分类号：____________ 密级：____________

U D C：____________ 编号：____________

工学硕士学位论文

刚体动力学的拟变分原理及其应用

硕 士 研 究 生 ： 曾志峰

指 导 教 师 ： 梁立孚 教授

学 科 、 专 业 ： 飞行器设计

学位论文主审人 ： 邹广平 教授

哈尔滨工程大学

2008 年 6 月

分类号：__________ 密级：__________

U D C：__________ 编号：__________

工学硕士学位论文

刚体动力学的拟变分原理及其应用

硕士研究生 ：曾志峰

指导教师 ：梁立孚 教授

学位级别 ：工学硕士

学科、专业 ：飞行器设计

所在单位 ：航天与建筑工程学院

论文提交日期：2008 年 4 月

论文答辩日期：2008 年 6 月

学位授予单位：哈尔滨工程大学

Classified Index:

U.D.C:

A Dissertation for the Degree of M.Eng

Research on the Quasi-variational Principle for Dynamics of Rigid Bodies and their Application

Candidate: Zeng Zhifeng

Supervisor: Prof. Liang Lifu

Academic Degree Applied for: Master of Engineering

Specialty: Flight Vehicle Design

Date of Submission: April, 2008

Date of Oral Examination: June , 2008

University: Harbin Engineering University

2

哈尔滨工程大学

学位论文原创性声明

本人郑重声明：本论文的所有工作，是在导师指导下，由作者本人独立完成的。有关观点、方法、数据和文献的引用已在文中指出，并与参考文献相对应。除文中已经注明引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已公开发表的作品成果。对本文的研究做出贡献个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本人完全意识到本声明的法律结果由本人承担。

作者（签字）：曾志峰

日期：2008年 6 月 16 日

摘　要

本文尝试性地建立刚体动力学的拟变分原理和广义拟变分原理，为研究刚体动力学提供一个新的有益的途径。这里应说明下，由于我们的专业主要研究单体飞行器，因此本文的研究主要建立单刚体的拟变分原理和广义拟变分原理。我们认为，单刚体动力学是多刚体动力学的基础，把单刚体动力学的理论研究好，多刚体动力学的理论也就水到渠成。

本文首先介绍了变分与变积的相关理论知识。推导了三类典型微分方程所对应的各种泛函，并且给出有关变积的几点说明。

第二，推导了非保守分析动力学的拟变分原理：拟 Hamilton 原理、拟余 Hamilton 原理、卷积型拟势能原理、卷积型拟余能原理。并通过一个算例说明了以上原理的一般运用，最后讨论了本章所提的非保守力概念的丰富含义。

第三，推导了刚体动力学的拟 Hamilton 变分原理和广义拟变分原理。并指出应用变分原理研究刚体动力学，不仅可以求得问题的解析解，而且可以以变分原理为基础，建立有限元和其它近似计算的模型。说明了应用变分原理来研究刚体动力学问题，便于将非完整约束加入刚体力学系统。最后给出了一个应用算例。

第四，推导了刚体动力学初值问题的拟变分原理和广义拟变分原理。结合应用举例说明了应用变分原理来研究刚体动力学问题，便于将伺服约束和控制约束加入刚体力学系统。

关键词：刚体系统；动力学；拟变分原理；非保守系统

Abstract

The variational principle and the general variational principle for dynamics of rigid body have been established tentatively in this thesis. These principles can offer a new and available way to study dynamics of rigid body. It should be explained that the purpose of this thesis is to establish the variational principle and the general variational principle for dynamics of single rigid body accounted for our major that mainly take the single-body flight vehicle as research subject. Dynamics of single rigid body is the foundation of dynamics of systems of rigid bodies. So long as the theory of dynamics of single rigid body is perfectly studied, the theory of dynamics of systems of rigid bodies can be perfectly studied successively.

Firstly, the relevant theories of the variation and integrand are introduced. Corresponding functionals of three typically differential equations are deduced, and several explanations about the integral method are listed.

Secondly, the variational principle for analytical mechanics in non -conservative system is deduced, including quasi-Hamilton principle, quasi-complementary Hamilton principle, quasi-potential energy principle and quasi-complementary energy principle in convolution forms. General application of those principles is demonstrated in a typical example. The concept of non-conservative force is also discussed in the end.

Thirdly, the variational principle and the general variational principle of quasi-Hamilton for dynamics of rigid bodies are deduced. It not only can get analytical solution, but also can establish the accounting model of finite element method and other similar approximate by applying the variational principle to study dynamics of rigid bodies. It is illustrated that it is expedient to add

non-integrated restrictions to the dynamics systems of rigid bodies by applying the variational principle to study dynamics of rigid bodies. A typical example is also given in the end.

Fourthly, the quasi-variational principle and the general quasi-variational principle for the initial value problem in dynamics systems of rigid bodies are deduced. By examples, a conclusion that it is expedient to add servo restrictions and control restrictions into the dynamics systems of rigid bodies by using the variational principle to study dynamics of rigid bodies is given.

Keywords: systems of rigid bodies; dynamics; quasi-variational principle; non-conservative system

目　　录

第1章 绪论

刚体并不一定是对刚硬物体的一种抽象，对于一个变形体，当我们只研究其运动轨迹和运动姿态时，便可以将之抽象化为刚体。这时的刚体是假定物体中任意两点之间的距离永远保持不变。那些结构比较紧凑、特征尺度不大、控制要求较低的航天器通常可以被视为刚性航天器。同刚体运动一样，刚性航天器的运动可分解为两类分运动，即质心的运动与绕质心的转动。前者称为轨道运动，通常用六个轨道根数来描述，它是航天器轨道动力学的研究对象。航天器轨道动力学脱胎于天体力学，以牛顿第二定律及万有引力定律为基础，但它不像天体力学那样仅停留在单纯解释或预测客观现象的层次上，而是可以根据客观规律主动地设计和控制其运动[1]。航天器绕质心的转动称为姿态运动，是航天器姿态动力学的研究对象。航天器本体坐标轴相对于参考坐标系的方向确定了航天器姿态的状况。反映姿态参数在姿态机动过程中变化的方程称为姿态动力学方程。

一般来说，航天器姿态变化必然通过万有引力主矢和摄动力的变化而影响自身的轨道运动。从这个意义上讲，姿态运动和轨道运动彼此耦合，需要联立求解。不过，由于实际航天器的几何尺寸远远小于轨道运动尺寸，姿态运动对轨道运动的影响极其微弱，在大多数情况下可予忽略。

航天器在轨工作时一般采用三轴稳定或自旋稳定两种稳定方式。在自旋稳定航天器中，有一类特殊的姿态动力学模型，即准刚体模型。这种模型保留了刚体模型，但又适当考虑了实际航天器中存在的弹性变形或流体运动因素。在模型中不增加反映弹性变形或流动的自由度，只将它们作为能量衰减因素纳入模型，讨论总机械能衰减对刚体姿态运动的长期影响。

由多个刚体基元以铰链相互连接构成了一类较复杂的航天器，即多刚体航天器，如带多个对称转子的陀螺体卫星，带刚硬太阳帆板的卫星，带机械臂的空间站等。多刚体航天器是多刚体系统的典型工程应用实例。多刚体航天器动力学是航天器动力学与多刚体系统动力学发展的交叉领域。多刚体系

统是由多个刚体、铰、虚铰等基元按一定方式连接而成的，具有镞、链等结构形式[2]，根据是否有根还可区分为有根系统和无根系统。用数学工具描述系统结构是研究多刚体系统动力学的第一步。这些描述方式包括分层编号数组、关联矩阵及通路矩阵等[3]。给出各刚体运动学表达式是研究多刚体系统动力学的第二步。接下来，运用矢量力学或分析力学的方法可建立多刚体系统动力学的普遍方程。建模的具体方法十分丰富，相关文献很多[4-7]。动力学方程的求解是多刚体系统动力学研究的重要内容，它要求速度快、精度高。求解方法与动力学模型密切相关，故建模中常常要照顾到计算效率问题。

我们十分重视前人的研究成果，也重视在前人研究成果的基础上，开展一些新的有益的研究。尽管已经有许多学者应用分析力学方法来研究刚体动力学，但很少有学者系统地建立刚体动力学的拟变分原理，并且用来解决刚体动力学中的有关问题。本文尝试性地建立刚体动力学的拟变分原理和广义拟变分原理，为研究刚体动力学提供一个新的有益的途径。

变分法是研究力学、物理学和其他各种技术科学的强有力的工具，在许多学科中已积累了大量的事实，证实了变分法的重要意义。本文应用变积方法建立刚体动力学的拟变分原理和广义拟变分原理，因此，在绪论中说明变积方法的梗概。

变分学的早期的工作都是介绍如何把泛函的极值或驻值问题化为微分方程的边值问题。这是因为微分方程的发展在先，变分学发展在后。在早期，一旦将泛函的驻值问题化为微分方程的边值问题之后，便认为问题已经解决，至少认为问题已经基本解决。这类问题称为变分学的正问题。

自从 Ritz 提出直接求泛函极值的近似方法(即著名的 Ritz 法)以后，人们发现从求近似解的角度来看，从泛函的驻值问题出发，常常比从微分方程边值问题出发更为方便。而电子计算机广泛应用之后，这种观点得到越来越多的赞同。于是人们的研究目标从原来把泛函的驻值问题化为微分方程的边值问题，逐步转变为把微分方程的边值问题化为泛函的驻值问题(并不是所有的微分方程边值问题都能化为泛函的驻值问题，这里首先有一个转化的可能性

问题)。这类问题称为变分学的逆问题。

经过 Euler、Lagrange 以及随后的许多数学家的努力，对于前一类问题(正问题)已经建立了比较成熟、比较系统的方法。但是对于后一类新的逆问题，虽然也已有许多学者作了研究，但总的说来还不很成熟。变分原理作为有限元法和其他近似计算方法的理论基础，随着电子计算机的迅猛发展，越来越得到人们的重视。因此，寻求将微分方程的边(初)值问题转化为泛函的驻(极)值问题的普遍方法，已成为数学工作者和力学工作者十分关注的课题[8]。

文献[9]从变分的基本运算出发，探讨变分的逆运算，提出变积的概念。作为应用的实例，将三类典型微分方程的边值问题和初值问题化为了泛函的驻(极)值问题。

1.1 变分与变积

1.1.1 变分

设有定积分形式的泛函：

$$V=\int_a^b F(x,y,y')dx \tag{1-1}$$

自变函数为 $y(x)$，自变量为 x。

对(1-1)式进行变分运算可得

$$\delta V=\int_a^b\left(\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\delta y dx+\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y\Big|_a^b \tag{1-2}$$

泛函的驻值条件为 $\delta V=0$，由于 δy 为独立变量，故(1-2)式为零的充要条件为：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial y}-\dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial F}{\partial y'}=0 & \text{在域中}\\ \dfrac{\partial F}{\partial y'}=0 & \text{在边界}x=a\text{和}x=b\text{处}\end{cases} \tag{1-3}$$

这样便将泛函的驻值问题化成了微分方程的边值问题。

1.1.2 变积

设在函数空间中，将(1-2)式相对于自变函数$y(x)$积分，则有：

$$\int_0^V \delta V = \int_0^y \int_a^b (\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'})\delta y dx + \int_0^y \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y\Big|_a^b \tag{1-4}$$

为了与微积分学中的积分相区别，不妨称变分学中这种对函数空间的积分为变积。

对(1-4)式在自变量x域中分部积分，有：

$$\int_0^V \delta V = \int_0^y \int_a^b (\frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y')dx = \int_a^b \int_0^F \delta F(x,y,y')dx \tag{1-5}$$

进而有：

$$V = \int_a^b F(x,y,y')dx \tag{1-6}$$

可见(1-6)与(1-1)相同，由(1-4)到(1-6)的过程正是由(1-1)到(1-3)的逆过程。这说明，正如积分是微分的逆运算一样，变积是变分的逆运算。

1.2 三类典型微分方程所对应的各种泛函

我们以二维问题为例，考虑一部分边界上给出自变函数的值，而在另一部分边界上给出自变函数沿法向导数的值。对于其他类型的边界条件，可用类似方法讨论。

在二维问题中，$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$，用$\varphi * \psi$表示两函数$\varphi$与$\psi$的卷积，而且总记

$$h(t) = 1 \qquad g(t) = t\text{，}(t \geq 0) \tag{1-7}$$

1.2.1 Piosson 方程对应的泛函

在变分学中，基本上存在三级变量—自变量、可变函数和泛函。简单函数和泛函的区别在于：简单函数是自变量的函数，而泛函是可变函数的函数，独立自主地变化的可变函数称为自变函数。

Piosson 方程为：

$$\nabla^2 u = f(x,y) \quad 在 A 中 \tag{1-8}$$

其中，$u = u(x,y)$ 为可变函数，x,y 为自变量。空间边界条件为：

$$\begin{cases} u = u_1 & 在\partial Au上 \\ \dfrac{\partial u}{\partial v} = u_2 & 在\partial Av上(v为边界法线方向数) \end{cases} \tag{1-9}$$

对(1-8)和(1-9)施以变积运算，有：

$$\begin{aligned}\int_0^V \delta V &= \int_0^u \int_A (\nabla^2 u - f)\delta u dA + \int_0^u \int_{\partial Au} (u - u_1)\delta \frac{\partial u}{\partial v} ds + \int_0^u \int_{\partial Av} (u_2 - \frac{\partial u}{\partial v})\delta u ds \\ &= \int_0^u \int_{\partial Au} [(u - u_1)\delta \frac{\partial u}{\partial v} + \frac{\partial u}{\partial v}\delta u] ds + \int_0^u \int_{\partial Av} u_2 \delta u ds \\ &\quad - \int_0^u \int_A f\delta u dA - \int_0^u \int_A (\frac{\partial u}{\partial x}\delta \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\delta \frac{\partial u}{\partial y}) dA \end{aligned} \tag{1-10}$$

进而可得 Piosson 方程对应的泛函为：

$$V = \int_{\partial Au} (u - u_1)\frac{\partial u}{\partial v} ds + \int_{\partial Av} u_2 u ds - \int_A f u dA - \frac{1}{2}\int_A [(\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial u}{\partial y})^2] dA \tag{1-11}$$

如果我们只对(1-8)式作变积运算，则有：

$$\begin{aligned}\int_0^{V^*} \delta V^* &= \int_0^u \int_A (\nabla^2 u - f)\delta u dA \\ &= \int_0^u \int_{\partial Au} \frac{\partial u}{\partial v}\delta u ds + \int_0^u \int_{\partial Av} \frac{\partial u}{\partial v}\delta u ds - \int_0^u \int_A f\delta u dA \\ &\quad - \int_0^u \int_A (\frac{\partial u}{\partial x}\delta \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\delta \frac{\partial u}{\partial y}) dA \end{aligned} \tag{1-12}$$

利用边界条件(1-9)则有：

$$\int_0^{V^*}\delta V^* = \int_0^u\int_{\partial Av}u_2\delta u ds - \int_0^u\int_A f\delta u dA - \int_0^u\int_A(\frac{\partial u}{\partial x}\delta\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\delta\frac{\partial u}{\partial y}) \tag{1-13}$$

进而可得：

$$V^* = \int_{\partial Av}u_2 u ds - \int_A f u dA - \frac{1}{2}\int_A[(\frac{\partial u}{\partial x})^2+(\frac{\partial u}{\partial y})^2]dA \tag{1-14}$$

如果对(1-11)式的泛函V取变分，将得到 Euler 方程(1-8)和自然边界条件(1-9)；而对(1-14)式所示泛函取变分，将只能得到 Euler 方程(1-8)，而(1-9)以强制边界条件的形式出现。

在下面的各节中，将只导出带有自然边界条件的泛函，而对带有强制边界条件的泛函，不难用相类似的方式导出。

1.2.2 波动方程对应的泛函

1.2.2.1 波动方程边值问题对应的泛函

波动方程为：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \nabla^2 u = f(x,y,t), \text{在} A \text{上} \tag{1-15}$$

