工参数方法，讨论了具有五次方弱非线性项的 Duffing 方程

$$\begin{cases} u'' + u + \varepsilon u^5 = 0, \\ u(0) = A, u'(0) = 0. \end{cases} \quad (1.4)$$

求解得到具有五次方弱非线性项的 Duffing 方程振动频率的二项近似解。

2007 年，李群<sup>[18]</sup>等人使用 KP 方程，对南海内孤立波的传播特性进行了定性的分析。基于弱二维的 KP 方程，结合南中国海东沙群岛附近内孤立波的观测资

料, 对内孤立波的波-波相互作用进行了数值模拟, 数值结果较好的体现了波-波相互作用的非线性特征, 也就是说, 在两波相交处, 相速会随着振幅的增大而逐渐增大。

2016年, 黄钰淳<sup>[19]</sup>等人使用奇异摄动理论中的多重尺度方法, 讨论了一类 Rayleigh 方程的初值问题

$$\begin{cases} y'' - \varepsilon y'(p - \delta y')^2 + y = 0, \\ y(0) = a_0, y'(0) = 0. \end{cases} \quad (1.5)$$

通过求解, 得到 Rayleigh 方程的一阶渐近解。

2018年, 张丹伟<sup>[20]</sup>等人讨论了含三次方弱非线性项, 并且受到两个外部激励作用时的 Duffing 系统

$$\begin{cases} q'' + \varepsilon_1 q' + q + \varepsilon_2 q^3 = f_1 \cos(\Omega_1 \omega_0 t) + f_2 \cos(\Omega_2 \omega_0 t), \\ q(0) = q'(0) = 0. \end{cases} \quad (1.6)$$

和具有三次方弱非线性项, 并且受到两个外部激励作用时的 van der Pol-Duffing 系统

$$\begin{cases} q'' + \varepsilon(1 - q^2)q' + \omega_0^2 q + \alpha q^3 = p_1 \cos(\omega_1 t) + p_2 \cos(\omega_2 t), \\ q(0) = q'(0) = 0. \end{cases} \quad (1.7)$$

将增量谐波平衡法和多重尺度方法相结合使用, 得到弱非线性系统的准周期运动特性。

2019年, R. Zhang<sup>[21]</sup>等学者研究了广义 $\beta$ 效应下的非线性行星-天气波相互作用的特性, 通过使用多重尺度方法和摄动展开的方法, 求解得到了天气尺度波的修正方程, 研究结果表明, 行星尺度波和天气尺度波的不对称性、强度和持续性都依赖于广义 $\beta$ 效应。

2020年, A.F. Ghaleb<sup>[22]</sup>等学者使用同伦摄动方法和多重尺度方法, 研究了具有五次方弱非线性项和两个外部周期强迫项的 Duffing-van der Pol 方程

$$\begin{cases} x'' - \mu(1 - x^2)x' + \omega^2 x + \lambda x^3 + \beta x^5 = f_1 \cos(\omega_1 t) + f_2 \cos(\omega_2 t), \\ x(0) = 0, x'(0) = 1. \end{cases} \quad (1.8)$$

得到了方程的解析近似解和数值解。

### 1.3 研究目的、意义及内容

在现实生活的许多问题中，都存在着弱非线性振动方程的初值问题。比如，航海、工程、化学工业、冶金工业、力学、数学和非线性光学等<sup>[23][24][25]</sup>。由于弱非线性振动方程的奇摄动初边值问题非常复杂，并且随着社会的不断进步，涌现出越来越多的关于弱非线性振动方程的奇摄动初边值问题的新问题，目前，在众多学科领域，越来越多的学者对弱非线性振动方程的奇摄动初边值问题的研究产生了浓厚的兴趣。

本文主要使用奇异摄动理论中的多重尺度方法，讨论具有弱非线性项的振动方程的几种非线性特性。

在第一章，介绍了多重尺度方法，简述了弱非线性振动方程的初边值问题和多重尺度方法的研究背景与进展和本文研究的目的、意义及内容。

在第二章，考虑具有三次方弱非线性项的 Klein-Gordon 波动方程的多波初值问题

$$\begin{cases} \partial_x^2 u = \partial_t^2 u + u + \varepsilon u^3, -\infty < x < \infty, t > 0, \\ u(x, 0) = \alpha_1 \cos(k_1 x) + \alpha_2 \cos(k_2 x) + \alpha_3 \cos(k_3 x), \\ \partial_t u(x, 0) = \alpha_1 \omega_1 \sin(k_1 x) + \alpha_2 \omega_2 \sin(k_2 x) + \alpha_3 \omega_3 \sin(k_3 x). \end{cases} \quad (1.9)$$

使用多重尺度方法，引入三次方弱非线性项的 Klein-Gordon 波动方程的解的形式渐近展开式，将多重尺度和解的形式渐近展开式带入原方程，通过平衡方程左右两边的小参数  $\varepsilon$  的各次幂的系数，求解得到三次方弱非线性项的 Klein-Gordon 波动方程的首项近似解和波传播时速度相互影响的定量关系式，研究结果表明，另外多个波的存在，会使得波的传播速度（相速）超过波独自传播时的速度（相速）。通过使用 Mathematica 进行数值仿真，得到多重尺度方法的有效性。

第三章在具有三次方弱非线性项的 Klein-Gordon 波动方程的多波初值问题的研究基础上，使用多重尺度方法，讨论具有三次方弱非线性项和五次方弱非线性项振动方程的单个平面波初值问题

$$\begin{cases} \partial_x^2 u = \partial_t^2 u + u + \varepsilon(u^3 + u^5), -\infty < x < \infty, t > 0, \\ u(x, 0) = \alpha \cos(kx), \\ \partial_t u(x, 0) = \alpha \omega \sin(kx). \end{cases} \quad (1.10)$$

和具有三次方弱非线性项和五次方弱非线性项振动方程的双波初值问题

$$\begin{cases} \partial_x^2 u = \partial_t^2 u + u + \varepsilon(u^3 + u^5), -\infty < x < \infty, t > 0, \\ u(x, 0) = \alpha_1 \cos(k_1 x) + \alpha_2 \cos(k_2 x), \\ \partial_t u(x, 0) = \alpha_1 \omega_1 \sin(k_1 x) + \alpha_2 \omega_2 \sin(k_2 x). \end{cases} \quad (1.11)$$

通过引入方程的解的形式渐近展开式, 得到具有三次方弱非线性项和五次方弱非线性项振动方程的首项近似解, 将单个平面波初值问题和双波初值问题的首项近似解进行比较, 结果表明, 在多波传播时, 由于非线性因素的存在, 解的频率特性会变得更复杂。

在第四章, 我们讨论了具有三次方弱非线性项和外部激励作用的 Duffing-van der Pol 方程

$$u'' + u + \varepsilon\mu(u^2 - 1)u' + \varepsilon u^3 = F \cos(\omega t). \quad (1.12)$$

其中  $F$  和  $\omega$  是常数,  $\mu$  是正常数,  $\varepsilon$  是小参数,  $(u^2 - 1)u'$  为非线性阻尼项。类似地, 使用多重尺度方法和引入解的形式渐近展开式, 求解得到方程的首项近似解、系统振幅  $A$  与非线性效应  $\varepsilon$  和系统振幅  $A$  与频率参数  $\sigma$  之间的依赖关系。

在第五章, 对本文的研究工作进行了简单的总结, 并且提出了一些有待进一步考虑的问题。

本文通过使用多重尺度方法, 讨论了弱非线性振动方程的几种非线性特性, 研究结果丰富和发展了奇异摄动初边值问题的相关理论, 具有一定的研究价值和研究意义。

## 第二章 Klein-Gordon 波动方程多波传播的非线性特性

### 2.1 引言

在文献[14]中, Mark H. Holmes 使用多重尺度方法, 讨论了弱非线性波动方程中的单个平面波初值问题:

$$\begin{cases} \partial_x^2 u = \partial_t^2 u + u + \varepsilon u^3, & -\infty < x < \infty, 0 < t, \\ u(x, 0) = \alpha \cos(kx), \\ \partial_t u(x, 0) = \alpha \omega \sin(kx). \end{cases} \quad (2.1)$$

