

论文分类号 0322

单位代码 10183

研究生学号 2004312102

吉 林 大 学
硕 士 学 位 论 文

分数幂非线性振子的解析逼近解

**Analytical Approximate Solutions to Fractional-Power
Nonlinear Oscillators**

作者姓名：张 廷 全

专 业：流体力学

导师姓名

及 职 称： 吴 柏 生 教 授

学位类别：理学硕士

论文起止年月：2006年4月至2007年4月

吉林大学硕士学位论文原创性声明

本人郑重声明：所呈交的硕士学位论文，是本人在指导教师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已经注明引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品成果。对本文的研究做出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本人完全意识到本声明的法律结果由本人承担。

学位论文作者签名：张廷全

日期： 2007 年 4 月 24 日

作者姓名	张廷全	论文分类号	O322
		研究生学号	2004312102
学位类别	理学硕士	授予学位单位	吉林大学
专业名称	流体力学	培养单位 (院、所、中心)	数学研究所
研究方向	非线性振动	学习时间	2004年9月 至2007年7月
论文中文题目	分数幂非线性振子的解析逼近解		
论文英文题目	Analytical Approximate Solutions to Fractional-Power Nonlinear Oscillators		
关键词(3-8个)	牛顿谐波平衡法; 分数幂振子; 解析逼近解		
导师情况	姓名	吴柏生	职称 教授
	学历学位	博士	工作单位 吉林大学
论文提交日期	2007年4月20日	答辩日期	2007年5月25日
是否基金资助项目	否	基金类别及编号	
如已经出版, 请填写以下内容			
出版地(城市 名、省名)		出版者(机构)名称	
出版日期		出版者地址(包括邮 编)	

提 要

本文灵活应用牛顿谐波平衡法建立了分数幂振子的解析逼近周期解。首先对分数幂非线性振子的控制方程做适当的变形,然后利用牛顿谐波平衡法求解变形后的控制方程,这样仅需简单的运算即可建立分数幂振子高精度的解析逼近周期和周期解。

利用符号计算软件编写了相应的求解程序,实现了分数幂振子解析逼近周期解求解的自动化。与传统的手工推导相比,提高了计算效率和计算准确性。

关键词: 牛顿谐波平衡法; 分数幂振子; 解析逼近解

Keywords: Newton-harmonic balance method; Fractional-power oscillators; Analytical approximation

目 录

第一章 绪 论	1
1.1 研究背景	1
1.2 谐波平衡法及其改进	2
1.3 本文主要工作	3
第二章 牛顿谐波平衡法	4
2.1 问题描述	4
2.2 牛顿谐波平衡法	4
第三章 分数幂振子的解析逼近解	8
3.1 问题描述	8
3.2 非线性振子 $\ddot{u} + \text{sign}(u) u ^{1/3} = 0$ 的解析逼近解	8
3.3 非线性振子 $\ddot{u} + \text{sign}(u) u ^{2/3} = 0$ 的解析逼近解	10
3.4 非线性振子 $\ddot{u} + \text{sign}(u) u ^{3/4} = 0$ 的解析逼近解	12
3.5 一般分数幂非线性振子的解析逼近解	14
结论	19
参考文献	20
摘要	
Abstract	
致谢	

第一章 绪 论

1.1 研究背景

振动是自然科学和工程技术中普遍存在的物理现象。这些振动问题，一小部分可以利用线性微分方程描述，绝大部分需用非线性微分方程描述。数学上求解线性微分方程的通用理论和方法已经非常成熟，但是，对于任意的非线性微分方程的通用性质却知之甚少。对于某些特殊情况，用线性化的微分方程代替非线性微分方程，能够给出原非线性振动问题的一些有用结果。但多数情况下，这种线性化是不合理的，只能直接研究非线性振动系统。

非线性振动的研究始于 19 世纪后期。庞加莱(H. Poincaré)等人做过奠基性的工作。对非线性振动问题的研究，特别是对工程技术中出现的非线性振动问题，一般从两方面进行分析。一是实验研究。实验不但可以验证理论，而且对一些复杂的振动系统能直接得到规律性的结论，是进一步发展理论的基础。另一方面是理论研究，这是非线性振动研究的主要方面。理论研究主要有定性和定量两种方法。定量方法有数值解法和解析方法。解析解能提供解的显式表达，允许人们直接讨论参数和初始条件对解的影响。解析方法是一类重要的方法。然而，实际问题能够求出精确解析解的极少，通常只能建立非线性振动系统的解析逼近解。