其中，$u=u(x,y,t)$为可变函数，x,y,t为自变量。空间边界条件为：

$$\begin{cases} u = u_1(t) & \text{在}\partial Au\text{上} \\ \dfrac{\partial u}{\partial v} = u_2(t) & \text{在}\partial Av\text{上} \end{cases} \tag{1-16}$$

时间边界条件为：

$$\begin{cases} u\big|_{t=0} = u_3(x,y) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=t_1} = u_4(x,y) \end{cases} \tag{1-17}$$

对(1-15)、(1-16)、(1-17)施以变积运算，有：

$$\int_0^V \delta V=\int_0^\mu\int_0^{t_1}\int_A[\nabla^2 u-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+f]\delta u dAdt+\int_0^\mu\int_0^{t_1}\int_{\partial Au}(u-u_1)\delta\frac{\partial u}{\partial v}dsdt$$

$$+\int_0^\mu\int_0^{t_1}\int_{\partial Av}(u_2-\frac{\partial u}{\partial v})\delta u dsdt+\int_0^\mu\int_A(u-u_3)\delta\frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0}dA$$

$$+\int_0^\mu\int_A(\frac{\partial u}{\partial t}-u_4)\delta u\big|_{t=t_1}dA$$

$$=\int_0^\mu\int_0^{t_1}\int_{\partial Au}[(u-u_1)\delta\frac{\partial u}{\partial v}+\frac{\partial u}{\partial v}\delta u]dsdt+\int_0^\mu\int_0^{t_1}\int_{\partial Av}u_2\delta u dsdt$$

$$+\int_0^\mu\int_A[(u(x,y,0)-u_3)\delta\frac{\partial u(x,y,0)}{\partial t}+\frac{\partial u(x,y,0)}{\partial t}\delta u(x,y,0)]dA$$

$$-\int_0^\mu\int_A u_4\delta u(x,y,t_1)dA+\int_0^\mu\int_0^{t_1}\int_A f\delta u dAdt$$

$$-\int_0^\mu\int_0^{t_1}\int_A[\frac{\partial u}{\partial x}\delta\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\delta\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial t}\delta\frac{\partial u}{\partial t}]dAdt \tag{1-18}$$

由上式得波动方程边值问题对应的泛函为：

$$V=\int_0^{t_1}\int_{\partial Au}(u-u_1)\frac{\partial u}{\partial v}dsdt+\int_0^{t_1}\int_{\partial Av}u_2 u dsdt$$

$$+\int_A[u(x,y,0)-u_3]\frac{\partial u(x,y,0)}{\partial t}dA-\int_A u_4 u(x,y,t_1)dA$$

$$+\int_0^{t_1}\int_A fudAdt-\frac{1}{2}\int_0^{t_1}\int_A[(\frac{\partial u}{\partial x})^2+(\frac{\partial u}{\partial y})^2-(\frac{\partial u}{\partial t})^2]dAdt \tag{1-19}$$

1.2.2.2 波动方程初值问题对应的泛函

波动方程方程为：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t}-\nabla^2 u=f(x,y,t), \text{在} A \text{上} \tag{1-20}$$

其中，$u=u(x,y,t)$ 为可变函数，x,y,t 为自变量。空间边界条件为：

$$\begin{cases} u = u_1(t) & 在\partial Au上 \\ \dfrac{\partial u}{\partial v} = u_2(t) & 在\partial Av上 \end{cases} \tag{1-21}$$

初始条件为：

$$\begin{cases} u\big|_{t=0} = u_5(x,y) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = u_6(x,y) \end{cases} \tag{1-22}$$

波动方程初值问题由(1-20)、(1-21)和(1-22)式构成。

对(1-20)、(1-21)施以 Laplace 变换可得：

$$p^2U - pu_5 - u_6 - \nabla^2 U = F \tag{1-23}$$

$$\begin{cases} U = U_1 \\ \dfrac{\partial U}{\partial v} = U_2 \end{cases} \tag{1-24}$$

这里我们记u的Laplac变换式为U, f的Laplac变换式为F 等， p 为 Laplace 变换中的参数。

对(1-23)、(1-24)施以变积运算有：

$$\int_0^w \delta w = \int_0^U \int_A [U - \frac{1}{p}u_5 - \frac{1}{p^2}u_6 - \frac{1}{p^2}\nabla^2 U - \frac{1}{p^2}F]\delta U dA$$

$$+\int_0^U \int_{\partial Au} \frac{1}{p^2}(U_1 - U)\delta\frac{\partial U}{\partial v}ds + \int_0^U \int_{\partial Av} \frac{1}{p^2}(\frac{\partial U}{\partial v} - U_2)\delta U ds$$

$$= \int_0^U \int_A [U - \frac{1}{p}u_5 - \frac{1}{p^2}u_6 - \frac{1}{p^2}F]\delta U dA - \int_0^U \int_{\partial Av} \frac{1}{p^2}U_2 \delta U ds$$

$$+\int_0^U \int_{\partial Au} \frac{1}{p^2}[(U_1 - U)\delta\frac{\partial U}{\partial v} - \frac{\partial U}{\partial v}\delta U]ds + \int_0^U \int_A \frac{1}{p^2}[\frac{\partial U}{\partial x}\delta\frac{\partial U}{\partial x}$$

$$+\frac{\partial U}{\partial y}\delta\frac{\partial U}{\partial y}]dA \tag{1-25}$$

由上式得波动方程初值问题在相空间的泛函：

$$w=\int_A[\frac{1}{2}U^2-\frac{1}{p}u_5U-\frac{1}{p^2}u_6U-\frac{1}{p^2}FU]dA+\int_{\partial Au}\frac{1}{p^2}(U_1-U)\frac{\partial U}{\partial v}ds$$

$$-\int_{\partial Av}\frac{1}{p^2}U_2Uds+\frac{1}{2}\int_A\frac{1}{p^2}[(\frac{\partial U}{\partial x})^2+(\frac{\partial U}{\partial y})^2]dA \tag{1-26}$$

反演得原空间泛函：

$$V=\int_A[\frac{1}{2}u-u_5h-u_6g-g*f]*udA+\int_{\partial Au}g*(u_1-u)*\frac{\partial u}{\partial v}ds$$

$$-\int_{\partial Av}g*u_2*uds+\frac{1}{2}\int_A g*[\frac{\partial u}{\partial x}*\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}*\frac{\partial u}{\partial y}]dA \tag{1-27}$$

1.2.3 输运方程对应的泛函

输运方程为：

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\nabla^2u=f(x,y,t)\qquad 在A上 \tag{1-28}$$

空间边界条件为：

$$\begin{cases}u=u_1(t) & 在\partial Au上\\ \dfrac{\partial u}{\partial v}=u_2(t) & 在\partial Av上\end{cases} \tag{1-29}$$

初始条件为：

$$u\big|_{t=0}=u_5(x,y) \tag{1-30}$$

对(1-28)、(1-29)施以 Laplace 变换得：

$$pU-u_5-\nabla^2U=F \tag{1-31}$$

$$\begin{cases}U=U_1 & 在\partial Au上\\ \dfrac{\partial U}{\partial v}=U_2 & 在\partial Av上\end{cases} \tag{1-32}$$

这里我们记 u 的Laplac变换式为 U, f 的Laplac变换式为 F 等， p 为 Laplace

变换中的参数。

对(1-31)和(1-32)施以变积运算则有：

$$\int_0^w \delta W = \int_0^U \int_A [U - \frac{1}{p}u_5 - \frac{1}{p}\nabla^2 U - \frac{1}{p}F]\delta U dA + \int_0^U \int_{\partial Au} \frac{1}{p}(U_1 - U)\delta \frac{\partial U}{\partial v} ds$$

$$+\int_0^U \int_{\partial Av} \frac{1}{p}(\frac{\partial U}{\partial v} - U_2)\delta U ds$$

$$= \int_0^U \int_A [U - \frac{1}{p}u_5 - \frac{1}{p}F]\delta U dA + \int_0^U \int_{\partial Au} \frac{1}{p}[(U_1 - U)\delta \frac{\partial U}{\partial v} - \frac{\partial U}{\partial v}\delta U]ds$$

$$-\int_0^U \int_{\partial Av} \frac{1}{p} U_2 \delta U ds + \int_0^U \int_A \frac{1}{p}[\frac{\partial U}{\partial x}\delta \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\delta \frac{\partial U}{\partial y}]dA \tag{1-33}$$

由上式可得输送方程在相空间的泛函为：

$$W = \int_A [\frac{1}{2}U^2 - \frac{1}{p}u_5 U - \frac{1}{p}FU]dA + \int_{\partial Au} \frac{1}{p}(U_1 - U)\frac{\partial U}{\partial v} ds - \int_{\partial Av} \frac{1}{p} U_2 U ds$$

$$+\frac{1}{2}\int_A \frac{1}{p}[(\frac{\partial U}{\partial x})^2 + (\frac{\partial U}{\partial y})^2]dA \tag{1-34}$$

反演得原空间的泛函为：

$$V = \int_A [\frac{1}{2}u - u_5 h - h * f] * u dA + \int_{\partial Au} h * (u_1 - u) * \frac{\partial u}{\partial v} ds$$

$$-\int_{\partial Av} h * u_2 * u ds + \frac{1}{2}\int_A h * [(\frac{\partial u}{\partial x}) * \frac{\partial u}{\partial x} + (\frac{\partial u}{\partial y}) * \frac{\partial u}{\partial y}]dA \tag{1-35}$$

1.3 几点说明

1.3.1 变积运算的另一种表示方法

在实际应用变积方法时，往往不写出变积的积分号，而是设法将问题化为某个泛函的全变分。以下以 Piosson 方程为例来说明问题。

Piosson 方程为：

$$\nabla^2 u = f(x,y) \text{ 在 } A \text{ 中} \tag{1-36}$$

其中，$u=u(x,y)$ 为可变函数，x,y 为自变量。

空间边界条件为：

$$\begin{cases} u = u_1 & \text{在}\partial Au\text{上} \\ \dfrac{\partial u}{\partial v} = u_2 & \text{在}\partial Av\text{上}(v\text{为边界法线方向数}) \end{cases} \tag{1-37}$$

将(1-36)和(1-37)式乘上相应的虚量，然后积分，并代数相加，可得：

$$\int_A (\nabla^2 u - f)\delta u dA + \int_{\partial Au}(u-u_1)\delta\frac{\partial u}{\partial v}ds + \int_{\partial Av}(u_2 - \frac{\partial u}{\partial v})\delta u ds = 0 \tag{1-38}$$

应用 Green 定理：

$$\int_A \nabla^2 u \delta u dA = \int_{\partial Au+\partial Av}\frac{\partial u}{\partial v}\delta u ds - \int_A (\frac{\partial u}{\partial x}\delta\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\delta\frac{\partial u}{\partial y})dA \tag{1-39}$$

将(1-39)式代入(1-38)式：

$$\begin{aligned} &\int_A (\frac{\partial u}{\partial x}\delta\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\delta\frac{\partial u}{\partial y})dA - \int_A f\delta u dA \\ &-\int_{\partial Au}[(u-u_1)\delta\frac{\partial u}{\partial v} + \frac{\partial u}{\partial v}\delta u]ds - \int_{\partial Av}u_2\delta u ds = 0 \end{aligned} \tag{1-40}$$

上式可以处理为一个泛函的驻值问题：

$$V = \frac{1}{2}\int_A [(\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial u}{\partial y})^2]dA + \int_A fu dA - \int_{\partial Au}(u-u_1)\frac{\partial u}{\partial v}ds - \int_{\partial Av}u_2 u ds \tag{1-41}$$

这就是 Piosson 方程对应的泛函。

对于波动方程和输运方程，也可以做类似的变换，不赘述。

1.3.2 变积方法的发展

在微积分学中存在微分和积分互为逆运算，但长期以来在变分学中只有变分而没有其逆运算存在，经过长期潜心研究，梁立孚和章梓茂 1985 年提出了推导弹性力学变分原理的一种凑合法，体现了“变积”思想萌芽[10]。梁立孚

和石志飞 1994 年在《变分学逆问题研究》一文中，明确提出变分的逆运算——变积的概念，并且应用变积方法将数理方法中的三类典型方程的边(初)值问题化为泛函的驻、极值问题，应用变积方法推导了弹性动力学的变分原理和广义变分原理，得到钱伟长院士的亲自推荐[11]。梁立孚，石志飞应用变积方法建立了粘性流体力学的变分原理和广义变分原理[12]；石志飞，杜善义院士应用变积方法建立了饱和多孔介质耦合系统的几类变分原理[13]。新世纪以来，梁立孚和胡海昌院士应用变积方法建立了一般力学三类变量的广义变分原理[14]，梁立孚、刘殿魁和宋海燕应用变积方法建立了非保守系统两类变量的广义变分原理[15]，盛冬发、程昌钧和扶名福引用变积方法建立了损伤粘弹性力学的广义变分原理[16]，以及梁立孚在专著《变分原理及其应用》中建立了电磁场理论的变分原理和广义变分原理，标志着变积方法已经进入较成熟的阶段。梁立孚与罗恩一起建立了分析力学初值问题的一种变分形式的同时[17]，将变积方法推广到卷积理论中，从而将变积方法推广为卷变积方法或变卷积方法。变积方法还在进一步的完善和发展中。

1.4 本文的主要工作

本文的主要工作分为以下几个方面：

1.非保守分析动力学的变分原理：以往的分析动力学多为保守系统分析动力学，其变分原理主要是保守系统的 Hamilton 原理。航天动力学涉及的系统多为非保守系统，作为它的研究基础，极有必要建立非保守系统的拟 Hamilton 原理。

Hamilton 原理是时间边值问题的变分原理，而航天动力学涉及的问题多数是初值问题问题，作为它的研究基础，极有必要建立非保守系统分析动力学初值问题的变分原理。

2.刚体动力学的拟 Hamilton 变分原理和广义拟变分原理：有多位学者应用 Hamilton 原理来研究刚体动力学的问题。但是，无人建立刚体动力学的 Hamilton 原理，更无人建立刚体动力学的拟 Hamilton 原理，即非保守系统的

Hamilton 原理。本文将建立刚体动力学的拟 Hamilton 原理，进而建立刚体动力学 Hamilton 型广义拟变分原理。应用变分原理研究刚体动力学，不仅可以求得问题的解析解，而且可以以变分原理为基础，建立有限元和其它近似计算的模型。

3. 刚体动力学初值问题的拟变分原理和广义拟变分原理：拟 Hamilton 原理与 Hamilton 原理一样是时间边值问题的变分原理，而航天动力学涉及的问题多数是初值[redacted]问题，因此，有必要建立刚体动力学初值问题的拟变分原理和广义拟变分原理。

这里要说明一下，我们的专业主要研究单体飞行器，因此本文的研究主要建立单刚体的拟变分原理和广义拟变分原理。我们认为，单刚体动力学是多刚体动力学的基础，把单刚体动力学的理论研究好了，多刚体动力学的理论也就水到渠成了。

第 2 章 非保守分析力学

保守系统分析动力学的研究已经相当充分[18-25]，但是，非保守系统分析动力学的研究较少，而我们研究的问题多数属于非保守系统，为了弥补这一不足，并适应科学技术和工程方面的需要，我们重点研究非保守系统分析动力学。

2.1 分析力学的基本方程

Hamilton 原理说：当物体从时间t_0所在的位置运动到时间t_1所在的位置时，在所有可能经历的容许路径中，物体在每一瞬时都能满足牛顿运动定律的路径是 Lagrange 函数对时间的积分取极值的路径(也是物体所经历的真实轨迹)。如所周知，采用通用的符号，Hamilton 原理的泛函为：

$$\pi = \int_{t_0}^{t_1} L(q_s, \dot{q}_s, t)dt = \int_{t_0}^{t_1} [(T(q_s, \dot{q}_s, t) - V(q_s, t)]dt \tag{2-1}$$