这是著名的非线性Klein-Gordon波动方程的初值问题, 其中,  $\omega = \sqrt{1+k^2}$ , 并且  $k > 0$ , 当  $\varepsilon = 0$  时得到线性方程, 使用傅里叶变换, 得到线性方程的通解形式为:

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{i(kx - \omega t)} dk + \int_{-\infty}^{\infty} B(k) e^{i(kx + \omega t)} dk. \quad (2.2)$$

式中,  $A(k)$  和  $B(k)$  是由初始条件决定的, 因此, 线性方程具有波动解。通过引入多重尺度

$$\theta = kx - \omega t, x_2 = \varepsilon x, t_2 = \varepsilon t, \quad (2.3)$$

和弱非线性 Klein-Gordon 波动方程的解的形式渐近展开式

$$u(x, t) \sim u_0(kx - \omega t) + \varepsilon u_1(x, t) + \dots. \quad (2.4)$$

得到弱非线性Klein-Gordon波动方程的首项近似解为

$$u(x, t) \sim \alpha \cos(kx - \lambda \omega t). \quad (2.5)$$

其中

$$\lambda = 1 + \frac{3\varepsilon\alpha^2}{8\omega^2}. \quad (2.6)$$

接着, Mark H. Holmes 使用多重尺度方法, 进一步讨论了弱非线性 Klein-Gordon 波动方程的双波初值问题:

$$\begin{cases} \partial_x^2 u = \partial_t^2 u + u + \varepsilon u^3, & -\infty < x < \infty, 0 < t, \\ u(x, 0) = \alpha_1 \cos(k_1 x) + \alpha_2 \cos(k_2 x), \\ \partial_t u(x, 0) = \alpha_1 \omega_1 \sin(k_1 x) + \alpha_2 \omega_2 \sin(k_2 x). \end{cases} \quad (2.7)$$

其中,  $\omega_1 = \sqrt{1+k_1^2}$  和  $\omega_2 = \sqrt{1+k_2^2}$ ,  $k_1 \neq k_2$ , 讨论波动方程在传播过程中的频率特性。类似地, 我们引入多重尺度

$$x_1 = x, x_2 = \varepsilon x, t_1 = t, t_2 = \varepsilon t, \quad (2.8)$$

接着, 引入弱非线性 Klein-Gordon 波动方程的双波初值问题的解的形式渐近展开式

$$u(x_1, t_1, x_2, t_2) \sim u_0(x_1, t_1, x_2, t_2) + \varepsilon u_1(x_1, t_1, x_2, t_2) + \dots \quad (2.9)$$

得到方程的首项近似解为

$$u(x, t) \sim \alpha_1 \cos(k_1 x - \lambda_1 \omega_1 t) + \alpha_2 \cos(k_2 x - \lambda_2 \omega_2 t). \quad (2.10)$$

其中

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 + \frac{3\varepsilon}{8\omega_1^2} (\alpha_1^2 + 2\alpha_2^2), \\ \lambda_2 &= 1 + \frac{3\varepsilon}{8\omega_2^2} (\alpha_2^2 + 2\alpha_1^2). \end{aligned} \quad (2.11)$$

研究表明, 在双波传播时, 其中一个波的传播频率会受到另一个波的影响, 也就是说, 另一个波的存在会使得波的传播速度(相速)超过波独自传播时的速度(相速)。在此研究的基础上, 本章继续讨论弱非线性 Klein-Gordon 波动方程的多波初值问题:

$$\begin{cases} \partial_x^2 u = \partial_t^2 u + u + \varepsilon u^3, \\ u(x, 0) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cos(k_i x), \\ \partial_t u(x, 0) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \omega_i \sin(k_i x). \end{cases} \quad (2.12)$$

其中,  $\omega_i = \sqrt{1+k_i^2}$ , 且  $k_i > 0, i=1, 2, \dots, n$ .

## 2.2 弱非线性 Klein-Gordon 波动方程的多波相互作用

为了简洁起见, 首先考虑非线性 Klein-Gordon 波动方程的三个波初值问题:

$$\begin{cases} \partial_x^2 u = \partial_t^2 u + u + \varepsilon u^3, -\infty < x < \infty, t > 0, \\ u(x, 0) = \alpha_1 \cos(k_1 x) + \alpha_2 \cos(k_2 x) + \alpha_3 \cos(k_3 x), \\ \partial_t u(x, 0) = \alpha_1 \omega_1 \sin(k_1 x) + \alpha_2 \omega_2 \sin(k_2 x) + \alpha_3 \omega_3 \sin(k_3 x). \end{cases} \quad (2.13)$$

式中  $\omega_1 = \sqrt{1 + k_1^2}$ ,  $\omega_2 = \sqrt{1 + k_2^2}$  和  $\omega_3 = \sqrt{1 + k_3^2}$ 。

当初始条件中具有多波的情形, 多重尺度 (2.3) 和形式渐近展开式 (2.4) 一般是无效的。因为假设的三个波是不相同的, 所以设  $k_1, k_2, k_3$  是彼此不相等的。此时相应的线性方程具有下述形式的解

$$u = \alpha_1 \cos(k_1 x - \omega_1 t) + \alpha_2 \cos(k_2 x - \omega_2 t) + \alpha_3 \cos(k_3 x - \omega_3 t). \quad (2.14)$$

引入多重尺度

$$x_1 = x, x_2 = \varepsilon x, t_1 = t, t_2 = \varepsilon t, \quad (2.15)$$

则有

$$\partial_x \rightarrow \partial_{x_1} + \varepsilon \partial_{x_2}, \partial_t \rightarrow \partial_{t_1} + \varepsilon \partial_{t_2}. \quad (2.16)$$

从而将弱非线性 Klein-Gordon 波动方程的三个波初值问题 (2.13) 化为:

$$(\partial_{x_1}^2 + \varepsilon^2 \partial_{x_2}^2 + 2\varepsilon \partial_{x_1} \partial_{x_2})u = (\partial_{t_1}^2 + \varepsilon^2 \partial_{t_2}^2 + 2\varepsilon \partial_{t_1} \partial_{t_2})u + u + \varepsilon u^3. \quad (2.17)$$

引入其解的多尺度展式

$$u \sim u_0(x_1, t_1, x_2, t_2) + \varepsilon u_1(x_1, t_1, x_2, t_2) + \dots \quad (2.18)$$

代入弱非线性 Klein-Gordon 波动方程的三个波初值问题 (2.13) 中, 再平衡式 (2.13) 两边的  $O(1)$  项, 得到

$$\begin{cases} \partial_{x_1}^2 u_0 = \partial_{t_1}^2 u_0 + u_0, \\ u_0(x_1, 0, x_2, 0) = \alpha_1 \cos(k_1 x_1) + \alpha_2 \cos(k_2 x_1) + \alpha_3 \cos(k_3 x_1), \\ \partial_{t_1} u_0(x_1, 0, x_2, 0) = \alpha_1 \omega_1 \sin(k_1 x_1) + \alpha_2 \omega_2 \sin(k_2 x_1) + \alpha_3 \omega_3 \sin(k_3 x_1). \end{cases} \quad (2.19)$$

方程 (2.19) 的通解形如

$$u_0 = A_1(x_2, t_2) \cos(\phi_1) + A_2(x_2, t_2) \cos(\phi_2) + A_3(x_2, t_2) \cos(\phi_3). \quad (2.20)$$

式中

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= k_1 x_1 - \omega_1 t_1 + \theta_1(x_2, t_2), \\
\phi_2 &= k_2 x_1 - \omega_2 t_1 + \theta_2(x_2, t_2), \\
\phi_3 &= k_3 x_1 - \omega_3 t_1 + \theta_3(x_2, t_2).
\end{aligned} \tag{2.21}$$