目前，在非线性振动中最普遍使用的解析逼近方法是摄动法[1-4]，包括，L-P 摄动法、平均法、KBM 法、多尺度法等。摄动法是为解具有小参数的问题，即主要用于弱非线性系统。可是，许多问题不包含小参数。另外，即使有这样的参数，由摄动法得到的解析逼近解也仅有一个小的有效范围。小参数限制了摄动法的应用。在某些情况下，人们可以应用谐波

平衡(HB)法[1-4]得到具有奇非线性恢复力单自由度保守系统周期和周期解的解析逼近, 这些逼近甚至对相当大的振幅也是有效的。

下面简要介绍谐波平衡法及其各种改进的谐波平衡法。

1.2 谐波平衡法及其改进

谐波平衡(HB)法[1-4]是求非线性振动问题解析逼近周期解的经典方法。该方法用截断的 Fourier 级数逼近非线性微分方程的解。它的突出特点是不要求非线性微分方程中非线性项是小量, 即不要求方程中含有小参数。它主要有以下两方面的缺点: 一是在建立高阶解析逼近周期解时需解析求解复杂的非线性代数方程组, 这是难于做到的; 二是要求非线性系统中恢复力为位移的奇函数, 否则该方法在求低阶解析逼近周期解时会导致矛盾[5, 6]。

为克服上面的缺点, 一些学者给出了改进的谐波平衡法。如, 无限制谐波平衡法[7]; 有理谐波平衡法[8]; 基于雅克比椭圆函数表示的谐波平衡法[9]; 两时间尺度谐波平衡法[10]等。此外, Lau et al. [11] 提出了增量谐波平衡(IHB)法, 该方法最初用来求解结构的周期振动问题。然而, IHB 方法是半数值半解析的且方法本身不能提供初始解。Wu et al. [12] 提出了线性化谐波平衡(LHB)法, 该方法先将非线性方程关于位移线性化, 再用谐波平衡法解线性化后的方程。目前, LHB 方法已成功求解了一系列非线性振动问题[13-16]。然而, LHB 方法[12-16]难于建立高阶的解析逼近周期解, 这是因为该方法在建立高阶逼近解时需解析求解复杂的关于频率的非线性代数方程。关于 IHB 方法和 LHB 方法的详细叙述请读者参阅文[17, 18]。

最近, Wu et al. [19] 提出了构造强非线性振动系统解析逼近周期解的牛顿谐波平衡(NHB)法, 该方法是通过组合牛顿(线性化)方法和谐波平衡法得到的。NHB 方法是(近似)二次收敛的, 仅需几步简单的迭代即可建立高精度的解析逼近解, 每步只需解简单的线性代数方程组而不是非线性代数方程组。NHB 方法已用于研究非线性 jerk 方程[20], Duffing-Harmonic 振子[21], 连接在可伸展的弹性金属丝中点的质点运动方程[22]等强非线性振动问题。需要指出的是, 这些改进的谐波平衡法[12-16, 19-22]仍需恢复力是位移的奇函数。为进一步改进谐波平衡法, Wu et al.分别通过选择合适的初始逼近[23]和拆分[24, 25]两种技术将 LHB 方法和 NHB 方法推广到一般非线性振动系统。

1.3 本文主要工作

本文灵活应用牛顿谐波平衡法建立了分数幂振子的解析逼近周期解。首先对分数幂振子的控制方程做适当的变形, 然后利用牛顿谐波平衡法求解变形后的控制方程, 这样仅需简单的操作即可建立高精度的解析逼近解。给出的解析逼近解, 简单易用。