将式(2-1)变分，并令$\delta\pi = 0$；经分部积分，并按惯例在时域边界处$t = t_0$和$t = t_1$处取$\delta q_s = 0$，可得：

$$\delta\pi = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{s=1}^{n} (\frac{\partial T}{\partial q_s} - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial V}{\partial q_s})\delta q_s dt = 0 \tag{2-2}$$

由于δq_s的任意性，由上式可得：

$$\frac{\partial T}{\partial q_s} - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial V}{\partial q_s} = 0 \tag{2-3}$$

这就是一类变量的 Hamilton 原理的驻值条件。

应用对合变换[26]，可将(2-3)变换为两类变量的基本方程：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial q_s} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial v_s^q} - \dfrac{\partial V}{\partial q_s} = 0 & (2-4) \\ \dot{q}_s - v_s^q = 0 & (2-5) \end{cases}$$

进一步应用对合变换，可将(2-4)和(2-5)变换为三类变量的基本方程：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial q_s} - \dfrac{d}{dt} p_s^q - \dfrac{\partial V}{\partial q_s} = 0 & (2-6) \\ \dot{q}_s - v_s^q = 0 & (2-7) \\ p_s^q - \dfrac{\partial T}{\partial v_s^q} = 0 & (2-8) \end{cases}$$

为了便于推导非保守分析力学的变分原理和广义变分原理，需要进一步明确分析力学的基本方程。对于稳定约束系统和半稳定约束系统，动能为广义速度的正定二次型：

$$T = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2} m_{ij} v_i^q v_j^q \tag{2-9}$$

又知，广义力为势能的负梯度 $Q_i = -\dfrac{\partial V}{\partial q_i}$，故知，分析力学稳定约束系统和半稳定约束系统动力学边、初值问题的基本方程为：

$$-\frac{d}{dt} p_i^q + Q_i = 0 \tag{2-10}$$

$$\dot{q}_i - v_i^q = 0 \tag{2-11}$$

$$p_i^q - \sum_{j=1}^{n} m_{ij} v_j^q = 0 \tag{2-12}$$

或者

$$v_i^q - \sum_{j=1}^{n} M_{ij} p_j^q = 0 \tag{2-13}$$

其中，$[M_{ij}] = [m_{ij}]^{-1}$ 为 $[m_{ij}]$ 矩阵的逆矩阵。

初始条件：

$$q_i(0) = \bar{q}_i(0) \ v_i^q(0) = \bar{v}_i^q(0) \ p_i^q(0) = \bar{p}_i^q(0) \tag{2-14}$$

$$\dot{q}_i(0) = \bar{\dot{q}}_i(0) \ \dot{v}_i^q(0) = \bar{\dot{v}}_i^q(0) \ \dot{p}_i^q(0) = \bar{\dot{p}}_i^q(0) \tag{2-15}$$

时域边界条件为：

$$q_i \Big|_{t=t_0} = \bar{q}_{i0} \ v_i^q \Big|_{t=t_0} = \bar{v}_{i0}^q \ p_i^q \Big|_{t=t_0} = \bar{p}_{i0}^q$$

$$q_i\Big|_{t=t_1}=\bar{q}_{i1}\ v_i^q\Big|_{t=t_1}=\bar{v}_{i1}^q\ p_i^q\Big|_{t=t_1}=\bar{p}_{i1}^q \tag{2-16}$$

其中，各变量的意义分别为：q_i—广义坐标，v_i^q—广义速度，p_i^q—广义动量，Q_i—广义力，m_{ij}—广义质量，“.”—对时间的导数。$L(q_s,\dot{q}_s,t)$ 为 Lagrange 函数，$T(q_s,\dot{q}_s,t)$ 为动能，$V(q_s,t)$ 为势能。

基本方程的 Laplace 变换式为：

$$-p\tilde{p}_i^q+p_i^q(0)+\tilde{Q}_i=0 \tag{2-17}$$

$$p\tilde{q}_i-q_i(0)-\tilde{v}_i^q=0 \tag{2-18}$$

$$\tilde{p}_i^q-\sum_{j=1}^{n}m_{ij}\tilde{v}_j^q=0 \tag{2-19}$$

或者：

$$\tilde{v}_i^q-\sum_{j=1}^{n}M_{ij}\tilde{p}_j^q=0 \tag{2-20}$$

2.2 拟 Hamilton 原理

分析动力学保守系统已经建立了相应 Hamilton 变分原理，现在来建立非保守系统拟 Hamilton 原理。

将式(2-10)乘以相应的虚位移 δq_i，然后求和，再对时域积分，得：

$$\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}(-\dot{p}_i^q+Q_i)\delta q_i dt=0 \tag{2-21}$$

应用分部积分，并令 δq_i 在时间域边界为零

$$-\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}\dot{p}_i^q\delta q_i dt=-\sum_{i=1}^{n}p_i^q\delta q_i\Big|_{t_0}^{t_1}+\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}p_i^q\delta\dot{q}_i dt=\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}p_i^q\delta\dot{q}_i dt \tag{2-22}$$

将式(2-22)代入(2-21)，得：

$$\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}(p_i^q\delta\dot{q}_i+Q_i\delta q_i)dt=0 \tag{2-23}$$

将式(2-11)变分并代入上式，则(2-23)变为：

$$\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}(p_i^q\delta v_i^q+Q_i\delta q_i)dt=0 \tag{2-24}$$

考虑式(2-12)，则有：

$$\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}(\sum_{i=1}^{n}m_{ij}v_j^q\delta v_i^q+Q_i\delta q_i)dt=0 \tag{2-25}$$

上式可进一步表示为：

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}m_{ij}v_i^q v_j^q+Q_i q_i)dt-\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}q_i\delta Q_i dt=0 \tag{2-26}$$

将式(2-26)简记为：

$$\delta\pi_{H1}-\delta Q_H=0 \tag{2-27}$$

式中，

$$\pi_{H1}=\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}m_{ij}v_i^q v_j^q+Q_i q_i)dt$$

$$\delta Q_H=\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}q_i\delta Q_i dt$$

其先决条件为(2-12)。与Hamilton原理相对应，将式(2-26)称为拟Hamilton原理。当广义力Q_i为确定函数时，$\delta Q_H=0$，此时拟Hamilton原理退化为保守系统的Hamilton原理。

2.3 拟余Hamilton原理

将式(2-11)乘以相应的虚动量δp_i^q，然后求和，再对时域积分，得

$$\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}(v_i^q-\dot{q}_i)\delta p_i^q dt=0 \tag{2-28}$$

应用分部积分

$$-\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}\dot{q}_i\delta p_i^q dt=-\sum_{i=1}^{n}q_i\delta p_i^q\Big|_{t_0}^{t_1}+\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}q_i\delta\dot{p}_i^q dt \tag{2-29}$$

考虑到在时间域边界处取 $\delta p_i^q=0$，得：

$$-\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}\dot{q}_i\delta p_i^q dt=\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}q_i\delta\dot{p}_i^q dt \tag{2-30}$$

将式(2-30)代入式(2-28)，并考虑式(2-10)的变分为 $\delta\dot{p}_i^q=\delta Q_i$ ，可得：

$$\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}(v_i^q\delta p_i^q+q_i\delta Q_i)dt=0 \tag{2-31}$$

将式(2-13)代入式(2-31)，得：

$$\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n}M_{ij}p_j^q\delta p_i^q+q_i\delta Q_i)dt=0 \tag{2-32}$$

上式可进一步表示为：

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2}M_{ij}p_i^q p_j^q dt+\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}Q_i\delta q_i dt=0 \tag{2-33}$$

将式(2-33)简记为：

$$\delta\Gamma_{H1}+\delta Q_H=0 \tag{2-34}$$

式中，

$$\Gamma_{H1}=\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2}M_{ij}p_i^q p_j^q dt$$

$$\delta Q_H=\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}Q_i\delta q_i dt$$

其先决条件为式(2-10)。与余Hamilton原理相对应将之称为拟余Hamilton原理。当广义力 Q_i 为确定函数时，$\delta Q_H=0$，此时定理退化为通常的余Hamilton原理。

拟余 Hamilton 原理还有另外一种表达形式。应用对合变换，可以将式

(2-33)变换为

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}p_i^q v_i^q dt+\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}Q_i\delta q_i dt=0 \tag{2-35}$$

将式(2-35)简记为：

$$\delta\Gamma_{H12}+\delta Q_H=0 \tag{2-36}$$

式中，

$$\Gamma_{H12}=\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}p_i^q v_i^q dt$$

$$\delta Q_H=\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}Q_i\delta q_i dt$$

其先决条件为(2-10)、(2-13)。

拟余 Hamilton 原理 $\delta\Gamma_{H1}+\delta Q_H=0$ 的拟驻值条件为

$$\sum_{j=1}^{n}M_{ij}p_j^q-\dot{q}_i=0 \tag{2-37}$$

拟余 Hamilton 原理 $\delta\Gamma_{H12}+\delta Q_H=0$ 的拟驻值条件为

$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}M_{ij}p_j^q+\frac{1}{2}v_i^q-\dot{q}_i=0 \tag{2-38}$$

可见，拟余 Hamilton 原理的拟驻值条件反映的规律都是以不同变量表示的几何条件。

可以证明，对于精确解，存在着关系式：

$$\Pi_{H1}+\Gamma_{H1}=0 \tag{2-39}$$

无论保守系统还是非保守系统，(2-39)均成立。

2.4 卷积型拟势能原理

应用变积方法，将虚位移的 Laplace 变换 $\delta\tilde{q}_i$ 乘以式(2-17)，然后求和，得：

$$-\sum_{i=1}^{n}[-p\tilde{p}_i^q\delta\tilde{q}_i+p_i^q(0)\delta\tilde{q}_i+\tilde{Q}_i\delta\tilde{q}_i]=0 \qquad (2\text{-}40)$$

考虑到式(2-18)的变分式为：

$$p\delta\tilde{q}_i-\delta\tilde{v}_i^q=0 \qquad (2\text{-}41)$$

则式(2-40)变换为：

$$\sum_{i=1}^{n}[\tilde{p}_i^q\delta\tilde{v}_i^q-p_i^q(0)\delta\tilde{q}_i-\tilde{Q}_i\delta\tilde{q}_i]=0 \qquad (2\text{-}42)$$

将式(2-19)代入式(2-42)，可得：

$$\sum_{i=1}^{n}[\sum_{j=1}^{n}m_{ij}\tilde{v}_j^q\delta\tilde{v}_i^q-p_i^q(0)\delta\tilde{q}_i-\tilde{Q}_i\delta\tilde{q}_i]=0 \qquad (2\text{-}43)$$

上式可进一步表示为：

$$\delta\sum_{i=1}^{n}[\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}m_{ij}\tilde{v}_i^q\tilde{v}_j^q-p_i^q(0)\delta\tilde{q}_i-\tilde{Q}_i\tilde{q}_i]+\sum_{i=1}^{n}\tilde{q}_i\delta\tilde{Q}_i=0 \qquad (2\text{-}44)$$

将式(2-44)简记为：

$$\delta\tilde{\Pi}_{G1}+\delta\tilde{Q}_G=0 \qquad (2\text{-}45)$$

式中，

$$\tilde{\Pi}_{G1}=\sum_{i=1}^{n}[\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}m_{ij}\tilde{v}_i^q\tilde{v}_j^q-p_i^q(0)\delta\tilde{q}_i-\tilde{Q}_i\tilde{q}_i]$$

$$\delta\tilde{Q}_G=\sum_{i=1}^{n}\tilde{q}_i\delta\tilde{Q}_i$$

其先决条件为(2-18)。

将式(2-44)由相空间反演到原空间，则得：

$$\delta\sum_{i=1}^{n}[\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}m_{ij}v_i^q * v_j^q - p_i^q(0)q_i - Q_i * q_i] + \sum_{i=1}^{n}q_i * \delta Q_i = 0 \quad (2\text{-}46)$$

将式(2-46)简记为：

$$\delta\Pi_{G1} + \delta Q_G = 0 \quad (2\text{-}47)$$

其先决条件为(2-11)。在各种可能的运动状态中，精确解使拟变分式(2-46)成立。

这就是卷积型拟势能原理。当外力 δQ_i 为确定函数时，$\delta Q_G = 0$，此时该定理退化为通常的一般动力学中的卷积型势能原理。

2.5 卷积型拟余能原理

将式(2-18)乘以相应的虚动量的 Laplace 变换 $\delta\tilde{p}_i^q$，然后代数相加，可得：

$$-\sum_{i=1}^{n}[p\tilde{q}_i - q_i(0) - \tilde{v}_i^q]\delta\tilde{p}_i^q = 0 \quad (2\text{-}48)$$

式(2-17)的变分为：

$$-p\delta\tilde{p}_i^q + \delta\tilde{Q}_i = 0 \quad (2\text{-}49)$$

将式(2-49)代入(2-48)，得：

$$\sum_{i=1}^{n}[q_i(0)\delta\tilde{p}_i^q + \tilde{v}_i^q\delta\tilde{p}_i^q - \tilde{q}_i\delta\tilde{Q}_i] = 0 \quad (2\text{-}50)$$

将式代(2-20)入式(2-50)，得：

$$\sum_{i=1}^{n}[q_i(0)\delta\tilde{p}_i^q + \sum_{j=1}^{n}M_{ij}\tilde{p}_j^q\delta\tilde{p}_i^q - \tilde{q}_i\delta\tilde{Q}_i] = 0 \quad (2\text{-}51)$$

上式可进一步表示为：

$$\delta\sum_{i=1}^{n}[q_i(0)\tilde{p}_i^q + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}M_{ij}\tilde{p}_i^q\tilde{p}_j^q] - \sum_{i=1}^{n}\tilde{q}_i\delta\tilde{Q}_i = 0 \quad (2\text{-}52)$$

将式(2-52)简记为：

$$\delta\tilde{\Gamma}_{G1}-\delta\tilde{Q}_G=0 \tag{2-53}$$

式中，

$$\tilde{\Gamma}_{G1}=\sum_{i=1}^{n}[q_i(0)\tilde{p}_i^q+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}M_{ij}\tilde{p}_i^q\tilde{p}_j^q]$$

$$\delta\tilde{Q}_G=\sum_{i=1}^{n}\tilde{q}_i\delta\tilde{Q}_i$$

其先决条件为(2-17)。

将式(2-52)由相空间反演到原空间，则得：

$$\delta\sum_{i=1}^{n}[q_i(0)p_i^q+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}M_{ij}p_i^q*p_j^q]-\sum_{i=1}^{n}q_i*\delta Q_i=0 \tag{2-54}$$

将式(2-54)简记为：

$$\delta\Gamma_{G1}-\delta Q_G=0 \tag{2-55}$$

式中，

$$\Gamma_{G1}=\sum_{i=1}^{n}[q_i(0)p_i^q+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}M_{ij}p_i^q*p_j^q]$$

$$\delta Q_G=\sum_{i=1}^{n}q_i*\delta Q_i$$

其先决条件为(2-10)。

这就是卷积型拟余能原理。当广义力δQ_i为确定函数时，$\delta Q_G=0$，此时该定理退化为通常的动力学中的卷积型余能原理。

2.6 算例

如图 1 所示，此系统总质量m用图中的刚体表示，由于滚筒约束，刚体只能发生简单的平移，因此用单一的位移坐标$x(t)$就可以完全确定它的位置。抵抗位移的弹性抗力由刚度为k的无重弹簧来提供，而能量耗散机理用阻尼器c表示。产生此系统动力反应的外部荷载是随时间变化的力$p(t)$。这是一个非保守系统，拟 Hamilton 原理表示为：

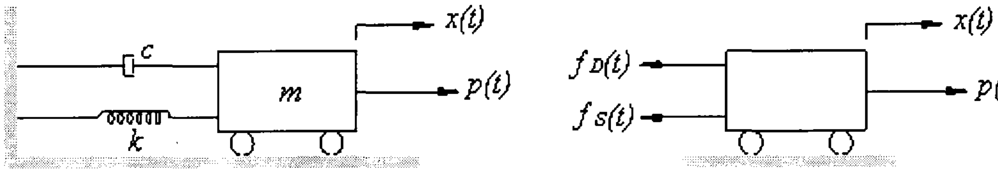

图 1

$$\delta \Pi_H - \delta Q_H = 0 \tag{2-56}$$

其中，$\Pi_H = \int_{t_0}^{t_1} (\frac{1}{2} m\dot{x}^2 - \frac{1}{2} kx^2 - c\dot{x}x + px) dt$，$\delta Q_H = \int_{t_0}^{t_1} (-x\delta c\dot{x} + x\delta p) dt$