其中,  $A_1, A_2, A_3, \theta_1, \theta_2, \theta_3$  是关于  $x_2, t_2$  的任意函数, 并且要求满足初始条件, 即

$$A_1(x_2, 0) = \alpha_1, A_2(x_2, 0) = \alpha_2, A_3(x_2, 0) = \alpha_3, \tag{2.22}$$

$$\theta_1(x_2, 0) = \theta_2(x_2, 0) = \theta_3(x_2, 0) = 0. \tag{2.23}$$

再平衡式 (2.13) 两边的  $O(\varepsilon)$  项, 得到

$$\partial_{x_1}^2 u_1 = \partial_{t_1}^2 u_1 + u_1 - 2\partial_{x_1} \partial_{x_2} u_0 + 2\partial_{t_1} \partial_{t_2} u_0 + u_0^3. \tag{2.24}$$

从式 (2.24) 中可以得到

$$\begin{aligned}
u_0^3 &= \frac{3}{4}(A_1^3 + 2A_1A_2^2 + 2A_1A_3^2) \cos(\phi_1) + \frac{3}{4}(A_2^3 + 2A_2A_1^2 + 2A_2A_3^2) \cos(\phi_2) \\
&+ \frac{3}{4}(A_3^3 + 2A_3A_1^2 + 2A_3A_2^2) \cos(\phi_3) + \frac{1}{4}A_1^3 \cos(3\phi_1) + \frac{1}{4}A_2^3 \cos(3\phi_2) \\
&+ \frac{1}{4}A_3^3 \cos(3\phi_3) + \frac{3}{2}A_1A_2A_3(\cos(\phi_1 - \phi_2 - \phi_3) + \cos(\phi_1 + \phi_2 - \phi_3) \\
&+ \cos(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3) + \cos(\phi_1 - \phi_2 + \phi_3)) + \frac{3}{4}A_1A_2(A_2 \cos(\phi_1 - 2\phi_2) \\
&+ A_2 \cos(\phi_1 + 2\phi_2) + A_1 \cos(2\phi_1 - \phi_2) + A_1 \cos(2\phi_1 + \phi_2)) \\
&+ \frac{3}{4}A_1A_3(A_3 \cos(\phi_1 - 2\phi_3) + A_3 \cos(\phi_1 + 2\phi_3) + A_1 \cos(2\phi_1 - \phi_3) \\
&+ A_1 \cos(2\phi_1 + \phi_3)) + \frac{3}{4}A_2A_3(A_3 \cos(\phi_2 - 2\phi_3) + A_3 \cos(\phi_2 + 2\phi_3) \\
&+ A_2 \cos(2\phi_2 - \phi_3) + A_2 \cos(2\phi_2 + \phi_3)).
\end{aligned} \tag{2.25}$$

在上式中, 由于等式右边的前三项在多尺度展式中将产生长期项, 并且满足  $\omega_i = \sqrt{1+k_i^2}$ 。所以, 结合  $-2\partial_{x_1} \partial_{x_2} u_0 + 2\partial_{t_1} \partial_{t_2} u_0$ , 将长期项消去, 得到

$$(k_i \partial_{x_2} + \omega_i \partial_{t_2})A_i = 0, \tag{2.26}$$

和

$$(k_i \partial_{x_2} + \omega_i \partial_{t_2})\theta_i = -\frac{3}{8}(A_i^2 + 2A_j^2 + 2A_k^2). \tag{2.27}$$

式中  $i \neq j \neq k$ 。线性波动方程 (2.26) 的通解为:



$$A_i = A_i(\omega_i x_2 - k_i t_2) \quad (2.28)$$

结合初始条件 (2.22) 得到,  $A_i$  是常数, 并且  $A_i = \alpha_i$ , 从而得到线性波动方程 (2.27) 的通解为:

$$(k_i \omega_j - k_j \omega_i) \theta_i = -\frac{3}{8} (A_i^2 + 2A_j^2 + 2A_k^2) (\omega_j x_2 - k_j t_2) + c_i (\omega_i x_2 - k_i t_2). \quad (2.29)$$

式中  $c_i$  由式 (2.23) 决定, 从而得到

$$\theta_i = -\frac{3}{8\omega_i} (A_i^2 + 2A_j^2 + 2A_k^2) t_2. \quad (2.30)$$

结合式 (2.13) 中的初始条件, 得到弱非线性 Klein-Gordon 波动方程的解的首项近似解为:

$$u \sim \alpha_1 \cos(k_1 x - \lambda_1 \omega_1 t) + \alpha_2 \cos(k_2 x - \lambda_2 \omega_2 t) + \alpha_3 \cos(k_3 x - \lambda_3 \omega_3 t). \quad (2.31)$$

式中

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 + \frac{3\varepsilon}{8\omega_1^2} (\alpha_1^2 + 2\alpha_2^2 + 2\alpha_3^2), \\ \lambda_2 &= 1 + \frac{3\varepsilon}{8\omega_2^2} (\alpha_2^2 + 2\alpha_1^2 + 2\alpha_3^2), \\ \lambda_3 &= 1 + \frac{3\varepsilon}{8\omega_3^2} (\alpha_3^2 + 2\alpha_1^2 + 2\alpha_2^2). \end{aligned} \quad (2.32)$$

研究表明, 当三个波传播时, 其中一个波的传播频率会受到另外两个波的影响, 也就是说, 另外多个波的存在会使得波的传播速度 (相速) 超过波独自传播时的速度 (相速)。

接着, 一般地, 对于具有  $n$  个初始波的情形

$$\begin{cases} \partial_x^2 u = \partial_t^2 u + u + \varepsilon u^3, \\ u(x, 0) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cos(k_i x), \\ \partial_t u(x, 0) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \omega_i \sin(k_i x). \end{cases} \quad (2.33)$$

我们仿照三波传播的讨论, 引入 (2.15) 中的多重尺度, 得到方程的首项近似解为

$$u \sim \sum_{i=1}^n \alpha_i \cos(k_i x - \lambda_i \omega_i t). \quad (2.34)$$

式中

$$\lambda_i = 1 + \frac{3\varepsilon}{8\omega_i^2} (\alpha_i^2 + 2 \sum_{j \neq i}^n \alpha_j^2), (i=1, 2, \dots, n) \quad (2.35)$$

研究表明, 在多个波传播时, 其中一个波的传播速度会受到另外多个波的影响, 也就是说, 另外多个波的存在会使得波的传播速度(相速)超过波独自传播时的速度(相速)。

### 2.3 数值仿真

为了验证本文中使用的多重尺度方法的有效性, 我们在弱非线性 Klein-Gordon 波动方程的初值问题

$$\begin{cases} \partial_x^2 u = \partial_t^2 u + u + \varepsilon u^3, \\ u(x, 0) = \alpha_1 \cos(k_1 x) + \alpha_2 \cos(k_2 x) + \alpha_3 \cos(k_3 x), \\ \partial_t u(x, 0) = \alpha_1 \omega_1 \sin(k_1 x) + \alpha_2 \omega_2 \sin(k_2 x) + \alpha_3 \omega_3 \sin(k_3 x). \end{cases} \quad (2.36)$$

中, 取

$$\varepsilon = 0.005, \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1, k_1 = 0.5, k_2 = 1, k_3 = 2.$$

由  $\omega_i = \sqrt{1+k_i^2}$  得  $\omega_1 = \sqrt{1.25}, \omega_2 = \sqrt{2}, \omega_3 = \sqrt{5}$ . 应用 Mathematica 对非线性 Klein-Gordon 波动方程 (2.36) 进行数值求解, 并且作出方程在区域  $0 < t < 3, -10 < x < 10$  中的波动图, 如图 1 所示。

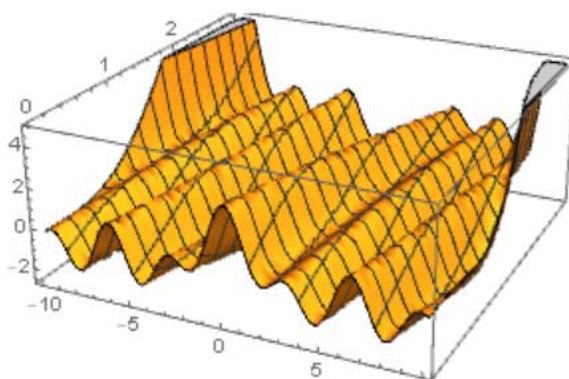


图 1 弱非线性 Klein-Gordon 波动方程在区域  $0 < t < 3, -10 < x < 10$  中的波动图

接着, 作出本文得到的弱非线性 Klein-Gordon 波动方程的解的首项近似解

(2.31) 在区域  $0 < t < 3$ ,  $-10 < x < 10$  中的波动图, 如图 2 所示。

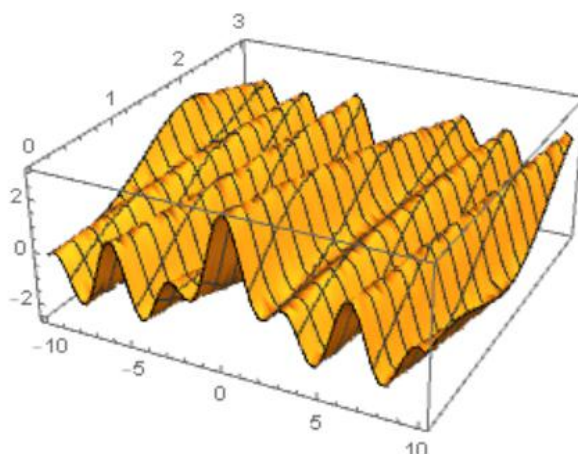


图 2 弱非线性 Klein-Gordon 波动方程的解的首项近似解 (2.31) 在区域  $0 < t < 3$ ,  $-10 < x < 10$  中的波动图

由图 1 和图 2 可以看出, 在区域  $0 < t < 3$ ,  $-10 < x < 10$  中, 弱非线性 Klein-Gordon 波动方程的解的波动趋势和方程的解的首项近似解 (2.31) 的波动趋势是几乎一致的。由图 1 可以看出, 方程在边界  $x = \pm 10$  处出现了奇性, 这是由于 Mathematica 在数值求解时受到自动设置人工边界的影响。综上所述, 本文使用的多重尺度方法讨论弱非线性 Klein-Gordon 波动方程的多波传播具有较好的有效性。

### 第三章 五次弱非线性波动方程的非线性特性

#### 3.1 引言

通过上一章的讨论, 我们知道, 对于弱非线性 Klein-Gordon 波动方程, 在多波传播时, 其中一个波的传播频率会受到另外多个波的影响, 即另外多个波的存在会使得波的传播速度(相速)超过波独自传播时的速度(相速)。本章接着考虑具有高次弱非线性波动方程的初值问题:

$$\begin{cases} \partial_x^2 u = \partial_t^2 u + u + \varepsilon(u^3 + u^5), -\infty < x < \infty, t > 0, \\ u(x, 0) = F(x), \\ \partial_t u(x, 0) = G(x). \end{cases} \quad (3.1)$$

在上一章的基础上, 加上更高次的弱非线性项  $\varepsilon u^5$ , 讨论波在传播过程中的频率特性会更困难。本章通过选取合适的多重尺度, 讨论高次弱非线性波动方程的单个平面波初值问题和双波初值问题, 得出具有高次弱非线性波动方程传播过程中的频率特性。

#### 3.2 五次方弱非线性波动方程的单个平面波初值问题

考虑具有五次弱非线性波动方程的单个平面波初值问题:

$$\begin{cases} \partial_x^2 u = \partial_t^2 u + u + \varepsilon(u^3 + u^5), -\infty < x < \infty, t > 0, \\ u(x, 0) = \alpha \cos(kx), \\ \partial_t u(x, 0) = \alpha \omega \sin(kx). \end{cases} \quad (3.2)$$

其中  $\omega = \sqrt{1+k^2}$  且  $k > 0$ 。

引入多重尺度

$$x_1 = x, x_2 = \varepsilon x, t_1 = t, t_2 = \varepsilon t, \quad (3.3)$$

和解的形式渐近展开式

$$u \sim u_0(x_1, t_1, x_2, t_2) + \varepsilon u_1(x_1, t_1, x_2, t_2) + \dots \quad (3.4)$$

方程 (3.2) 化为:

$$(\partial_{x_1}^2 + \varepsilon^2 \partial_{x_2}^2 + 2\varepsilon \partial_{x_1} \partial_{x_2})u = (\partial_{t_1}^2 + \varepsilon^2 \partial_{t_2}^2 + 2\varepsilon \partial_{t_1} \partial_{t_2})u + u + \varepsilon(u^3 + u^5). \quad (3.5)$$

平衡式 (3.5) 两边的  $O(1)$  项, 得到

$$\begin{cases} \partial_{x_1}^2 u_0 = \partial_{t_1}^2 u_0 + u_0, \\ u_0(x_1, 0, x_2, 0) = \alpha \cos(kx_1), \\ \partial_{t_1} u_0(x_1, 0, x_2, 0) = \alpha \omega \sin(kx_1). \end{cases} \quad (3.6)$$

设

$$u_0 = A(x_2, t_2) \cos \phi. \quad (3.7)$$

其中,  $\phi = kx_1 - \omega t_1 + \theta(x_2, t_2)$ ,  $A$  和  $\theta$  是关于  $x_2$  和  $t_2$  的任意函数, 满足初始条件

$$A(x_2, 0) = \alpha, \theta(x_2, 0) = 0. \quad (3.8)$$

再平衡式 (3.5) 两边的  $O(\varepsilon)$  项, 得到

$$\begin{aligned} \partial_{x_1}^2 u_1 &= \partial_{t_1}^2 u_1 + u_1 - 2\partial_{x_1} \partial_{x_2} u_0 + 2\partial_{t_1} \partial_{t_2} u_0 + u_0^3 + u_0^5 \\ &= \partial_{t_1}^2 u_1 + u_1 + 2(\omega \partial_{t_2} + k \partial_{x_2}) A \sin \phi \\ &\quad + 2A[(\omega \partial_{t_2} + k \partial_{x_2}) \theta + \frac{5}{16} A^4 + \frac{3}{8} A^2] \cos \phi \\ &\quad + \frac{5}{16} A^5 \cos(3\phi) + \frac{1}{4} A^3 \cos(3\phi) + \frac{1}{16} A^5 \cos(5\phi). \end{aligned} \quad (3.9)$$

在上式中, 等式右边将产生长期项, 为了将其消去, 必须

$$(\omega \partial_{t_2} + k \partial_{x_2}) A = 0, \quad (3.10)$$

和

$$(\omega \partial_{t_2} + k \partial_{x_2}) \theta = -\frac{5}{16} A^4 - \frac{3}{8} A^2. \quad (3.11)$$

线性波动方程 (3.10) 的通解为:

$$A = A(\omega x_2 - k t_2), \quad (3.12)$$

结合式 (3.6) 中的初始条件得,  $A$  是常数, 并且  $A = \alpha$ , 线性波动方程 (3.11) 的通解为:

$$\theta = -\frac{1}{8\omega} \left( \frac{5}{2} A^4 + 3A^2 \right) t_2. \quad (3.13)$$

得到五次弱非线性 Klein-Gordon 波动方程的解的首项近似解为:

$$u \sim \alpha \cos(kx - \lambda \omega t). \quad (3.14)$$

式中

$$\lambda = 1 + \frac{\varepsilon}{8\omega^2} \left( \frac{5}{2} \alpha^4 + \alpha^2 \right).$$

研究表明, 波在传播时, 频率和振幅有关, 振幅越大, 频率越大, 波的传播速度越快。

### 3.3 五次方弱非线性波动方程的双波初值问题

考虑五次弱非线性 Klein-Gordon 波动方程的双波初值问题:

$$\begin{cases} \partial_x^2 u = \partial_t^2 u + u + \varepsilon(u^3 + u^5), & -\infty < x < \infty, t > 0, \\ u(x, 0) = \alpha_1 \cos(k_1 x) + \alpha_2 \cos(k_2 x), \\ \partial_t u(x, 0) = \alpha_1 \omega_1 \sin(k_1 x) + \alpha_2 \omega_2 \sin(k_2 x). \end{cases} \quad (3.15)$$

式中  $\omega_1 = \sqrt{1 + k_1^2}$  和  $\omega_2 = \sqrt{1 + k_2^2}$ , 且  $k_1 \neq k_2$ .