将式(2-56)写成展开形式，则有：

$$\delta \Pi_H - \delta Q_H = \delta \int_{t_0}^{t_1} (\frac{1}{2} m\dot{x}^2 - \frac{1}{2} kx^2 - c\dot{x}x + px) dt - \int_{t_0}^{t_1} (-x\delta c\dot{x} + x\delta p) dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} (m\dot{x}\delta\dot{x} - kx\delta x - c\dot{x}\delta x - x\delta c\dot{x} + p\delta x + x\delta p) dt - \int_{t_0}^{t_1} (-x\delta c\dot{x} + x\delta p) dt = 0 \tag{2-57}$$

进行分部积分

$$\int_{t_0}^{t_1} m\dot{x}\delta\dot{x} dt = m\dot{x}\delta x \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} m\ddot{x}\delta x dt \tag{2-58}$$

将式(2-58)代入式(2-57)，并且按惯例在时域边界处取 $\delta x = 0$，整理可得：

$$\delta \Pi_H - \delta Q_H = \int_{t_0}^{t_1} (-m\ddot{x} - c\dot{x} - kx + p) \delta x dt = 0 \tag{2-59}$$

由于 δx 的任意性，故由上式可得：

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = p(t) \tag{2-60}$$

这个微分方程的解，可以处理为该方程的特解和齐次方程：

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = 0 \tag{2-61}$$

的解的叠加。齐次方程的解为：

$$x(t) = [x(0)\cos\omega_D t + (\frac{\dot{x}(0) + x(0)\xi\omega}{\omega_D})\sin\omega_D t]\exp(-\xi\omega t) \tag{2-62}$$

其中，$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ 为系统的固有频率，ξ 为阻尼与临界阻尼的比值 $\xi = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2m\omega}$，

$\omega_D = \omega\sqrt{1-\xi^2}$ 为阻尼系统的自振频率，$\dot{x}(0), x(0)$ 分别为 $\dot{x}(t), x(t)$ 的初始值。

由于阻尼的存在，齐次方程的解会逐步衰减掉。

设 $p(t)=p_0\sin\bar{\omega}t$，则微分方程(2-60)的特解为：

$$x_p(t)=\frac{p_0}{k}[\frac{1}{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}][(1-\beta^2)\sin\bar{\omega}t-2\xi\beta\cos\bar{\omega}t] \tag{2-63}$$

其中，$\bar{\omega}$ 是荷载频率，$\beta=\bar{\omega}/\omega$ 是荷载频率与固有频率的频率比。此解有时称为稳定解。

理论和算例表明，本文提到的非保守力的概念是含义丰富的概念，它既包括飞行器空气动力学和船舶流体力学中的阻力，也包括结构的内阻尼，还包括所谓伴生力。在飞行器空气动力学和船舶流体力学中，对阻尼进行了深入研究，有成熟的公式和正在研究中的新公式供参考。文献[27]中，对如何处理结构的内阻尼进行了较详细的说明。文献[15]对伴生力进行了较深入的研究，并且给出确切的算例。

2.7 本章小结

为了便于推导非保守分析力学的变分原理和广义变分原理，本章先介绍了力学的基本方程。随后在进一步明确分析的基础上建立了非保守系统拟 **Hamilton** 原理、与余 **Hamilton** 原理相对应的拟余 **Hamilton** 原理、卷积型拟势能原理以及卷积型拟余能原理。最后通过一个算例说明了以上原理的一般运用并讨论了本章所提的非保守力概念的丰富含义。

第 3 章 单刚体动力学的拟变分原理及其应用

通常所说的刚体动力学，其主要内容是研究刚体绕定点的运动。这是因为刚体的一般运动常可分解为质心的运动及相对质心的转动，而前者可归结为质点的动力学问题。刚体绕定点运动是从十八世纪开始研究的。当时，出于航海事业的发展，提出了关于船舶摇摆运动规律的问题，欧拉(1707-1783)最初的研究就属于这类问题．天文学中关于建立地球进动与章动的解析理论也从另一方面推动了刚体绕定点运动的研究。此外，这种研究在外弹道学中也有重要意义。

十八、十九世纪关于刚体定点运动的研究工作首先集中在如何列写运功微分方程式及如何对运动微分方程式进行积分(求解)，特别是关于“重刚体”(主动力只有重力，这是主动力的最简情况)的定点运动解决得比较完善。这一部分研究工作常称为定点运动的古典理论。欧拉于 1758 年最先列出了刚体定点运动的动力学方程式，这些方程式后来就被称为欧拉动力学方程。欧拉还研究了外力矩为零的情况，即刚体绕定点的自由运动或惯性运动；这时运动微分方程式有精确解。三十年后，拉格朗日(1736-1813)发表了著名的《分析力学》，其中第九章解决了定点运动微分方程式在新情况下精确求解的问题，这就是拉格朗日情况。这时，刚体的质量分布受到了限制，即刚体必须是旋转对称的，但重心则可位于对称轴上任何一点。此后的很长时期，研究工作都只限于对上两种情况的补充与完善，却再也没有找到新的可积情况。1849 年雅可比(1804-1851)提出了所谓第四积分问题，即若要刚体统定点运动的运动微分方程可积，必须找到第四个首次积分。欧拉、拉格朗日都是不自觉地找到了第四个首次积分才最终解决问题。1888 年俄罗斯青年女数学家柯娃列夫斯卡娅中选的论文中提出了第三种可积情况。但后来的长期工作证明了：除上述三种情况外，再没有任何情况下能找到第四积分，除非对运动的初始条件加以限制。

刚体定点运动的研究工作在陀螺仪器的发展过程中获得了新的进展．当

刚体具有很高自转角速度时，就成为人们通常所称的陀螺。它的独特的力学特性早已为人们所熟知，但真正把这些特性用于实际，却是十九世纪的事了。

自从1957年人类首次发射人造地球卫星以来，航天技术发展十分迅速，因而形成了一门“人造天体力学”的新兴学科，它与古典的天体力学不同之处在于人造天体(卫星、飞船、空间站等)还可受人为的控制力作用。它主要分轨道力学及姿态动力学两方面，而后者的内容就是研究这些人造天体相对质心的运动——主要是姿态的稳定与控制。由于作用力矩可以是复杂的干扰力矩和控制力矩，关于定点运动的经典理论在这里获得很大的丰富与发展.

当前世界上正经历着一场新技术革命，其重要内容之一是发展各种类型的机器人．机器人是一个由计算机控制的复杂的光机电系统，但其运动问题则属于刚体系动力学的范畴．此外，关于人体运动的研究在体育科学中也得到了应用。例如体操及跳水运动员怎样控制身体各部的动作才能作出复杂而新颖的空翻动作、跳高运动员怎样改进技术才能跳过更高的高度，以及如何制定宇航员在完全失重情况下的动作规范等，都是当前的研究课题。在这些研究中通常把人体简化成若干刚体铰接而成的树状结构．近几十年来逐渐形成了一门新的学科——多体系统动力学。

多体动力学的研究起步较晚，大约起源于20世纪70年代。在这方面早期有 Likins 在 70 年代初的研究工作，他首先研究的是带有弹性附件的卫星的动力学问题，这就是所谓的多体簇系统[28]。Likins 的最大贡献在于他采用了由 Meirwitch 和 Nelson 所提出的混合坐标法，将刚体位移和附件的弹性振动在不同的空间中度量。利用这种方法可以极大地缩减系统的自由度，使方程的求解成为可能。正因为如此，这一概念后来被广泛地应用于多体系统动力学中。还有 Kane[29]、Bodley[30] 以及其他一些学者也在这一领域作了大量的工作。到20世纪80年代末 Shabana A A 的专著 的出版[31]，说明多体动力学已经成为一个独立的学科。我国学者黄文虎[2]、马兴瑞[32]、刘延柱[33]、陆佑方[34] 也为该学科的发展做出重要贡献。

在航天工程中，很多领域的问题都需要用多柔体系统动力学方法来解决，

如大型附件的伸展或展开问题、航天器的对接问题等。多体系统动力学在机器人(又称机械臂)动力学中也有重要的应用，例如机器人动力学问题以及多个系统协调工作中的协调动力学与控制的问题，这是近年来研究得较深入的两个方面。多体动力学在航空、航海、交通运输、机械工程中也有重要的应用，不赘述。可见，多体动力学在国防和民用经济建设中有广泛的应用前景。

开展多体动力学的理论分析，需要杂交一般力学、固体力学和自动控制等多个学科，因此学科杂交既是本课题研究的显著特点，也为本课题的创新奠定了基础。

近期的研究表明，由于多体构形的复杂性，目前解决多体动力学问题主要是依赖于数值的、定量的分析方法，几乎没有人进行解析的分析讨论，这对于深刻把握系统的非线性力学实质、预测系统的全局动力学现象是十分不利的。因此，极有必要开展多体系统的理论分析，当然，这是一个十分复杂的问题，解决它可能需要很长的时间[32]。我们的研究就是适应这种需要而展开的。

本章研究单刚体动力学的原因是，一方面单刚体动力学是多体动力学的基础，把单刚体动力学的理论研究好了，多体动力学的理论也就水到渠成了；另一方面，单刚体动力学还有它独特的重要应用。以航空宇航科学技术为例，如果说多体动力学在复杂飞行器(例如：人造卫星、宇宙飞船、空间站和航天飞机)的研制中有重要应用，那么可以说单刚体动力学在单体飞行器(例如：飞机、导弹、卫星或洲际导弹的拦截器)的研制中有重要应用。更何况复杂飞行器在发射阶段要通过大气层，有的还要返回大气层或再入大气层，这时多数也简化为单刚体。

变分原理在我国航天事业发展中，曾经做出重要的贡献，我国和国际著名变分原理学家胡海昌曾经担任我国第一颗人造地球卫星总体组组长便是一个例证，其中部分理论成果形成一部专著[35]，现在我国的航天事业已经发展到嫦娥奔月、甚至奔向火星的新阶段，变分原理应当再立新功。

3.1 单刚体动力学的拟变分原理

因为这类问题的变量多、公式复杂，以下采用 Cartesian 张量书写[36]。

对于单刚体上的某一点，总矢径为 $R_i = X_i^c + x_i$，其中，X_i^c 为质心矢径，x_i 为由质心到单刚体中任意一点的矢径，如图 2 所示。

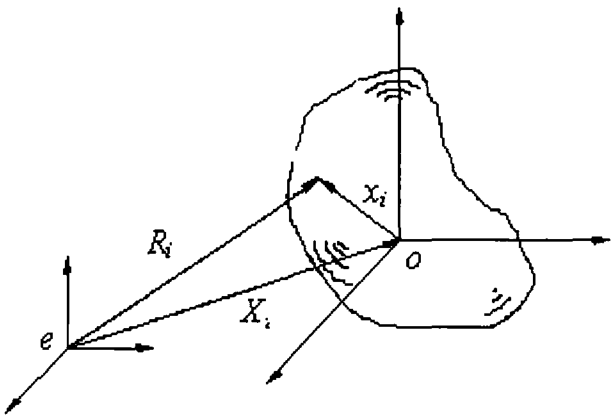

图 2

我们注意到只有刚体转角 θ_i 很小时，才能处理为矢量，称之为小角定理。这里 θ_i 可以认为满足小角定理，或者认为是伪坐标。可见，刚体上任意一点的速度为 $\frac{dR_i}{dt} = \frac{dX_i^c}{dt} + \frac{dx_i}{dt}$。应用 Coriolis 转动定理，注意到我们的力学模型中，x_i 为刚体中质心到任意点的距离，而刚体中任意两点间的距离都是常量，因此 $\frac{\partial x_i}{\partial t} = 0$，故有 $\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial x_i}{\partial t} + e_{ijk}\frac{d\theta_j}{dt}x_k = e_{ijk}\frac{d\theta_j}{dt}x_k$，于是有：

$$
\begin{aligned}
&\frac{dR_i}{dt} = \frac{dX_i^c}{dt} + \frac{dx_i}{dt} \\
&\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial x_i}{\partial t} + e_{ijk}\frac{d\theta_j}{dt}x_k = e_{ijk}\frac{d\theta_j}{dt}x_k \\
&\frac{dR_i}{dt} = \frac{dX_i^c}{dt} + e_{ijk}\frac{d\theta_j}{dt}x_k
\end{aligned}
\tag{3-1}
$$

动能为：

$$\int_m \frac{1}{2}\frac{dR_i}{dt}\frac{dR_i}{dt}dm = \int_m \frac{1}{2}(\frac{dX_i^c}{dt} + e_{ijk}\frac{d\theta_j}{dt}x_k)(\frac{dX_i^c}{dt} + e_{imn}\frac{d\theta_m}{dt}x_n)dm \tag{3-2}$$

如果认为导致刚体运动的力为非保守力，即作用于质心的主矢 F_i 和主矩 M_i 为非保守广义力，则拟 Hamilton 原理表示为：

$$\delta\pi_{H1} - \delta Q_H = 0 \tag{3-3}$$

式中：

$$\pi_{H1} = \int_{t_0}^{t_1}[\int_m \frac{1}{2}(\frac{dX_i^c}{dt} + e_{ijk}\frac{d\theta_j}{dt}x_k)(\frac{dX_i^c}{dt} + e_{imn}\frac{d\theta_m}{dt}x_n)dm + F_iX_i^c + M_i\theta_i]dt \tag{3-4}$$

$$\delta Q_H = \int_{t_0}^{t_1}(X_i^c\delta F_i + \theta_i\delta M_i)dt \tag{3-5}$$

因为[37]

$$\begin{aligned}&\int_m \frac{1}{2}\frac{dR_i}{dt}\frac{dR_i}{dt}dm \\ &= \int_m \frac{1}{2}\frac{dX_i^c}{dt}\frac{dX_i^c}{dt}dm + \int_m \frac{dX_i^c}{dt}e_{ijk}\frac{d\theta_j}{dt}x_kdm + \int_m \frac{1}{2}(e_{ijk}\frac{d\theta_j}{dt}x_k)(e_{imn}\frac{d\theta_m}{dt}x_n)dm \\ &= \frac{1}{2}m\frac{dX_i^c}{dt}\frac{dX_i^c}{dt} + \frac{1}{2}\frac{d\theta_i}{dt}H_i^c\end{aligned} \tag{3-6}$$

所以，单刚体动力学的拟 Hamilton 原理又可以写为：

$$\delta\pi_{H1} - \delta Q_H = 0 \tag{3-7}$$

式中：

$$\pi_{H1} = \int_{t_0}^{t_1}(\frac{1}{2}m\frac{dX_i^c}{dt}\frac{dX_i^c}{dt} + \frac{1}{2}\frac{d\theta_i}{dt}H_i^c + F_iX_i^c + M_i\theta_i)dt \tag{3-8}$$

$$\delta Q_H = \int_{t_0}^{t_1}(X_i^c\delta F_i + \theta_i\delta M_i)]dt \tag{3-9}$$

其中，t 为时间，m 为质量，H_i^c 为对质心的动量矩。对于为什么可以将拟 Hamilton 原理写为如上的形式，可以参阅文献 [9] 、[15]。

胡海昌曾经指出，检验变分原理的最好的方法是推导其驻值条件。以下推导单刚体动力学的拟 Hamilton 原理的拟驻值条件。

将拟 Hamilton 原理写成展开形式：

$$\begin{aligned}&\delta\pi_{H1}-\delta Q_H\\&=\delta\int_{t_0}^{t_1}(\frac{1}{2}m\frac{dX_i^c}{dt}\frac{dX_i^c}{dt}+\frac{1}{2}\frac{d\theta_i}{dt}H_i^c+F_iX_i^c+M_i\theta_i)dt\\&-\int_{t_0}^{t_1}(X_i^c\delta F_i+\theta_i\delta M_i)dt=0\end{aligned} \tag{3-10}$$

进行分部积分，并经进一步的运算，可得：

$$\int_{t_0}^{t_1}\frac{dX_i^c}{dt}\delta\frac{dX_i^c}{dt}dt==\frac{dX_i^c}{dt}\delta X_i^c\Big|_{t_0}^{t_1}-\int_{t_0}^{t_1}\frac{d^2X_i^c}{dt^2}\delta X_i^c dt \tag{3-11}$$

不难证明

$$\delta(\frac{1}{2}\frac{d\theta_i}{dt}H_i^c)=\frac{1}{2}\delta\frac{d\theta_i}{dt}H_i^c+\frac{1}{2}\frac{d\theta_i}{dt}\delta H_i^c=H_i^c\delta\frac{d\theta_i}{dt} \tag{3-12}$$

进行分部积分

$$\int_{t_0}^{t_1}\delta(\frac{1}{2}\frac{d\theta_i}{dt}H_i^c)dt=\int_{t_0}^{t_1}H_i^c\delta\frac{d\theta_i}{dt}dt=H_i^c\delta\theta_i\Big|_{t_0}^{t_1}-\int_{t_0}^{t_1}\frac{d}{dt}H_i^c\delta\theta_i dt \tag{3-13a}$$

如果应用 Coriolis 坐标转动定理，上式可以变换为：

$$\int_{t_0}^{t_1}\delta(\frac{1}{2}\frac{d\theta_i}{dt}H_i^c)dt=H_i^c\delta\theta_i\Big|_{t_0}^{t_1}-\int_{t_0}^{t_1}(\frac{\partial H_i^c}{\partial t}+e_{ijk}\frac{d\theta_j}{dt}H_k^c)dt \tag{3-13b}$$

将(3-11)～(3-13)代入(3-10)，按惯例在时域边界 $t=t_0$ 和 $t=t_1$ 处取 $\delta X_i^c=0$，$\delta\theta_i=0$，整理可得：

$$\delta\pi_{H1}-\delta Q_H=\int_{t_0}^{t_1}[(-m\frac{d^2X_i^c}{dt^2}+F_i)\delta X_i^c+(-\frac{dH_i^c}{dt}+M_i)\delta\theta_i]dt=0 \tag{3-14}$$

由于 δX_i^c、$\delta\theta_i$ 的任意性，故由上式可得拟驻值条件为：

$$\begin{aligned}&-m\frac{d^2X_i^c}{dt^2}+F_i=0\\&-\frac{dH_i^c}{dt}+M_i=0\end{aligned} \tag{3-15}$$

3.2 两类变量的单刚体动力学的拟变分原理

应用对合变换[26]，可将单刚体动力学的拟 Hamilton 原理(3-10)式变换为：

$$\delta\pi_{H2} - \delta Q_H = 0 \tag{3-16}$$

式中：

$$\pi_{H2} = \int_{t_0}^{t_1} (\frac{1}{2} m v_i^c v_i^c + \frac{1}{2} \omega_i J_{ij} \omega_j + F_i X_i^c + M_i \theta_i) dt \tag{3-17}$$

$$\delta Q_H = \int_{t_0}^{t_1} (X_i^c \delta F_i + \theta_i \delta M_i) dt \tag{3-18}$$

其先决条件为：

$$\begin{aligned} v_i^c - \frac{dX_i^c}{dt} = 0 \\ \omega_i - \frac{d\theta_i}{dt} = 0 \end{aligned} \tag{3-19}$$

这就是单刚体动力学两类变量的拟 Hamilton 原理。其中，v_i^c 为质心运动速度，ω_i 为转动角速度，J_{ij} 为转动惯量。

以下推导单刚体动力学两类变量的拟 Hamilton 原理的拟驻值条件。为此，将式(3-16)写成展开形式

$$\begin{aligned} &\delta\pi_{H2} - \delta Q_H \\ &= \delta\int_{t_0}^{t_1} \{\frac{1}{2} m v_i^c v_i^c + \frac{1}{2} \omega_i J_{ij} \omega_j + F_i X_i^c + M_i \theta_i\} dt - \int_{t_0}^{t_1} (X_i^c \delta F_i + \theta_i \delta M_i) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \{m v_i^c \delta v_i^c + J_{ij} \omega_j \delta\omega_i + F_i \delta X_i^c + M_i \delta\theta_i\} dt \\ &= 0 \end{aligned} \tag{3-20a}$$

先决条件的变分式为：

$$\begin{aligned} \delta v_i^c - \delta \frac{dX_i^c}{dt} = 0 \\ \delta\omega_i - \delta \frac{d\theta_i}{dt} = 0 \end{aligned} \tag{3-20b}$$

将(3-20b)代入(3-20a)式，可得：

$$
\begin{aligned}
&\delta\pi_{H2}-\delta Q_H \\
&=\int_{t_0}^{t_1}\{mv_i^c\delta\frac{dX_i^c}{dt}+J_{ij}\omega_j\delta\frac{d\theta_i}{dt}+F_i\delta X_i^c+M_i\delta\theta_i\}dt \\
&=0
\end{aligned}
\tag{3-21}
$$

应用 Green 定理(分部积分)，考虑到转动惯量张量的对称性，则有：

$$\int_{t_0}^{t_1}mv_i^c\delta\frac{dX_i^c}{dt}dt=mv_i^c\delta X_i^c\Big|_{t_0}^{t_1}-\int_{t_0}^{t_1}m\frac{dv_i^c}{dt}\delta X_i^c dt \tag{3-22}$$

$$\int_{t_0}^{t_1}J_{ij}\omega_j\delta\frac{d\theta_i}{dt}dt=J_{ij}\omega_j\delta\theta_i\Big|_{t_0}^{t_1}-\int_{t_0}^{t_1}\frac{d}{dt}(J_{ij}\omega_j)\delta\theta_i dt \tag{3-23}$$

将式(3-22)、(3-23)代入式(3-21)，并且按惯例在时域边界处，取$\delta X_i^c=0$、$\delta\theta_i=0$，可得：

$$
\begin{aligned}
\delta\pi_{H2}-\delta Q_H &=\int_{t_0}^{t_1}\{(-m\frac{dv_i^c}{dt}+F_i)\delta X_i^c+[-\frac{d}{dt}(J_{ij}\omega_j)+M_i]\delta\theta_i\}dt \\
&=0
\end{aligned}
\tag{3-24}
$$

由于δX_i^c、$\delta\theta_i$的任意性，故由上式可得拟驻值条件为：

$$
\begin{aligned}
&-m\frac{dv_i^c}{dt}+F_i=0 \\
&-\frac{d}{dt}(J_{ij}\omega_j)+M_i=0
\end{aligned}
\tag{3-25}
$$

明显可见，单刚体动力学两类变量的拟 Hamilton 原理的拟驻值条件与其先决条件一起，构成封闭的微分方程组。

若将运动学方程和几何方程代入式(3-25)中，可得:

$$
\begin{aligned}
&-m\frac{d^2X_i^c}{dt^2}+F_i=0 \\
&-\frac{d}{dt}(J_{ij}\frac{d\theta_j}{dt})+M_i=0
\end{aligned}
\tag{3-26}
$$

可见，式(3-26)和式(3-15)相同。

3.3 单刚体动力学的广义拟变分原理

一类变量单刚体动力学基本方程为

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2X_i^c}{dt^2}-F_i=0 \\ \dfrac{dH_i^c}{dt}-M_i=0 \end{cases} \tag{3-27}$$

应用对合变换可得两类变量的基本方程为

$$v_i^c-\frac{dX_i^c}{dt}=0 \tag{3-28}$$

$$m\frac{dv_i^c}{dt}-F_i=0 \tag{3-29}$$

$$\omega_i-\frac{d\theta_i}{dt}=0 \tag{3-30}$$

$$\frac{dH_i^c}{dt}-M_i=\frac{dJ_{ij}\omega_j}{dt}-M_i=0 \tag{3-31}$$

将式(3-28)、(3-29)、(3-30)、(3-31)分别乘以相应的虚量$\delta(mv_i^c)$、δX_i^c、$\delta J_{ij}\omega_j$、$\delta\theta_i$，然后积分，并代数相加，可得：

$$\begin{aligned}&\int_{t_0}^{t_1}[-(v_i^c-\frac{dX_i^c}{dt})\delta(mv_i^c)-(m\frac{dv_i^c}{dt}-F_i)\delta X_i^c-(\frac{dJ_{ij}\omega_j}{dt}-M_i)\delta\theta_i\\&-(\omega_i-\frac{d\theta_i}{dt})\delta J_{ij}\omega_j]dt=0\end{aligned} \tag{3-32}$$

应用分部积分，则有：

$$-\int_{t_0}^{t_1}m\frac{dv_i^c}{dt}\delta X_i^c dt=-mv_i^c\delta X_i^c\Big|_{t_0}^{t_1}+\int_{t_0}^{t_1}mv_i^c\delta\frac{dX_i^c}{dt}dt \tag{3-33}$$

$$\int_{t_0}^{t_1}(-\frac{dJ_{ij}\omega_j}{dt}\delta\theta_i)dt=-J_{ij}\omega_j\delta\theta_i\Big|_{t_0}^{t_1}+\int_{t_0}^{t_1}J_{ij}\omega_j\delta\frac{d\theta_i}{dt}dt \tag{3-34}$$

将(3-33)、(3-34)式代入(3-32)，并且按惯例，在时域边界处取δX_i^c、$\delta\theta_i$等于

零，整理可得：

$$\int_{t_0}^{t_1}(-mv_i^c\delta v_i^c + m\frac{dX_i^c}{dt}\delta v_i^c + mv_i^c\delta\frac{dX_i^c}{dt} + F_i\delta X_i^c + J_{ij}\omega_j\delta\frac{d\theta_i}{dt} + M_i\delta\theta_i - \omega_i\delta J_{ij}\omega_j + \frac{d\theta_i}{dt}\delta J_{ij}\omega_j)dt = 0 \tag{3-35}$$

进而可得：

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}[m\frac{dX_i^c}{dt}v_i^c - \frac{1}{2}mv_i^c v_i^c + J_{ij}\omega_j\frac{d\theta_i}{dt} - \frac{1}{2}J_{ij}\omega_i\omega_j + F_iX_i^c + M_i\theta_i]dt - \int_{t_0}^{t_1}(X_i^c\delta F_i + \theta_i\delta M_i)dt = 0 \tag{3-36}$$

简写为：

$$\delta\Pi_g - \delta Q = 0 \tag{3-37}$$

其中：

$$\Pi_g = \int_{t_0}^{t_1}[m\frac{dX_i^c}{dt}v_i^c - \frac{1}{2}mv_i^c v_i^c + J_{ij}\omega_j\frac{d\theta_i}{dt} - \frac{1}{2}J_{ij}\omega_i\omega_j + F_iX_i^c + M_i\theta_i]dt \tag{3-38}$$

$$\delta Q = \int_{t_0}^{t_1}(X_i^c\delta F_i + \theta_i\delta M_i)dt \tag{3-39}$$

这便是两类变量的单刚体动力学广义拟变分原理。

以下推导这个单刚体动力学两类变量的广义拟变分原理的拟驻值条件。单刚体动力学两类变量的广义拟变分原理表示为：

$$\delta\Pi_g - \delta Q = 0 \tag{3-40}$$

其中：

$$\Pi_g = \int_{t_0}^{t_1}[m\frac{dX_i^c}{dt}v_i^c - \frac{1}{2}mv_i^c v_i^c + J_{ij}\omega_j\frac{d\theta_i}{dt} - \frac{1}{2}J_{ij}\omega_i\omega_j + F_iX_i^c + M_i\theta_i]dt \tag{3-41}$$

$$\delta Q = \int_{t_0}^{t_1}(X_i^c\delta F_i + \theta_i\delta M_i)dt \tag{3-42}$$

将式(3-40)写成展开形式，可得：

$$\int_{t_0}^{t_1}[-mv_i^c\delta v_i^c+m\frac{dX_i^c}{dt}\delta v_i^c+mv_i^c\delta\frac{dX_i^c}{dt}+F_i\delta X_i^c+J_{ij}\omega_j\delta\frac{d\theta_i}{dt}+ \\ M_i\delta\theta_i-\omega_i\delta J_{ij}\omega_j+\frac{d\theta_i}{dt}\delta J_{ij}\omega_j]dt=0 \tag{3-43}$$

应用分部积分

$$\int_{t_0}^{t_1}mv_i^c\delta\frac{dX_i^c}{dt}dt=mv_i^c\delta X_i^c\Big|_{t_0}^{t_1}-\int_{t_0}^{t_1}m\frac{dv_i^c}{dt}\delta X_i^c dt \tag{3-44}$$

$$\int_{t_0}^{t_1}J_{ij}\omega_j\delta\frac{d\theta_i}{dt}dt=J_{ij}\omega_j\delta\theta_i\Big|_{t_0}^{t_1}-\int_{t_0}^{t_1}(\frac{dJ_{ij}\omega_j}{dt}\delta\theta_i)dt \tag{3-45}$$

将式(3-44)、(3-45)代入式(3-43)，并且按惯例，在时域边界处取$\delta X_i^c=0$、$\delta\theta_i=0$，整理可得：

$$\int_{t_0}^{t_1}[-(v_i^c-\frac{dX_i^c}{dt})\delta(mv_i^c)-(m\frac{dv_i^c}{dt}-F_i)\delta X_i^c-(\frac{dJ_{ij}\omega_j}{dt}-M_i)\delta\theta_i- \\ (\omega_i-\frac{d\theta_i}{dt})\delta J_{ij}\omega_j]dt \tag{3-46}$$

由于$\delta(mv_i^c)$、δX_i^c、$\delta\theta_i$和$\delta J_{ij}\omega_j$的任意性，故由上式可得拟驻值条件：

$$v_i^c-\frac{dX_i^c}{dt}=0 \tag{3-47a}$$

$$m\frac{dv_i^c}{dt}-F_i=0 \tag{3-47b}$$

$$\omega_i-\frac{d\theta_i}{dt}=0 \tag{3-47c}$$

$$\frac{dJ_{ij}\omega_j}{dt}-M_i=0 \tag{3-47d}$$

3.4 应用举例

单刚体动力学的拟 Hamilton 原理可以写为：

$$\delta\pi_{H1} - \delta Q_H = 0 \tag{3-48}$$

式中：

$$\pi_{H1} = \int_{t_0}^{t_1} (\frac{1}{2} m \frac{dX_i^c}{dt} \frac{dX_i^c}{dt} + \frac{1}{2} \frac{d\theta_i}{dt} H_i^c + F_i X_i^c + M_i \theta_i) dt \tag{3-49}$$

$$\delta Q_H = \int_{t_0}^{t_1} (X_i^c \delta F_i + \theta_i \delta M_i)] dt \tag{3-50}$$

假设非完整约束条件为：

$$F(t, X_i^c, \theta_i, \dot{X}_i^c, \dot{\theta}_i) = 0 \tag{3-51}$$

将拟 Hamilton 原理写成展开形式：

$$\begin{aligned} & \delta\pi_{H1} - \delta Q_H \\ & = \delta \int_{t_0}^{t_1} (\frac{1}{2} m \frac{dX_i^c}{dt} \frac{dX_i^c}{dt} + \frac{1}{2} \frac{d\theta_i}{dt} H_i^c + F_i X_i^c + M_i \theta_i) dt \\ & - \int_{t_0}^{t_1} (X_i^c \delta F_i + \theta_i \delta M_i) dt = 0 \end{aligned} \tag{3-52}$$

对非完整约束条件应用 Chetaeve 条件。可得：

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{X}_i^c} \delta X_i^c + \frac{\partial F}{\partial \dot{\theta}_i} \delta \theta_i = 0 \tag{3-53}$$