当  $\varepsilon = 0$  时, 此时相应的线性方程具有下述形式的解

$$u = \alpha_1 \cos(k_1 x - \omega_1 t) + \alpha_2 \cos(k_2 x - \omega_2 t). \quad (3.16)$$

引入多重尺度

$$x_1 = x, x_2 = \varepsilon x, t_1 = t, t_2 = \varepsilon t, \quad (3.17)$$

和解的形式渐近展开式

$$u \sim u_0(x_1, t_1, x_2, t_2) + \varepsilon u_1(x_1, t_1, x_2, t_2) + \dots \quad (3.18)$$

方程 (3.15) 化为:

$$(\partial_{x_1}^2 + \varepsilon^2 \partial_{x_2}^2 + 2\varepsilon \partial_{x_1} \partial_{x_2})u = (\partial_{t_1}^2 + \varepsilon^2 \partial_{t_2}^2 + 2\varepsilon \partial_{t_1} \partial_{t_2})u + u + \varepsilon(u^3 + u^5). \quad (3.19)$$

平衡式 (3.19) 两边的  $\varepsilon^0$  项, 得到

$$\begin{cases} \partial_{x_1}^2 u_0 = \partial_{t_1}^2 u_0 + u_0, \\ u_0(x_1, 0, x_2, 0) = \alpha_1 \cos(k_1 x_1) + \alpha_2 \cos(k_2 x_1), \\ \partial_{t_1} u_0(x_1, 0, x_2, 0) = \alpha_1 \omega_1 \sin(k_1 x_1) + \alpha_2 \omega_2 \sin(k_2 x_1). \end{cases} \quad (3.20)$$

设

$$u_0 = A_1(x_2, t_2) \cos(\phi_1) + A_2(x_2, t_2) \cos(\phi_2). \quad (3.21)$$

式中

$$\begin{aligned}\phi_1 &= k_1 x_1 - \omega_1 t_1 + \theta_1(x_2, t_2), \\ \phi_2 &= k_2 x_1 - \omega_2 t_1 + \theta_2(x_2, t_2).\end{aligned}$$

其中,  $A_1, A_2, \theta_1$  和  $\theta_2$  是关于  $x_2$  和  $t_2$  的任意函数, 满足初始条件

$$A_1(x_2, 0) = \alpha_1, A_2(x_2, 0) = \alpha_2, \theta_1(x_2, 0) = \theta_2(x_2, 0) = 0. \quad (3.22)$$

再平衡式 (3.19) 两边的  $\varepsilon$  项, 得到

$$\partial_{x_1}^2 u_1 = \partial_{t_1}^2 u_1 + u_1 - 2\partial_{x_1} \partial_{x_2} u_0 + 2\partial_{t_1} \partial_{t_2} u_0 + u_0^3 + u_0^5. \quad (3.23)$$

从式 (3.21) 得到

$$\begin{aligned}u_0^3 &= \frac{3}{4} A_1 (A_1^2 + 2A_2^2) \cos \phi_1 + \frac{3}{4} A_2 (A_2^2 + 2A_1^2) \cos \phi_2 + \frac{1}{4} A_1^3 \cos(3\phi_1) \\ &\quad + \frac{1}{4} A_2^3 \cos(3\phi_2) + \frac{3}{4} A_1^2 A_2 \cos(2\phi_1 - \phi_2) + \frac{3}{4} A_1^2 A_2 \cos(2\phi_1 + \phi_2) \\ &\quad + \frac{3}{4} A_1 A_2^2 \cos(2\phi_2 - \phi_1) + \frac{3}{4} A_1 A_2^2 \cos(2\phi_2 + \phi_1).\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}u_0^5 &= \frac{5}{8} A_1^5 \cos \phi_1 + \frac{15}{4} A_1^3 A_2^2 \cos \phi_1 + \frac{15}{8} A_1 A_2^4 \cos \phi_1 + \frac{5}{8} A_2^5 \cos \phi_2 + \frac{15}{4} A_2^3 A_1^2 \cos \phi_2 \\ &\quad + \frac{15}{8} A_2 A_1^4 \cos \phi_2 + \frac{5}{16} A_1^5 \cos(3\phi_1) + \frac{5}{4} A_1^3 A_2^2 \cos(3\phi_1) + \frac{1}{16} A_1^5 \cos(5\phi_1) + \frac{5}{16} A_2^5 \cos(3\phi_2) \\ &\quad + \frac{5}{4} A_2^3 A_1^2 \cos(3\phi_2) + \frac{1}{16} A_2^5 \cos(5\phi_2) + \frac{5}{4} A_1^4 A_2 [\cos(2\phi_1 + \phi_2) + \cos(2\phi_1 - \phi_2)] \\ &\quad + \frac{5}{16} A_1^4 A_2 [\cos(4\phi_1 + \phi_2) + \cos(4\phi_1 - \phi_2)] + \frac{15}{8} A_1^3 A_2^2 [\cos(\phi_1 + 2\phi_2) + \cos(\phi_1 - 2\phi_2)] \\ &\quad + \frac{5}{8} A_1^3 A_2^2 [\cos(3\phi_1 + 2\phi_2) + \cos(3\phi_1 - 2\phi_2)] + \frac{5}{8} A_1^2 A_2^3 [\cos(2\phi_1 + 3\phi_2) + \cos(2\phi_1 - 3\phi_2)] \\ &\quad + \frac{15}{8} A_1^2 A_2^3 [\cos(2\phi_1 + \phi_2) + \cos(2\phi_1 - \phi_2)] + \frac{5}{4} A_1 A_2^4 [\cos(\phi_1 + 2\phi_2) + \cos(\phi_1 - 2\phi_2)] \\ &\quad + \frac{5}{16} A_1 A_2^4 [\cos(\phi_1 + 4\phi_2) + \cos(\phi_1 - 4\phi_2)].\end{aligned}$$

在上式中, 等式右边将产生长期项, 需要结合  $-2\partial_{x_1} \partial_{x_2} u_0 + 2\partial_{t_1} \partial_{t_2} u_0$  将其消去, 得到

$$(k_i \partial_{x_2} + \omega_i \partial_{t_2}) A_i = 0, \quad (3.24)$$

和

$$(k_i \partial_{x_2} + \omega_i \partial_{t_2}) \theta_i = -\frac{1}{8} \left[ \frac{5}{2} A_i^4 + 15 A_i^2 A_j^2 + \frac{15}{2} A_j^4 + 3(A_i^2 + 2A_j^2) \right]. \quad (3.25)$$