本文作者注意到 Chetaeve 条件的写法与一些著作中的差别来源于本文用张量符号书写，而一些著作中用一般的代数符号书写。

进行分部积分，并经进一步的运算，可得：

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{dX_i^c}{dt} \delta \frac{dX_i^c}{dt} dt = = \frac{dX_i^c}{dt} \delta X_i^c \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \frac{d^2 X_i^c}{dt^2} \delta X_i^c dt \tag{3-54}$$

不难证明

$$\delta(\frac{1}{2} \frac{d\theta_i}{dt} H_i^c) = \frac{1}{2} \delta \frac{d\theta_i}{dt} H_i^c + \frac{1}{2} \frac{d\theta_i}{dt} \delta H_i^c = H_i^c \delta \frac{d\theta_i}{dt} \tag{3-55}$$

进行分部积分

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta(\frac{1}{2} \frac{d\theta_i}{dt} H_i^c) dt = \int_{t_0}^{t_1} H_i^c \delta \frac{d\theta_i}{dt} dt = H_i^c \delta\theta_i \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} H_i^c \delta\theta_i dt \tag{3-56a}$$

如果应用 Coriolis 坐标转动定理，上式可以变换为：

$$\int_{t_0}^{t_1}\delta(\frac{1}{2}\frac{d\theta_i}{dt}H_i^c)dt = H_i^c\delta\theta_i\Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1}(\frac{\partial H_i^c}{\partial t} + e_{ijk}\frac{d\theta_j}{dt}H_k^c)dt \tag{3-56b}$$

将(3-54)～(3-56)代入(3-52)，并且应用 Lagrange 乘子法将 Chetaev 条件引入泛函中，按惯例在时域边界 $t=t_0$ 和 $t=t_1$ 处取 $\delta X_i^c=0$，$\delta\theta_i=0$，整理可得：

$$\delta\pi_{H1} - \delta Q_H = \int_{t_0}^{t_1}[(-m\frac{d^2X_i^c}{dt^2} + F_i + \lambda\frac{\partial F}{\partial\dot{X}_i^c})\delta X_i^c + (-\frac{dH_i^c}{dt} + M_i + \lambda\frac{\partial F}{\partial\dot{\theta}_i})\delta\theta_i]dt = 0 \tag{3-57}$$

由于 δX_i^c、$\delta\theta_i$ 的任意性，故由上式可得拟驻值条件为：

$$\begin{aligned} &-m\frac{d^2X_i^c}{dt^2} + F_i + \lambda\frac{\partial F}{\partial\dot{X}_i^c} = 0 \\ &-\frac{dH_i^c}{dt} + M_i + \lambda\frac{\partial F}{\partial\dot{\theta}_i} = 0 \end{aligned} \tag{3-58}$$

可见，上式与约束方程(3-51)构成封闭的微分方程组。

文献[32]指出，航天器动力学的系统，常常具有非完整约束，应用变分原理来研究刚体动力学问题，便于将非完整约束加入刚体力学系统。这便说明建立刚体动力学的变分原理的优越性。

3.5 本章小结

本章首先概要介绍了刚体、多体系统动力学的发展背景以及一般所采用的分析解决方法，指出单刚体动力学研究的必要性和基础性以及变分原理的特殊应用前景。接着尝试性建立了单刚体动力学的拟变分原理、单刚体动力学两类变量的拟变分原理、两类变量的单刚体动力学广义拟变分原理，并推导了各自的拟驻值条件。最后结合应用举例说明了应用变分原理来研究刚体动力学问题，便于将非完整约束加入刚体力学系统。

第4章 单刚体动力学初值问题的拟变分原理

由于变形体力学的广义变分原理在有限元素法和其它近似计算方法的应用方面取得重大成功[38-40]，各国学者努力将广义变分原理的研究推广到分析动力学中去，但是，由于这一研究的难度很大，长期进展比较缓慢。文献[41]介绍了国外学者研究分析动力学中的变分原理的情况，将我国学者对分析动力学中的变分原理的研究引导到世界性研究的前沿。文献[42]引入广义D'Alembert-Lagrange 原理，应用凑合法建立了分析动力学边值问题的第二类变分原理 (即广义变分原理)，并且将之写成正则形式。文献[43]应用对合变换推导出两类变量的 Hamilton 原理，应用 Lagrange 乘子法推导出分析动力学边值问题的两类变量的有附加条件的广义变分原理和无附加条件的广义变分原理，推导了各类变分原理的驻值条件。文献[44] 应用对合变换，将两类变量的广义变分原理的驻值条件变换为三类变量的控制方程。按照广义力和广义位移之间的对应关系，将各控制方程乘上相应的虚量，代数相加，然后积分，进而建立了分析动力学边值问题的三类变量的广义变分原理，我们将这种建立广义变分原理的方法称为变积方法。以上文献都是研究边值问题的。

对于初值问题，1964 年 Gurtin 利用卷积理论，提出了与弹性动力学初值问题等价的变分原理[45]，这种 Gurtin 型变分原理为建立弹性动力学初值问题的各种近似解法奠定了可靠的理论基础。近十多年来，罗恩对线性变形体动力学的初值问题的变分原理进行了比较全面深入的研究，系统地建立与发展了线性和非线性变形体动力学的 Gurtin 型变分原理[46-51]。在分析动力学中，存在大量的初值问题，但是，研究初值问题的变分原理和广义变分原理文献较少。梁立孚，罗恩，冯晓九，在文献[17]中建立了分析力学初值问题的一种变分原理形式。

对于非保守系统，国外以 Leipholz 为代表，提出广义自共轭的概念，建立了广义的 Hamilton 原理，给出了著名的 Leipholz 杆模型[52,53]。我国学者在文献[54]的研究中发现，Leipholz 仅研究非保守系统的势能原理，而忽视了对

余能原理的研究，通过发展 Leipholz 的研究，并发扬国内对广义变分原理研究的优势，在伴生力系统的前提下，建立了非保守系统的余能原理，进而建立了关于弹性理论非保守系统的一般变分原理。文献[55]建立了非保守系统自激振动的拟固有频率变分原理。文献[15]建立了非保守系统的两类变量的广义拟变分原理，并且给出同时求解一个典型的伴生力非保守系统的内力和变形两类变量的计算方法。以上工作都是研究边值问题的。梁立孚，罗恩，刘殿魁，在文献[56]中建立了非保守弹性动力学初值问题的简单 Gurtin 型拟变分原理。

本章我们将建立单刚体动力学初值问题的拟变分原理和广义拟变分原理。

4.1 引言

单刚体动力学的基本方程为：

$$-m\frac{d^2X_i^c}{dt^2}+F_i=0 \tag{4-1}$$

$$-\frac{d}{dt}(J_{ij}\frac{d\theta_j}{dt})+M_i=0 \tag{4-2}$$

初值条件为：

$$X_i^c\Big|_{t=0}=X_i^c(0),\left.\frac{dX_i^c}{dt}\right|_{t=0}=\dot{X}_i^c(0) \tag{4-3}$$

$$\theta_i\Big|_{t=0}=\theta_i(0),\left.\frac{d\theta_i}{dt}\right|_{t=0}=\dot{\theta}_i(0) \tag{4-4}$$

基本方程的 Laplace 变换式为：

$$-m[p^2\tilde{X}_i^c-pX_i^c(0)-\dot{X}_i^c(0)]+\tilde{F}_i=0 \tag{4-5}$$

$$-pJ_{ij}[p\tilde{\Theta}_j-\theta_j(0)]+J_{ij}\dot{\theta}_j(0)+\tilde{M}_i=0 \tag{4-6}$$

4.2 一类变量的单刚体动力学初值问题拟变分原理

应用变积方法，将虚位移的 Laplace 变换 $\delta\tilde{X}_i^c$ 、 $\delta\tilde{\Theta}_i$ 分别乘以(4-5)、(4-6)式，并代数相加，得：

$$\begin{aligned}&\{-m[p^2\tilde{X}_i^c - pX_i^c(0) - \dot{X}_i^c(0)] + \tilde{F}_i\}\delta\tilde{X}_i^c \\ &+\{-pJ_{ij}[p\tilde{\Theta}_j - \theta_j(0)] + J_{ij}\dot{\theta}_j(0) + \tilde{M}_i\}\delta\tilde{\Theta}_i = 0\end{aligned} \tag{4-7}$$

进一步变换为：

$$\begin{aligned}&\delta\{-\frac{1}{2}mp^2\tilde{X}_i^c\tilde{X}_i^c + mpX_i^c(0)\tilde{X}_i^c + m\dot{X}_i^c(0)\tilde{X}_i^c \\ &-\frac{1}{2}p^2J_{ij}\tilde{\Theta}_i\tilde{\Theta}_j + pJ_{ij}\theta_j(0)\tilde{\Theta}_i + J_{ij}\dot{\theta}_j(0)\tilde{\Theta}_i + \tilde{F}_i\tilde{X}_i^c + \tilde{M}_i\tilde{\Theta}_i\} \\ &-(\tilde{X}_i^c\delta\tilde{F}_i + \tilde{\Theta}_i\delta\tilde{M}_i) = 0\end{aligned} \tag{4-8}$$

上式简记为：

$$\delta\tilde{\Pi}_{G1} - \delta\tilde{Q}_G = 0 \tag{4-9}$$

其中，

$$\begin{aligned}\tilde{\Pi}_{G1} = &-\frac{1}{2}mp^2\tilde{X}_i^c\tilde{X}_i^c + mpX_i^c(0)\tilde{X}_i^c + m\dot{X}_i^c(0)\tilde{X}_i^c \\ &-\frac{1}{2}p^2J_{ij}\tilde{\Theta}_i\tilde{\Theta}_j + pJ_{ij}\theta_j(0)\tilde{\Theta}_i + J_{ij}\dot{\theta}_j(0)\tilde{\Theta}_i + \tilde{F}_i\tilde{X}_i^c + \tilde{M}_i\tilde{\Theta}_i \\ \tilde{Q}_G = &\ \tilde{X}_i^c\delta\tilde{F}_i + \tilde{\Theta}_i\delta\tilde{M}_i\end{aligned}$$

将(4-8)由相空间反演到原空间，得：

$$\begin{aligned}&\delta\{-\frac{1}{2}m\frac{dX_i^c}{dt}*\frac{dX_i^c}{dt} + m\dot{X}_i^c(0)X_i^c - \frac{1}{2}J_{ij}\frac{d\theta_i}{dt}*\frac{d\theta_j}{dt} + J_{ij}\dot{\theta}_j(0)\theta_i \\ &+F_i*X_i^c + M_i*\theta_i\} - [X_i^c*\delta F_i + \theta_i*\delta M_i] = 0\end{aligned} \tag{4-10}$$

将(4-10)简记为：

$$\delta\Pi_{G1} - \delta Q_G = 0 \tag{4-11}$$

其中，

$$\Pi_{G1} = -\frac{1}{2}m\frac{dX_i^c}{dt} * \frac{dX_i^c}{dt} + m\dot{X}_i^c(0)X_i^c - \frac{1}{2}J_{ij}\frac{d\theta_i}{dt} * \frac{d\theta_j}{dt} + J_{ij}\dot{\theta}_j(0)\theta_i$$
$$+ F_i * X_i^c + M_i * \theta_i$$
$$\delta Q_G = X_i^c * \delta F_i + \theta_i * \delta M_i$$

这便是一类变量的单刚体动力学初值问题的拟变分原理。

4.3 两类变量的基本方程

应用对合变换，可得两类变量的基本方程：

$$v_i^c - \frac{dX_i^c}{dt} = 0 \tag{4-12}$$

$$-m\frac{dv_i^c}{dt} + F_i = 0 \tag{4-13}$$

$$\omega_i - \frac{d\theta_i}{dt} = 0 \tag{4-14}$$

$$-\frac{d}{dt}(J_{ij}\omega_j) + M_i = 0 \tag{4-15}$$

初值条件为：

$$X_i^c\Big|_{t=0} = X_i^c(0), v_i^c\Big|_{t=0} = v_i^c(0) \tag{4-16}$$

$$\theta_i\Big|_{t=0} = \theta_i(0), \omega_i\Big|_{t=0} = \omega_i(0) \tag{4-17}$$

相应的 Laplace 变换式为：

$$\tilde{v}_i^c - p\tilde{X}_i^c + X_i^c(0) = 0 \tag{4-18}$$

$$-mp\tilde{v}_i^c + mv_i^c(0) + \tilde{F}_i = 0 \tag{4-19}$$

$$\tilde{\omega}_i - p\tilde{\Theta}_i + \theta_i(0) = 0 \tag{4-20}$$

$$-pJ_{ij}\tilde{\omega}_j + J_{ij}\omega_j(0) + \tilde{M}_i = 0 \tag{4-21}$$

4.4 两类变量的单刚体动力学初值问题拟变分原理

应用变积方法，将虚位移的 Laplace 变换 $\delta\tilde{X}_i^c$ 、$\delta\tilde{\Theta}_i$ 分别乘以(4-19)、(4-21)式，并代数相加，得：

$$-[-mp\tilde{v}_i^c + mv_i^c(0) + \tilde{F}_i]\delta\tilde{X}_i^c - [-pJ_{ij}\tilde{\omega}_j + J_{ij}\omega_j(0) + \tilde{M}_i]\delta\tilde{\Theta}_i = 0 \tag{4-22}$$

式(4-18)、(4-20)的变分为：

$$\delta\tilde{v}_i^c - p\delta\tilde{X}_i^c = 0、\delta\tilde{\omega}_i - p\delta\tilde{\Theta}_i = 0 \tag{4-23}$$

将(4-23)代入(4-22)，整理得：

$$\begin{aligned}&\delta[\frac{1}{2}m\tilde{v}_i^c\tilde{v}_i^c - mv_i^c(0)\tilde{X}_i^c - \tilde{F}_i\tilde{X}_i^c + \frac{1}{2}J_{ij}\tilde{\omega}_j\tilde{\omega}_i - J_{ij}\omega_j(0)\tilde{\Theta}_i - \tilde{M}_i\tilde{\Theta}_i]\\&+(\tilde{X}_i^c\delta\tilde{F}_i + \tilde{\Theta}_i\delta\tilde{M}_i) = 0\end{aligned} \tag{4-24}$$

上式简记为：

$$\delta\tilde{\Pi}_{G2} + \delta\tilde{Q}_G = 0 \tag{4-25}$$

其中，

$$\tilde{\Pi}_{G2} = \frac{1}{2}m\tilde{v}_i^c\tilde{v}_i^c - mv_i^c(0)\tilde{X}_i^c - \tilde{F}_i\tilde{X}_i^c + \frac{1}{2}J_{ij}\tilde{\omega}_j\tilde{\omega}_i - J_{ij}\omega_j(0)\tilde{\Theta}_i - \tilde{M}_i\tilde{\Theta}_i$$

$$\delta\tilde{Q}_G = \tilde{X}_i^c\delta\tilde{F}_i + \tilde{\Theta}_i\delta\tilde{M}_i$$

其先决条件为式(4-18)、(4-20)。

将(4-24)由相空间反演到原空间，得：

$$\begin{aligned}&\delta[\frac{1}{2}mv_i^c * v_i^c - mv_i^c(0)X_i^c - F_i * X_i^c + \frac{1}{2}J_{ij}\omega_j * \omega_i - J_{ij}\omega_j(0)\theta_i - M_i * \theta_i]\\&+(X_i^c * \delta F_i + \theta_i * \delta M_i) = 0\end{aligned} \tag{4-26}$$