式中  $i \neq j$ . 线性波动方程 (3.24) 的通解为:

$$A_i = A_i(\omega_i x_2 - k_i t_2). \quad (3.26)$$

结合式 (3.15) 中的初始条件得,  $A_i$  是常数, 并且  $A_i = \alpha_i$ , 则线性波动方程 (3.25) 的通解为:

$$(k_i \omega_j + k_j \omega_i) \theta_i = -\frac{1}{8} \left[ \frac{5}{2} A_i^4 + 15 A_i^2 A_j^2 + \frac{15}{2} A_j^4 + 3(A_i^2 + 2A_j^2) \right] (\omega_j x_2 - k_j t_2) + c_i (\omega_i x_2 - k_i t_2). \quad (3.27)$$

从而得到

$$\theta_i = -\frac{1}{8\omega_i} \left[ \frac{5}{2} A_i^4 + 15 A_i^2 A_j^2 + \frac{15}{2} A_j^4 + 3(A_i^2 + 2A_j^2) \right] t_2. \quad (3.28)$$

结合式 (3.15) 中的初始条件, 得到高次弱非线性 Klein-Gordon 波动方程的首项近似解为:

$$u \sim \alpha_1 \cos(k_1 x - \lambda_1 \omega_1 t) + \alpha_2 \cos(k_2 x - \lambda_2 \omega_2 t). \quad (3.29)$$

式中

$$\lambda_1 = 1 + \frac{\varepsilon}{8\omega_1^2} \left( \frac{5}{2} \alpha_1^4 + 15 \alpha_1^2 \alpha_2^2 + \frac{15}{2} \alpha_2^4 + 3(\alpha_1^2 + 2\alpha_2^2) \right),$$

$$\lambda_2 = 1 + \frac{\varepsilon}{8\omega_2^2} \left( \frac{5}{2} \alpha_2^4 + 15 \alpha_2^2 \alpha_1^2 + \frac{15}{2} \alpha_1^4 + 3(\alpha_2^2 + 2\alpha_1^2) \right).$$

研究表明, 对于具有五次方弱非线性项的波动方程的初值问题, 由于受到其他波的影响, 方程的解的频率特性会变得更复杂, 即频率不仅会变大, 而且还出现了  $\alpha_1$  和  $\alpha_2$  的交叉项  $\alpha_1^2 \alpha_2^2$ .



## 第四章 弱非线性 Duffing-van der Pol 波动方程的非线性特性

本章使用多重尺度方法，讨论具有三次方弱非线性项和一个外部激励项的 Duffing-van der Pol 方程

$$u'' + u + \varepsilon\mu(u^2 - 1)u' + \varepsilon u^3 = F \cos(\omega t). \quad (4.1)$$

其中  $F$  和  $\omega$  是常数， $\mu$  是正常数， $\varepsilon$  是小参数， $(u^2 - 1)u'$  为非线性阻尼项。讨论系统振幅与非线性效应和系统振幅与频率之间的关系。

引入多重尺度

$$t_1 = t, t_2 = \varepsilon t, \quad (4.2)$$

设具有三次方弱非线性项和一个外部激励项的 Duffing-van der Pol 方程(4.1) 的解的多尺度形式展开式为

$$u(t; \varepsilon) = u_0(t) + \varepsilon u_1(t) + \dots \quad (4.3)$$

将式 (4.3) 代入方程 (4.1) 中，得到

$$(\partial_{t_1}^2 + 2\varepsilon \partial_{t_1} \partial_{t_2} + \varepsilon^2 \partial_{t_2}^2)u + u + \varepsilon\mu(u^2 - 1)(\partial_{t_1} + \varepsilon \partial_{t_2})u = F \cos(\omega t). \quad (4.4)$$

平衡式 (4.4) 两边的  $\varepsilon^0$  项的系数，得到

$$\partial_{t_1}^2 u_0 + u_0 = F \cos(\omega t_1). \quad (4.5)$$

从而得到  $u_0$  的通解形如

$$u_0 = A(t_2) \cos(t_1 + \theta(t_2)) + \frac{F}{1 - \omega^2} \cos(\omega t_1). \quad (4.6)$$

再平衡式 (4.4) 两边的  $\varepsilon$  项的系数，得到

$$\partial_{t_1}^2 u_1 + u_1 = -2\partial_{t_1} \partial_{t_2} u_0 - \mu(u_0^2 - 1)\partial_{t_1} u_0 - u_0^3. \quad (4.7)$$

将式 (4.6) 代入式 (4.7) 得到

$$\begin{aligned}
 \partial_{t_1}^2 u_1 + u_1 = & 2A' \cos \theta \sin t_1 + 2A' \sin \theta \cos t_1 + 2A\theta' \cos \theta \cos t_1 - 2A\theta' \sin \theta \sin t_1 \\
 & - \mu \left[ -\frac{1}{4} A^3 \cos \theta \sin t_1 - \frac{1}{4} A^3 \sin \theta \cos t_1 - \frac{1}{4} A^3 \sin(3t_1 + 3\theta) - \frac{AF^2}{2(1-\omega^2)^2} \cos \theta \sin t_1 \right. \\
 & - \frac{AF^2}{2(1-\omega^2)^2} \sin \theta \cos t_1 - \frac{AF^2}{4(1-\omega^2)} \sin(\omega t_1 + 2t_1 + 2\theta) - \frac{F^3}{4(1-\omega^2)^3} \sin(\omega t_1) \\
 & - \frac{3AF^2}{4(1-\omega^2)^2} \sin(2\omega t_1 + t_1 + \theta) + \frac{AF^2}{4(1-\omega^2)^2} \sin(2\omega t_1 - t_1 - \theta) - \frac{F^3}{4(1-\omega^2)^3} \sin(3\omega t_1) \\
 & - \frac{A^2 F}{2(1-\omega^2)} \sin(\omega t_1 + 2t_1 + 2\theta) + \frac{A^2 F}{4(1-\omega^2)} \sin(\omega t_1 - 2t_1 - 2\theta) - \frac{A^2 F}{2(1-\omega^2)} \sin(\omega t_1) \\
 & \left. - \frac{A^2 F}{2(1-\omega^2)^2} \sin(2\omega t_1 - t_1 - \theta) \right] + \mu \left[ -A \cos \theta \sin t_1 - A \sin \theta \cos t_1 - \frac{F}{1-\omega^2} \sin(\omega t_1) \right] \\
 & - \frac{3}{4} A^3 \cos \theta \cos t_1 + \frac{3}{4} A^3 \sin \theta \sin t_1 - \frac{1}{4} A^3 \cos(3t_1 + 3\theta) - \frac{3AF^2}{2(1-\omega^2)^2} \cos \theta \cos t_1 \\
 & + \frac{3AF^2}{2(1-\omega^2)^2} \sin \theta \sin t_1 - \frac{3A^2 F}{2(1-\omega^2)} \cos(\omega t_1) - \frac{3A^2 F}{4(1-\omega^2)} \cos(\omega t_1 + 2t_1 + 2\theta) \\
 & - \frac{3A^2 F}{4(1-\omega^2)} \cos(\omega t_1 - 2t_1 - 2\theta) - \frac{3AF^2}{4(1-\omega^2)^2} \cos(2\omega t_1 + t_1 + \theta) \\
 & - \frac{3AF^2}{4(1-\omega^2)^2} \cos(2\omega t_1 - t_1 - \theta) - \frac{3F^3}{4(1-\omega^2)^3} \cos(\omega t_1) - \frac{F^3}{4(1-\omega^2)^3} \cos(3\omega t_1).
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

根据式 (4.8) 的右边可以看出, 其解将产生长期项, 并且当  $\omega \approx -1, \frac{1}{3}$  和 1 时, 式 (4.8) 将产生小分母项, 所以必须将长期项和小分母项消去。

本文将讨论  $\omega \approx \frac{1}{3}$  的情形。为此引入

$$\omega = \frac{1}{3} + \varepsilon\sigma. \tag{4.9}$$

其中,  $\sigma = O(1)$ . 将式 (4.9) 代入式 (4.8) 得到

$$\begin{aligned}
 \partial_{t_1}^2 u_1 + u_1 = & [2A' \cos \theta - 2A\theta' \sin \theta - \mu(-\frac{1}{4}A^3 \cos \theta - \frac{AF^2}{2(1-\omega^2)^2} \cos \theta \\
 & - \frac{F^3}{4(1-\omega^2)^3} \cos(3\sigma_2) - A \cos \theta) + \frac{3}{4}A^3 \sin \theta - \frac{3AF^2}{2(1-\omega^2)^2} \sin \theta \\
 & + \frac{F^3}{4(1-\omega^2)^3} \sin(3\sigma_2)] \sin t_1 + [2A' \sin \theta + 2A\theta' \cos \theta - \mu(-\frac{1}{4}A^3 \sin \theta \\
 & - \frac{AF^2}{2(1-\omega^2)^2} \sin \theta - \frac{F^3}{4(1-\omega^2)^3} \sin(3\sigma_2) - A \sin \theta) - \frac{3}{4}A^3 \cos \theta \\
 & - \frac{3AF^2}{2(1-\omega^2)^2} \cos \theta + \frac{F^3}{4(1-\omega^2)^3} \cos(3\sigma_2)] \cos t_1 - \mu[-\frac{1}{4}A^3 \sin(3t_1 + 3\theta) \\
 & - \frac{F^3}{4(1-\omega^2)^3} \sin(\frac{1}{3}t_1 + \sigma_2) - \frac{3AF^2}{4(1-\omega^2)^2} \sin(\frac{5}{3}t_1 + 2\sigma_2 + \theta) \\
 & - \frac{3A^2F}{4(1-\omega^2)} \sin(\frac{7}{3}t_1 + \sigma_2 + 2\theta) - \frac{A^2F}{4(1-\omega^2)} \sin(\frac{5}{3}t_1 - \sigma_2 + 2\theta) \\
 & - \frac{A^2F}{2(1-\omega^2)} \sin(\frac{1}{3}t_1 + \sigma_2) + \frac{AF^2}{4(1-\omega^2)^2} \sin(\frac{1}{3}t_1 - 2\sigma_2 + \theta) \\
 & + \frac{F}{1-\omega^2} \sin(\frac{1}{3}t_1 + \sigma_2)] - \frac{1}{4}A^3 \cos(3t_1 + 3\theta) - \frac{3A^2F}{2(1-\omega^2)} \cos(\frac{1}{3}t_1 + \sigma_2) \\
 & - \frac{3A^2F}{4(1-\omega^2)} \cos(\frac{7}{3}t_1 + \sigma_2 + 2\theta) - \frac{3A^2F}{4(1-\omega^2)} \cos(\frac{5}{3}t_1 - \sigma_2 + 2\theta) \\
 & - \frac{3AF^2}{4(1-\omega^2)^2} \cos(\frac{5}{3}t_1 + 2\sigma_2 + \theta) - \frac{3AF^2}{4(1-\omega^2)^2} \cos(\frac{1}{3}t_1 - 2\sigma_2 + \theta) \\
 & - \frac{3F^3}{4(1-\omega^2)^3} \cos(\frac{1}{3}t_1 + \sigma_2).
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

为了将长期项消去，必须

$$\begin{aligned}
 & 2A' \cos \theta - 2A\theta' \sin \theta - \mu(-\frac{1}{4}A^3 \cos \theta - \frac{AF^2}{2(1-\omega^2)^2} \cos \theta - \frac{F^3}{4(1-\omega^2)^3} \cos(3\sigma_2) \\
 & - A \cos \theta) + \frac{3}{4}A^3 \sin \theta - \frac{3AF^2}{2(1-\omega^2)^2} \sin \theta + \frac{F^3}{4(1-\omega^2)^3} \sin(3\sigma_2) = 0,
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

和

$$\begin{aligned}
 & 2A' \sin \theta + 2A\theta' \cos \theta - \mu \left( -\frac{1}{4} A^3 \sin \theta - \frac{AF^2}{2(1-\omega^2)^2} \sin \theta - \frac{F^3}{4(1-\omega^2)^3} \sin(3\sigma_2) \right) \\
 & - A \sin \theta - \frac{3}{4} A^3 \cos \theta - \frac{3AF^2}{2(1-\omega^2)^2} \cos \theta + \frac{F^3}{4(1-\omega^2)^3} \cos(3\sigma_2) = 0.
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

由式 (4.11) 和 (4.12) 可得

$$\left( \frac{\mu}{4} A^3 + \frac{AF^2 \mu}{2(1-\omega^2)^2} - \mu A \right)^2 + \left( \frac{3}{4} A^3 - \frac{3AF^2}{2(1-\omega^2)^2} \right)^2 = \sqrt{1+\mu^2} \frac{F^6}{16(1-\omega^2)^6}. \tag{4.13}$$

将式 (4.9) 代入式 (4.13) 便得到系统振幅  $A$  与非线性效应  $\varepsilon$  和系统振幅  $A$  与频率参数  $\sigma$  之间的依赖关系

$$\begin{aligned}
 & \left( \frac{\mu}{4} A^3 + \frac{81AF^2 \mu}{2(8-9\sigma^2\omega^2-6\sigma\varepsilon)^2} - \mu A \right)^2 + \left( \frac{3}{4} A^3 - \frac{243AF^2}{2(8-9\sigma^2\omega^2-6\sigma\varepsilon)^2} \right)^2 \\
 & = \sqrt{1+\mu^2} \frac{9^6 F^6}{16(8-9\sigma^2\omega^2-6\sigma\varepsilon)^6}.
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

根据式 (4.14) 可以得到, 非线性效应  $\varepsilon$  和频率参数  $\sigma$  会影响系统的振幅  $A$ 。

## 第五章 总结与展望

在力学、非线性光学、旋转波等众多问题中都具有非线性行为的特点<sup>[26][27]</sup>。近几十年来,学者们建立了许多非线性数学模型,并提出了许多求解非线性波动方程的方法<sup>[28][29][30]</sup>。

本文主要使用奇异摄动理论中的多重尺度方法,讨论具有弱非线性项和外部激励项是波动方程的初值问题。在第二章,使用多重尺度方法,研究了具有三次方弱非线性项 Klein-Gordon 波动方程的多波初值问题,得到方程的首项近似解,研究表明,多波传播时,其中一个波的传播速度会受到另外波的影响,也就是说,另外波的存在会使得波的传播速度(相速)超过波独自传播时的速度(相速)。接着,使用 Mathematica 进行数值仿真,结果表明本文使用的多重尺度方法的有效性。

第三章在第二章研究的基础上,讨论了具有三次方弱非线性项和五次方弱非线性项的波动方程的单个平面波和双波初值问题。使用多重尺度方法,引入解的形式渐近展开,得到方程的首项近似解,研究表明当波数增加时,解的频率特性会变得更复杂,频率不仅会变大,而且还会出现振幅的交叉项。

第四章考虑了具有三次方弱非线性项和外部激励项的 Duffing-van der Pol 振动方程,类似地,使用多重尺度方法,得到方程的首项近似解、系统振幅  $A$  与非线性效应  $\varepsilon$  和系统振幅  $A$  与频率参数  $\sigma$  之间的依赖关系。结果表明,非线性效应  $\varepsilon$  和频率参数  $\sigma$  会影响系统振幅  $A$ 。

对于具有更高次的弱非线性项波动方程的多波初值问题,还有很多方面值得我们进一步地研究。在本文中,我们使用多重尺度方法,主要研究了具有三次方弱非线性项和五次方弱非线性项的波动方程的初值问题。在今后的研究中,我们也可以尝试讨论波动方程的其它非线性特性,并做数值仿真实验。在讨论的问题基础上,我们也可以考虑一些其他经典的数学物理模型。