上式简记为：

$$\delta\Pi_{G2} + \delta Q_G = 0 \tag{4-27}$$

其中，

$$\Pi_{G2}=\frac{1}{2}mv_i^c*v_i^c-mv_i^c(0)X_i^c-F_i*X_i^c+\frac{1}{2}J_{ij}\omega_j*\omega_i-J_{ij}\omega_j(0)\theta_i-M_i*\theta_i$$

$$\delta Q_G=X_i^c*\delta F_i+\theta_i*\delta M_i$$

其先决条件为式(4-12)、(4-14)。这便是单刚体两类变量拟变分原理。

4.5 两类变量广义拟变分原理

应用变积方法，将虚位移的 Laplace 变换$\delta(m\tilde{v}_i^c)$、$\delta\tilde{X}_i^c$、$\delta(J_{ij}\tilde{\omega}_j)$、$\delta\tilde{\Theta}_i$分别乘以(4-18)～(4-21)式，并代数相加，得：

$$\begin{aligned}&[\tilde{v}_i^c-p\tilde{X}_i^c+X_i^c(0)]\delta(m\tilde{v}_i^c)+[-mp\tilde{v}_i^c+mv_i^c(0)+\tilde{F}_i]\delta\tilde{X}_i^c\\&+[\tilde{\omega}_i-p\tilde{\Theta}_i+\theta_i(0)]\delta(J_{ij}\tilde{\omega}_j)+[-pJ_{ij}\tilde{\omega}_j+J_{ij}\omega_j(0)+\tilde{M}_i]\delta\tilde{\Theta}_i=0\end{aligned}\tag{4-28}$$

上式可以变换为：

$$\begin{aligned}&\delta\{\frac{1}{2}m\tilde{v}_i^c\tilde{v}_i^c-pm\tilde{v}_i^c\tilde{X}_i^c+m\tilde{v}_i^cX_i^c(0)+mv_i^c(0)\tilde{X}_i^c+\tilde{F}_i\tilde{X}_i^c\\&+\frac{1}{2}J_{ij}\tilde{\omega}_i\tilde{\omega}_j-pJ_{ij}\tilde{\omega}_j\tilde{\Theta}_i+J_{ij}\tilde{\omega}_j\theta_i(0)+J_{ij}\omega_j(0)\tilde{\Theta}_i+\tilde{M}_i\tilde{\Theta}_i\}\\&-(\tilde{X}_i^c\delta\tilde{F}_i+\tilde{\Theta}_i\delta\tilde{M}_i)=0\end{aligned}\tag{4-29}$$

上式简记为：

$$\delta\tilde{\Pi}_G-\delta\tilde{Q}=0\tag{4-30}$$

其中，

$$\begin{aligned}\tilde{\Pi}_G=&\frac{1}{2}m\tilde{v}_i^c\tilde{v}_i^c-pm\tilde{v}_i^c\tilde{X}_i^c+m\tilde{v}_i^cX_i^c(0)+mv_i^c(0)\tilde{X}_i^c+\tilde{F}_i\tilde{X}_i^c\\&+\frac{1}{2}J_{ij}\tilde{\omega}_i\tilde{\omega}_j-pJ_{ij}\tilde{\omega}_j\tilde{\Theta}_i+J_{ij}\tilde{\omega}_j\theta_i(0)+J_{ij}\omega_j(0)\tilde{\Theta}_i+\tilde{M}_i\tilde{\Theta}_i\end{aligned}$$

$$\delta\tilde{Q}=\tilde{X}_i^c\delta\tilde{F}_i+\tilde{\Theta}_i\delta\tilde{M}_i$$

将(4-29)由相空间反演到原空间，得；

$$\begin{aligned}&\delta\{\frac{1}{2}mv_i^c*v_i^c-mv_i^c*\frac{dX_i^c}{dt}+mv_i^c(0)X_i^c+F_i*X_i^c\\&+\frac{1}{2}J_{ij}\omega_i*\omega_j-J_{ij}\omega_j*\frac{d\theta_i}{dt}+J_{ij}\omega_j(0)\theta_i+M_i*\theta_i\}\\&-(X_i^c*\delta F_i+\theta_i*\delta M_i)=0\end{aligned}\tag{4-31a}$$

或者：

$$
\begin{aligned}
&\delta\{\frac{1}{2}mv_i^c * v_i^c - mX_i^c * \frac{dv_i^c}{dt} + m\tilde{v}_i^c X_i^c(0) + F_i * X_i^c \\
&+\frac{1}{2}J_{ij}\omega_i * \omega_j - J_{ij}\theta_i * \frac{d\omega_i}{dt} + +J_{ij}\omega_j(0)\theta_i + M_i * \theta_i\} \\
&-(X_i^c * \delta F_i + \theta_i * \delta M_i) = 0
\end{aligned}
\tag{4-31b}
$$

将上式简记为：

$$
\delta\Pi_G - \delta Q = 0 \tag{4-32}
$$

其中，

$$
\begin{aligned}
\Pi_G = &\frac{1}{2}mv_i^c * v_i^c - mv_i^c * \frac{dX_i^c}{dt} + mv_i^c(0)X_i^c + F_i * X_i^c \\
&+\frac{1}{2}J_{ij}\omega_i * \omega_j - J_{ij}\omega_j * \frac{d\theta_i}{dt} + J_{ij}\omega_j(0)\theta_i + M_i * \theta_i
\end{aligned}
$$

或者：

$$
\begin{aligned}
&\Pi_G = \frac{1}{2}mv_i^c * v_i^c - mX_i^c * \frac{dv_i^c}{dt} + m\tilde{v}_i^c X_i^c(0) + F_i * X_i^c \\
&+\frac{1}{2}J_{ij}\omega_i * \omega_j - J_{ij}\theta_i * \frac{d\omega_i}{dt} + +J_{ij}\omega_j(0)\theta_i + M_i * \theta_i \\
&\delta Q = X_i^c * \delta F_i + \Theta_i * \delta M_i
\end{aligned}
$$

这便是单刚体两类变量广义拟变分原理。

4.6 拟驻值条件的推导

推导卷积型变分原理的驻值条件曾经是一个难题，经过多年的努力，文献[17，56]解决了这一问题，这里应用文献[17，56]的方法推导单刚体力学初值问题的拟变分原理的拟驻值条件。

4.6.1 一类变量的拟变分原理

单刚体一类变量的拟变分原理为：

$$
\delta\Pi_{G1} - \delta Q_G = 0 \tag{4-33}
$$

对其进行变分，得：

$$\begin{aligned}
&\delta\Pi_{G1}-\delta Q_G \\
&=\delta\{-\frac{1}{2}m\frac{dX_i^c}{dt}*\frac{dX_i^c}{dt}+m\dot{X}_i^c(0)X_i^c-\frac{1}{2}J_{ij}\frac{d\theta_i}{dt}*\frac{d\theta_j}{dt}+J_{ij}\dot{\theta}_j(0)\theta_i \\
&+F_i*X_i^c+M_i*\theta_i\}-[X_i^c*\delta F_i+\theta_i*\delta M_i] \\
&=-m\frac{dX_i^c}{dt}*\delta\frac{dX_i^c}{dt}+m\dot{X}_i^c(0)\delta X_i^c-J_{ij}\frac{d\theta_i}{dt}*\delta\frac{d\theta_j}{dt}+J_{ij}\dot{\theta}_j(0)\delta\theta_i \\
&+F_i*\delta X_i^c+M_i*\delta\theta_i \\
&=0
\end{aligned}\tag{4-34}$$

应用 Laplace 变换中卷积理论的分部积分公式：

$$m\frac{dX_i^c}{dt}*\delta\frac{dX_i^c}{dt}=m\frac{d^2X_i^c}{dt^2}*\delta X_i^c+m\dot{X}_i^c(0)\delta X_i^c\tag{4-35}$$

$$J_{ij}\frac{d\theta_i}{dt}*\delta\frac{d\theta_j}{dt}=\frac{d}{dt}(J_{ij}\frac{d\theta_j}{dt})*\delta\theta_i+J_{ij}\dot{\theta}_i(0)*\delta\theta_i\tag{4-36}$$

将(4-35)、(4-36)代入(4-34)，则得：

$$\begin{aligned}
&\delta\Pi_{G1}-\delta Q_G \\
&=(-m\frac{d^2X_i^c}{dt^2}+F_i)*\delta X_i^c+[-\frac{d}{dt}(J_{ij}\frac{d\theta_i}{dt})+M_i]*\delta\theta_i \\
&=0
\end{aligned}\tag{4-37}$$

由δX_i^c、$\delta\theta_i$的任意性，可得：

$$\begin{aligned}
&-m\frac{d^2X_i^c}{dt^2}+F_i=0 \\
&-\frac{d}{dt}(J_{ij}\frac{d\theta_i}{dt})+M_i=0
\end{aligned}\tag{4-38}$$

这便是卷积型一类变量拟变分原理的拟驻值条件。

4.6.2 两类变量的拟变分原理

单刚体两类变量的拟变分原理为：

$$
\begin{aligned}
&\delta\Pi_{G2}+\delta Q_G \\
&=\delta[\frac{1}{2}mv_i^c*v_i^c-mv_i^c(0)X_i^c-F_i*X_i^c \\
&+\frac{1}{2}J_{ij}\omega_j*\omega_i-J_{ij}\omega_j(0)\theta_i-M_i*\theta_i]+(X_i^c*\delta F_i+\theta_i*\delta M_i) \\
&=0
\end{aligned}
\tag{4-39}
$$

对其进行变分，得：

$$
\begin{aligned}
&mv_i^c*\delta v_i^c-mv_i^c(0)\delta X_i^c-F_i*\delta X_i^c \\
&+J_{ij}\omega_j*\delta\omega_i-J_{ij}\omega_j(0)\delta\theta_i-M_i*\delta\theta_i=0
\end{aligned}
\tag{4-40}
$$

先决条件(4-12)、(4-14)的变分为：

$$\delta v_i^c-\delta\frac{dX_i^c}{dt}=0 \tag{4-41}$$

$$\delta\omega_i-\delta\frac{d\theta_i}{dt}=0 \tag{4-42}$$

将(4-41)、(4-42)代入(4-40)，得：

$$
\begin{aligned}
&mv_i^c*\delta\frac{dX_i^c}{dt}-mv_i^c(0)\delta X_i^c-F_i*\delta X_i^c \\
&+J_{ij}\omega_j*\delta\frac{d\theta_i}{dt}-J_{ij}\omega_j(0)\delta\theta_i-M_i*\delta\theta_i=0
\end{aligned}
\tag{4-43}
$$

应用 Laplace 变换中卷积理论的分部积分公式：

$$mv_i^c*\delta\frac{dX_i^c}{dt}=m\frac{dv_i^c}{dt}*\delta X_i^c+mv_i^c(0)\delta X_i^c \tag{4-44}$$

$$J_{ij}\omega_j*\delta\frac{d\theta_i}{dt}=\frac{d}{dt}(J_{ij}\omega_j)*\delta\theta_i+J_{ij}\omega_j(0)\delta\theta_i \tag{4-45}$$

将(4-44)、(4-45)代入(4-43)，得：

$$(m\frac{dv_i^c}{dt}-F_i)*\delta X_i^c+[\frac{d}{dt}(J_{ij}\omega_j)-M_i]*\delta\theta_i=0 \tag{4-46}$$

由 δX_i^c、$\delta\theta_i$ 的独立性，可知：

$$
\begin{aligned}
& m\frac{dv_i^c}{dt}-F_i=0 \\
& \frac{d}{dt}(J_{ij}\omega_j)-M_i=0
\end{aligned}
\tag{4-47}
$$

式(4-47)与先决条件(4-12)、(4-14)构成了系统的基本方程。

4.6.3 两类变量的广义拟变分原理

两类变量的广义拟变分原理为：

$$
\begin{aligned}
& \delta\Pi_G-\delta Q \\
& =\delta\{\frac{1}{2}mv_i^c*v_i^c-mv_i^c*\frac{dX_i^c}{dt}+mv_i^c(0)X_i^c+F_i*X_i^c \\
& \quad +\frac{1}{2}J_{ij}\omega_i*\omega_j-J_{ij}\omega_j*\frac{d\theta_i}{dt}+J_{ij}\omega_j(0)\theta_i+M_i*\theta_i\} \\
& \quad -(X_i^c*\delta F_i+\theta_i*\delta M_i) \\
& =0
\end{aligned}
\tag{4-48}
$$

对其进行变分，得：

$$
\begin{aligned}
& mv_i^c*\delta v_i^c-mv_i^c*\delta\frac{dX_i^c}{dt}-m\frac{dX_i^c}{dt}*\delta v_i^c+mv_i^c(0)\delta X_i^c+F_i*\delta X_i^c \\
& +J_{ij}\omega_i*\delta\omega_j-J_{ij}\omega_j*\delta\frac{d\theta_i}{dt}-J_{ij}\frac{d\theta_i}{dt}*\delta\omega_j+J_{ij}\omega_j(0)\delta\theta_i+M_i*\delta\theta_i=0
\end{aligned}
\tag{4-49}
$$

将(4-44)、(4-45)代入上式，得：

$$
\begin{aligned}
& m(v_i^c-\frac{dX_i^c}{dt})*\delta v_i^c-(m\frac{dv_i^c}{dt}-F_i)*\delta X_i^c \\
& +J_{ij}(\omega_i-\frac{d\theta_i}{dt})*\delta\omega_j-[\frac{d}{dt}(J_{ij}\omega_j)-M_i]*\delta\theta_i=0
\end{aligned}
\tag{4-50}
$$

由于δv_i^c、δX_i^c、$\delta\omega_j$、$\delta\theta_i$均为独立变分，故有：

$$
\begin{aligned}
& m(v_i^c - \frac{dX_i^c}{dt}) = 0 \\
& m\frac{dv_i^c}{dt} - F_i = 0 \\
& J_{ij}(\omega_i - \frac{d\theta_i}{dt}) = 0 \\
& \frac{d}{dt}(J_{ij}\omega_j) - M_i = 0
\end{aligned}
\tag{4-51}
$$

由于$m>0$，J_{ij}为正定的，因此上式可以进一步写为

$$
\begin{aligned}
& v_i^c - \frac{dX_i^c}{dt} = 0 \\
& m\frac{dv_i^c}{dt} - F_i = 0 \\
& \omega_i - \frac{d\theta_i}{dt} = 0 \\
& \frac{d}{dt}(J_{ij}\omega_j) - M_i = 0
\end{aligned}
\tag{4-52}
$$

这便是两类变量广义拟变分原理的拟驻值条件。

4.7 应用举例

单刚体初值问题一类变量的拟变分原理为：

$$\delta\Pi_{G1} - \delta Q_G = 0 \tag{4-53}$$

其中，

$$
\begin{aligned}
\Pi_{G1} = & -\frac{1}{2}m\frac{dX_i^c}{dt} * \frac{dX_i^c}{dt} + m\dot{X}_i^c(0)X_i^c - \frac{1}{2}J_{ij}\frac{d\theta_i}{dt} * \frac{d\theta_j}{dt} + J_{ij}\dot{\theta}_j(0)\theta_i \\
& + F_i * X_i^c + M_i * \theta_i \\
\delta Q_G = & X_i^c * \delta F_i + \theta_i * \delta M_i
\end{aligned}
\tag{4-54}
$$

假设其完整约束条件为：

$$F(t, X_i^c, \theta_i) = 0 \tag{4-55}$$

将式(4-53)写成展开形式：

$$
\begin{aligned}
&\delta\Pi_{G1}-\delta Q_G \\
&=\delta\{-\frac{1}{2}m\frac{dX_i^c}{dt}*\frac{dX_i^c}{dt}+m\dot{X}_i^c(0)X_i^c-\frac{1}{2}J_{ij}\frac{d\theta_i}{dt}*\frac{d\theta_j}{dt}+J_{ij}\dot{\theta}_j(0)\theta_i \\
&+F_i*X_i^c+M_i*\theta_i\}-[X_i^c*\delta F_i+\theta_i*\delta M_i] \\
&=-m\frac{dX_i^c}{dt}*\delta\frac{dX_i^c}{dt}+m\dot{X}_i^c(0)\delta X_i^c-J_{ij}\frac{d\theta_i}{dt}*\delta\frac{d\theta_j}{dt}+J_{ij}\dot{\theta}_j(0)\delta\theta_i \\
&+F_i*\delta X_i^c+M_i*\delta\theta_i \\
&=0
\end{aligned}
\tag{4-56}
$$

其约束条件的变分式为：

$$
\delta F(t,X_i^c,\theta_i)=\frac{\partial F}{\partial X_i^c}\delta X_i^c+\frac{\partial F}{\partial\theta_i}\delta\theta_i=0 \tag{4-57}
$$

应用 Laplace 变换中卷积理论的分部积分公式

$$
m\frac{dX_i^c}{dt}*\delta\frac{dX_i^c}{dt}=m\frac{d^2X_i^c}{dt^2}*\delta X_i^c+m\dot{X}_i^c(0)\delta X_i^c \tag{4-58}
$$

$$
J_{ij}\frac{d\theta_i}{dt}*\delta\frac{d\theta_j}{dt}=\frac{d}{dt}(J_{ij}\frac{d\theta_j}{dt})*\delta\theta_i+J_{ij}\dot{\theta}_i(0)*\delta\theta_i \tag{4-59}
$$

将式(4-58)、(4-59)代入(4-56)，并且应用 Lagrange 乘子法将约束条件的变分式(4-57)纳入式(4-56)中，整理可得：

$$
\begin{aligned}
&\delta\Pi_{G1}-\delta Q_G \\
&=(-m\frac{d^2X_i^c}{dt^2}+F_i+\mu\frac{\partial F}{\partial X_i^c})*\delta X_i^c+[-\frac{d}{dt}(J_{ij}\frac{d\theta_i}{dt})+M_i+\mu\frac{\partial F}{\partial\theta_i}]*\delta\theta_i \\
&=0
\end{aligned}
\tag{4-60}
$$

由 δX_i^c、$\delta\theta_i$ 的任意性，可得：

$$
\begin{aligned}
&-m\frac{d^2X_i^c}{dt^2}+F_i+\mu\frac{\partial F}{\partial X_i^c}=0 \\
&-\frac{d}{dt}(J_{ij}\frac{d\theta_i}{dt})+M_i+\mu\frac{\partial F}{\partial\theta_i}=0
\end{aligned}
\tag{4-61}
$$

可见，应用变分原理来研究刚体动力学问题，便于将伺服约束和/或控制

约束[25,57]加入刚体力学系统。这是一个很大的优点。

4.8 本章小结

在分析动力学中，存在大量的初值问题，但很少有初值问题的变分原理和广义变分原理。本章尝试性建立了一类变量的单刚体动力学初值问题拟变分原理、两类变量的单刚体动力学初值问题拟变分原理、两类变量广义拟变分原理。推导了单刚体力学初值问题的拟变分原理的拟驻值条件。最后结合应用举例说明了应用变分原理来研究刚体动力学问题，便于将伺服约束和控制约束加入刚体力学系统。

结论

一、本文的工作：

刚体动力学在航空航天中有着相当广泛的应用，但由于经典的分析动力学侧重分析研究保守系统，而在航空航天运用中面对的大部分是非保守系统，且涉及的问题多数是初值问题。故作为基础并结合自己的专业本文针对单刚体动力学，运用变分变积方法尝试性建立了非保守分析力学的拟变分原理和广义拟变分原理、单刚体动力学的拟变分原理、单刚体动力学初值问题的拟变分原理。

本文首先介绍了变分与变积的相关理论知识。

其次，在进一步明确分析力学的基本方程的基础上尝试性建立了非保守系统拟 Hamilton 原理、与余 Hamilton 原理相对应的拟余 Hamilton 原理、卷积型拟势能原理以及卷积型拟余能原理。理论和算例表明，本文提到的非保守力的概念含义丰富，它既包括飞行器空气动力学和船舶流体力学中的阻力，也包括结构的内阻尼，还包括所谓的伴生力。

第三，尝试性建立了单刚体动力学的拟 Hamilton 原理、单刚体动力学两类变量的拟 Hamilton 原理、两类变量的单刚体动力学广义拟变分原理，并推导了各自的拟驻值条件。结合应用举例说明了应用拟变分原理来研究刚体动力学问题，便于将非完整约束加入刚体动力学系统。

第四，尝试性建立了一类变量的单刚体动力学初值问题拟变分原理、两类变量的单刚体动力学初值问题拟变分原理、两类变量广义拟变分原理。推导了单刚体力学初值问题的拟变分原理的拟驻值条件。结合应用举例说明了应用变分原理来研究刚体动力学问题，便于将伺服约束和/或控制约束加入刚体力学系统。

鉴于研究需要的工作量较大，文中还存在许多不足之处，所有这些期待在今后的研究工作中继续加以完善。

二、今后研究的展望：

航空航天及其它工程技术的发展需要使学者们越来越重视对非保守系统的研究，力学模型也由简单的刚体模型逐渐发展到多柔体系统模型。而变分法是研究力学、物理学和其他各种技术科学的强有力的工具，是建立数值计算方法的基础，因此对以上诸系统变分原理的研究是必不可少的。本文仅尝试性地针对单刚体建立刚体动力学的拟变分原理和广义拟变分原理，为研究刚体动力学提供一个新的有益的途径，还有许多有待进一步研究的课题，比如：

（1） 建立多刚体系统动力学的各类变分原理；

（2） 建立单柔体动力学的各类变分原理；

（3） 建立多柔体系统动力学的各类变分原理；

（4） 通过已有的拟变分原理建立相应的数值算法；

（5） 寻找更多的计算实例，进一步研究拟变分原理在工程中的应用；

（6） 完善和发展变积方法。

参考文献

[1] 刘延柱. 航天器姿态动力学. 北京：国防工业出版社，1995:2-10 页

[2] 黄文虎，邵成勋. 多柔体系统动力学. 北京：科学出版社，1996:3-16 页

[3] Roberson R E and Wittenburg J. A dynamics formalism for an arbitrary number of interconnected rigid bodies , with refernce to the problem of satellite control. 3rd IFAC, 1966, Proc. London, 1968:46D. 2-46P

[4] 刘延柱，洪嘉振，杨海兴. 多刚体系统动力学. 北京：高等教育出版，1989:15-82 页

[5] 休斯顿，刘又午. 多体系统动力学. 天津：天津大学出版社，1991:65-78 页

[6] J.维藤伯格著，谢传锋译. 多刚体系统动力学. 北京：北京航空学院出版社，1986：1-27 页

[7] 袁士杰. 多刚体系统动力学. 北京：北京理工大学出版社，1992:1-367 页

[8] 胡海昌，胡闰莓. 变分学 . 中国建筑工业出版社，1987:10-25 页

[9] 梁立孚. 变分原理及其应用 . 哈尔滨工程大学出版社等五个出版社联合出版(国防科工委十五规划专著)，2005:7-24 页

[10] 梁立孚，章梓茂. 推导弹性力学变分原理的一种凑合法—反逆法. 哈尔滨船舶工程学院学报(第三、四期连载) . 1985，6(3):86-95 页，6(4):1-13 页

[11] 梁立孚，石志飞. 关于变分学中逆问题的研究. 应用数学和力学. 1994，15(9)：775-788 页

[12] 梁立孚，石志飞. 粘性流体力学的变分原理和广义变分原理. 应用力学学报. 1993，10(1)：119-123 页

[13] 石志飞，杜善义. 饱和多孔介质耦合系统的几类变分原理. 固体力学学报. 1998，19(2)：176-179 页

[14] 梁立孚，胡海昌. 一般力学中三类变量的的广义变分原理. 中国科学(A) . 2000，30(12)：1130-1135 页

[15] 梁立孚，刘殿魁，宋海燕. 非保守系统的两类变量的广义拟变分原理研究. 中国科学(G) . 2005，35(2)：202-210 页

[16] 盛冬发，程昌钧，扶名福. 损伤粘弹性力学的广义变分原理及其应用. 应用数学和力学. 2004，25{4}：345-353 页

[17] 梁立孚，罗恩，冯晓九. 分析力学初值问题的一种变分原理形式. 力学学报. 2007，39(1): 106-111 页

[18] Neimark Ju I, Fufaev N A, Dynamics of nonholonomic systems, Providence: American Mathematical Society, 1972:69-83P

[19] L.A.Pars, A Treatise on Analytical Dynamics, Heinemann Press, London, 1965:26-73P

[20] Leonard Meirovitch, Methods of analytical dynamics, New York: McGraw-Hill Book Company, 1970:43-79P

[21] Rosonberg R.M., Analytical dynamics of discrete systems, New York: Pleum Press, 1977:71-102P

[22] Greenwood D.T., Classical dynamics, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J.07632.1997:39-151P

[23] 梅凤翔. 高等分析力学 . 北京：北京理工大学出版社，1991:52-121 页

[24] V.I.Arnold, Dynamical System, Springer Press, 1988:79-135P

[25] 陈滨. 分析动力学 . 北京：北京大学出版社，1987:33-67 页

[26] 钱伟长. 对合变换和薄板弯曲问题的多变量变分原理. 应用数学和力学. 1985，6(1)：25-46 页

[27] R.克拉夫和 J.彭津著，王光远等译校. 结构动力学 . 高等教育出版社，2006：1-65 页

[28] Likins P W.Dynamic analysis of system of hinge-connected rigid bodies with non-rigid appendages.Int.J Solids and Structures.1973, 9(12):1473-1487P

[29] Kane T R, Levinson D A.Formulation of equations of motion for complex spacecraft.J Guidance and Control.1980, 3(2):99-112P

[30] Bodley C S.A digiu1 computer program for the dynamic interaction simulation of control and structure.NASA TP-1219, 1978:89-102P

[31] Shabana A A.Dynamics of multi-body system.New York: John Wiley & Sons, 1989:90-111P

[32] 马兴瑞，王本利，苟兴宇. 航天器动力学——若干问题进展及应用. 北京：科学出版社，2001：1-55 页

[33] 刘延柱. 刚体动力学理论和应用. 上海交通大学出版社，2006：15-23 页

[34] 陆佑方. 柔性多体系统动力学 . 北京:高等教育出版社，1996：1-27 页

[35] 胡海昌. 弹性力学的变分原理及其应用 . 北京：科学出版社，1981：11-53 页

[36] K.马格努斯. 贾书惠等译. 陀螺理论与应用 . 国防工业出版社，1983：1-55 页

[37] 陆元九. 陀螺与惯性导航原理 . 科学出版社，1966：1-28 页

[38] Reissner E, On a variational theorem in elasticity, Journal of Mathematics and Physics , 1950, 29(2)90-98P

[39] 胡海昌，论弹性体力学与受范性体力学中的一般变分原理，物理学报，1954, 10(3)：259-289 页

[40] Washizu K, On the variational principles of elasticity and plasticity, Massachusetts Institute of Technology, Technical Report：25-18P, March 1955

[41] Rumyantsev V.V. 梅凤翔译，欧拉和力学的变分原理，力学进展，1993，23(1)：86-105 页

[42] 朱如曾，非完整力学的第二类、第一类和中间类型变分原理，中国科学，1999，29（1)：49-54 页

[43] 梁立孚，应用 Lagrange 乘子法推导一般力学中的广义变分原理，中国科学，1999，29（12)：1102-1108 页

[44] 梁立孚，胡海昌，一般力学中三类变量的广义变分原理，中国科学（A)，2000，30（12)：1130-1135 页

[45] Gurtin M.E., Variationnal principles for elastodynamics, Arch.Rat.Mech., 1964, 16L:34-50 页

[46] 罗恩，关于线性动力学中各种 Gurtin 型变分原理，中国科学（A)，1987，(9)：936-948 页

[47] 罗恩，邝尚君. 压电热弹性动力学的一些基本原理，中国科学（A)，1999，29（9)：851-860 页

[48] 罗恩，邝尚君，黄伟江，罗志国. 非线性耦合热弹性动力学的非传统型变分原理，中国科学，A 辑，2002，(4)：337-347 页

[49] 罗恩，黄伟江，张贺沂. 相空间非传统型变分原理与辛算法，中国科学，A 辑，2002，(12)：1120-1126 页

[50] 罗恩，邝尚君. 微孔压电热弹性动力学的能量原理，力学学报，2001，33（2)：195-204 页

[51] 罗恩，朱慧坚. 有限变形弹性动力学的 Gurtin 型变分原理，固体力学学报，2003，24（1）：1-7 页

[52] Leipholz H.Direct Variational Methods and Eigenvalue Problems in Engineering.Leyden: Noordhoff 1Int.Publ.1977, 1271-1385P

[53] Leipholz H.On some developments in direct methods of the calculus of variations.Appl Mech Rev, 1987, 40(10): 1379-1392P

[54] 刘殿魁，张其浩. 弹性理论中非保守问题的一般变分原理. 力学学报，1981，（6）：562-570 页

[55] 黄玉盈，王武久. 弹性非保守系统的拟固有频率变分原理及其应用，固体力学学报，1987,8（2）：127-136 页

[56] 梁立孚，罗恩，刘殿魁，非保守弹性动力学初值问题的简单 Gurtin 型拟变分原理，固体力学学报，28（3）：224-228 页

[57] 梅凤翔. 分析力学专题，北京工业学院出版社，1988：1-57 页

[58] 宋海燕. 非保守系统的拟变分原理及其应用. 哈尔滨：哈尔滨工程大学博士学位论文，2005：1-130 页

[59] 赵汉元. 飞行器再入动力学和制导 . 长沙：国防科技大学出版社，1997：23-97 页

[60] C.Fernandes, L.Gurvits, Z.X.Li .Optional nonholonomic motion planning for a falling cat.Z.X.Li and J.F.Canny.Boston：Kluwer Academic Publishers, 1993:379-421P

[61] 刘暾，赵钧. 空间飞行器动力学 . 哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2003：6-24 页

[62] 吴迪光. 变分法 . 北京：高等教育出版社，1987:12-52 页

[63] 梅凤翔. 分析力学基础 . 西安：西安交通大学出版社，1987：199-206 页

[64] 汪家禾. 分析力学 . 北京：高等教育出版社，1982:31-53 页

[65] 钱伟长. 变分法及有限元 . 北京：科学出版社，1980:1-37 页

[66] 钱伟长. 广义变分原理 . 上海：知识出版社，1985:1-40 页

[67] 付宝连. 弹性力学中的能量原理及其应用 . 北京：科学出版社，2004:314-401 页

[68] 孙海滨，刘婷婷. 分析力学的创立者——拉格朗日. 物理与工程. 2005，15(5):53-55 页

[69] 梅凤翔. 非完整力学基础. 北京：北京工业学院出版社，1985:121-155 页

[70] 梅凤翔. 非完整力学研究. 北京：北京工业学院出版社，1987:120-151 页

[71] 赵跃宇. 分析力学的新型变分原理. 湘潭大学自然科学学报. (4), 1986:1-7 页

[72] 赵跃宇. 力学的新型变分原理及其应用. 北京工业学院硕士论文，1987:13-20 页

[73] 刘延柱. 陀螺力学. 科学出版社. 1986:1-8 页

[74] 王大钧，曲广吉. 工程力学进展 . 北京大学出版社，1998:11-45 页

[75] 梁立孚. 惯性力——真实力. 哈尔滨船舶工程学院学报，1986，(2): 14-22 页

[76] 贾书惠. 刚体动力学. 高等教育出版社. 1987:1-4 页

[77] 贾书惠. 约束系统动力学方程的建立. 第三次全国一般力学学术会议，重庆，1984:1-8 页

攻读硕士学位期间发表的论文及取得的科研成果

参加导师的国家自然科学基金资助项目（10272034）;博士点基金资助课题（20060217020）;哈尔滨工程大学基础研究基金资助项目（HEUF04003）

致谢

本论文能够顺利完成，首先要感谢我的恩师梁立孚教授在两年的学习期间给予的悉心指导和谆谆教诲。梁老师严谨的治学态度、渊博的学识和丰富的科研经验、高尚的人品以及默默无闻、教书育人的奉献精神使我受益匪浅，终生难忘！值此论文完稿之际，谨向我的导师——梁立孚教授，表示崇高的敬意和衷心的感谢！

感谢建筑工程学院的领导和全体老师，感谢他们在研究生阶段对我无微不至的关怀。

感谢同学们对我的帮助，与他们的友谊是我一生中最宝贵的精神财富。

感谢我的家人在我硕士学习阶段给予我的关心与支持！