## 参考文献

- [1] Su H, Zhang W. Adaptive Fuzzy Control of Stochastic Nonlinear Systems With Fuzzy Dead Zones and Unmodeled Dynamics[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2018:1-13.
- [2] Abdulle A, Pavliotis G A. Numerical methods for stochastic partial differential equations with multiple scales[J]. Journal of Computational Physics, 2011, 231(6):2482-2497.
- [3] 孙波. 移动荷载作用下饱和土地基中的波动特性分析[J]. 计算力学学报, 2018,35(06):802-808.
- [4] Wu Z, Li Z, Chen G Q. Multi-scale analysis for environmental dispersion in wetland flow[J]. Communications in Nonlinear Science & Numerical Simulation, 2011, 16(8):3168-3178.
- [5] Oruc O. Numerical solution to the deflection of thin plates using the two-dimensional Berger equation with a meshless method based on multiple-scale Pascal polynomials[J]. Applied Mathematical Modelling, 2019, 74(OCT.):441-456.
- [6] Yi Wei, Xin-Dang He, Xiao-Feng Yang. The homogeneous balance of undetermined coefficients method and its application[J]. Open Mathematics,2016,14(1),816-826.
- [7] Wang M, Zhou Y, Li Z. Application of a homogeneous balance method to exact solutions of nonlinear equations in mathematical physics[J]. Physics Letters A, 1996, 216(1-5):67-75.
- [8] 陈松林, 侯为根. 推广的 B-BBM 方程和 B-BBM 方程的显式精确解[J]. 物理学报, 2001(10):1842-1845.
- [9] Mehmet E. Optical solitons in birefringent fibers for Lakshmanan–Porsezian–Daniel model by extended Jacobi's elliptic function expansion scheme[J]. Optik, 2018, 172:651-656.
- [10] E. Tala-Tebue, Z.I. Djoufack, E. Fendzi-Donfack, A. Kenfack-Jiotsa, T.C. Kofané.

- Exact solutions of the unstable nonlinear Schrödinger equation with the new Jacobi elliptic function rational expansion method and the exponential rational function method[J]. *Optik-International Journal for Light and Electron Optics*,2016, 127(23),11124-11130.
- [11] 于亚璇, 王琪, 赵雪芹, 等. 求解非线性差分方程孤立波解的直接代数法[J]. *物理学报*, 2005,54(09):3992-3994.
- [12] 陈松林, 马文冉. 带有 Neumann 边界波动方程初边值问题的达朗贝尔类解[J]. *振动与冲击*, 2018,37(21):253-259.
- [13] Vladica Stojanović, Tijana S. Kevkić, Gordana Jelić, et al. Determination of invariant measures: An approach based on homotopy perturbations[J]. *UPB Scientific Bulletin, Series A: Applied Mathematics and Physics*, 2018, 80(2):119-128.
- [14] Holmes M H. *Introduction to Perturbation Methods*[M]. Springer, 1996.
- [15] 李家春, 周显初. *数学物理中的渐近方法*[J]. 北京:科学出版社, 1998.
- [16] Yang S , Nayfeh A H , Mook D T . Combination resonances in the response of the duffing oscillator to a three-frequency excitation[J]. *Acta Mechanica*, 1998, 131(3-4):235-245.
- [17] Ramos J.I. On Linstedt-Poincaré techniques for the quintic Duffing equation[J]. *IEEE Radio & Wireless Symposium. IEEE*, 2014:303-310.
- [18] 李群, 孙丽, 徐肇廷. 内孤立波波-波相互作用的数值模拟[J]. *中国海洋大学学报(自然科学版)*, 2007, 37(06):868-872.
- [19] 黄钰淳, 韦玉程. 一类 Rayleigh 方程的渐近解[J]. *钦州学院学报*, 2016, 31(010):40-44.
- [20] 张丹伟, 刘济科, 黄建亮. 非线性系统准周期振动的多时间尺度 IHB 法[J]. *中山大学学报(自然科学版)*, 2018, 057(006):63-70.
- [21] Ruigang Zhang, Quanshengs Liu, Liangui Yang, Jian Song. Nonlinear planetary-synoptic wave interaction under generalized beta effect and its solutions[J]. *Chaos, Solitons and Fractals*: 2019, 122, 270-280.
- [22] A A F G , A A D , B G M M , et al. Analytic approximate solutions of the cubic–quintic Duffing–van der Pol equation with two-external periodic forcing

- terms: Stability analysis[J]. *Mathematics and Computers in Simulation*, 2021, 180:129-151.
- [23] 李志彬,江鹏,潘嘉诚,等.基于预估-校正的 Generalized- $\alpha$ 法及其在非线性结构动力学中的应用[J]. *计算力学学报*, 2020,37(1):28-33.
- [24] Shen J H , Lin K C , Chen S H , et al. Bifurcation and route-to-chaos analyses for Mathieu–Duffing oscillator by the incremental harmonic balance method[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2008, 52(4):403-414.
- [25] Gusso, André, Pimentel, Jéssica D. Approximate fully analytical Fourier series solution to the forced and damped Helmholtz-Duffing oscillator[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2018:593-603.
- [26] Li X , Tang J , Wang Y , et al. Approximate analytical solution in slow-fast system based on modified multi-scale method[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2020, 41(3):1-18.
- [27] 姜源, 申永军, 温少芳. 分数阶 van der Pol 振子的超谐与亚谐联合共振[J]. *振动工程学报*, 2019, 32(05):129-139.
- [28] Cosgun T, Sari M. Traveling wave solutions and stability behaviours under advection dominance for singularly perturbed advection-diffusion-reaction processes[J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2020, 138:1-6.
- [29] Han X, Bi Q. Bursting oscillations in Duffing's equation with slowly changing external forcing[J]. *Communications in Nonlinear Science & Numerical Simulation*, 2011, 16(10):4146-4152.
- [30] Wang H. Numerical simulation for solitary wave of Klein–Gordon–Zakharov equation based on the lattice Boltzmann model[J]. *Computers & Mathematics with Applications*, 2019, 78(12):3941-3955.



## 攻读硕士学位期间发表的论文

- [1] 潘陈蓉,陈松林. Klein-Gordon 波动方程多波传播的非线性特性[J]. 计算力学学报, 2020, 37(5): 646-650.
- [2] 潘陈蓉,陈松林. 具有广义 Holling III 型功能反应的 Leslie 捕食-食饵系统的平衡点分类和稳定性分析[J]. 应用数学进展, 2019, 8(10): 1625-1631.
- [3] 潘陈蓉,陈松林. Leslie 型捕食者 - 食饵系统的弛豫振荡分析[J]. 应用数学进展, 2019, 8(12): 1937-1942.

## 致 谢

光阴似箭，日月如梭。转眼间，研究生生活已经接近尾声，在三年的学习和生活中，我收获了很多，也得到了很多老师和同学的帮助，这使得我在这离别之际，心里有很多不舍和感激。

首先，我要特别感谢我的导师陈松林教授，我的论文是在老师的悉心指导下一步步完成的，在此，我向老师表示真挚的感谢。一直以来，老师都特别关心我，老师不仅在学术上给予了我悉心的指导，而且在生活和工作中也给了我很多帮助。陈老师拥有渊博的学识、严谨的治学态度、创新的思维方式和无私的奉献精神，一直是我学习的榜样。我很荣幸也很开心能够成为陈老师的学生。此外，我也非常感谢数理学院的老师们，你们不仅传授我们知识，而且在科研和生活中也给了我们很多帮助，因为有了你们的辛勤耕耘和帮助，我们才会得到进步和成长。

我还要感谢我的师兄师姐们，感谢你们总是很热情地主动帮助我，耐心地指导我。我也要感谢我的同窗们，感谢你们在学习和生活中给我的关心和帮助，感谢你们给我的生活带来了许多快乐。在这里，我真挚地祝福你们在今后的日子里都能够开开心心，都能够实现自己的理想。我也要感谢我的家人和朋友，你们的支持和关心一直是我前进的动力，所以我要更加努力，不能辜负你们的期望。

最后，真挚地感谢所有帮助和关心我的人们，谢谢你们。