第二章 牛顿谐波平衡法

2.1 问题描述

考虑下面的非线性振动系统

$$\ddot{u} + f(u) = 0, \quad u(0) = A, \quad \dot{u}(0) = 0 \quad (2.1)$$

式中，“·”表示对时间 t 求导，恢复力函数 $-f(u)$ 是 u 的奇函数，即 $f(-u) = -f(u)$ ，当 $u \neq 0$ 时 $uf(u) > 0$ 。显然， $u = 0$ 为系统的平衡点，系统将在对称区间 $[-A, A]$ 内振动。

本章回顾建立奇非线性振动系统(2.1)解析逼近周期和周期解的牛顿谐波平衡法[19]。

2.2 牛顿谐波平衡法

引入新的变量 $\tau = \omega t$ ，则方程(2.1)化为

$$\Omega u'' + f(u) = 0, \quad u(0) = A, \quad u'(0) = 0. \quad (2.2)$$

式中，“'”表示对新变量 τ 求导且 $\Omega = \omega^2$ 。新变量 τ 的选取使得方程(2.2)的解是关于 τ 的以 2π 为周期的周期函数。非线性振动的频率 $\omega = \sqrt{\Omega}$ ，周期 $T = 2\pi/\omega$ 及周期解 $u(\tau)$ 都依赖于初始振幅 A 。由于 $f(u)$ 是 u 的奇函数，故方程(2.2)的周期解 $u(\tau)$ 的Fourier级数表示中，仅有 τ 的奇数乘子存在，即

$$u(\tau) = \sum_{m=1}^{\infty} h_m \cos(2m-1)\tau. \quad (2.3)$$

利用单项谐波平衡法，取方程(2.2)的初始逼近为

$$u_1(\tau) = A \cos \tau. \quad (2.4)$$

基于奇函数假设 $f(-u) = -f(u)$, $f(A \cos \tau)$ 可展开为如下 Fourier 级数

$$f(A \cos \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} \cos(2n-1)\tau \quad (2.5)$$

式中

$$a_{2n-1} = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(A \cos \tau) \cos(2n-1)\tau d\tau, \quad n=1, 2, \dots \quad (2.6)$$

将式(2.4)和(2.5)代入方程(2.2), 把结果方程展为 Fourier 级数, 再令 $\cos \tau$ 项的系数为零, 有

$$a_1 - A\Omega = 0. \quad (2.7)$$

解方程(2.7), 得

$$\Omega_1(A) = a_1/A. \quad (2.8)$$

于是, 得方程(2.1)的第一个解析逼近周期和周期解为

$$T_1(A) = 2\pi/\sqrt{\Omega_1(A)}, \quad u_1(t) = A \cos \tau, \quad \tau = \sqrt{\Omega_1(A)} t. \quad (2.9)$$

下面结合牛顿方法和谐波平衡法建立方程(2.2)的第二个解析逼近解。首先由牛顿方法, 将方程(2.2)的周期解 $u(\tau)$ 和频率的平方 $\Omega(A)$ 表示为

$$u = u_1 + \Delta u_1, \quad \Omega = \Omega_1 + \Delta \Omega_1 \quad (2.10)$$

式中 u_1 , Ω_1 为解的主要部分, Δu_1 , $\Delta \Omega_1$ 为解的校正部分且 Δu_1 为 τ 的 2π 周期函数。把式(2.9)代入方程(2.2), 再将结果方程关于 Δu_1 和 $\Delta \Omega_1$ 线性化, 得

$$\begin{aligned} \Omega_1 u_1'' + f(u_1) + \Delta \Omega_1 u_1'' + \Omega_1 \Delta u_1'' + f'_u(u_1) \Delta u_1 &= 0, \\ \Delta u_1(0) = 0, \quad \Delta u_1'(0) &= 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

式中, 下角标 u 表示函数 f 对 u 求导, 待求的 Δu_1 和 $\Delta \Omega_1$ 可由谐波平衡法

确定。由 $f_u(-u) = f_u(u)$ ，得 $f_u(u_1)$ 的Fourier展开级数为

$$f_u(u_1) = \frac{b_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n} \cos 2n\tau \quad (2.12)$$

式中

$$b_{2(n-1)} = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} f_u(u_1) \cos 2(n-1)\tau d\tau, \quad n=1, 2, \dots \quad (2.13)$$

为了获得第二个解析逼近解，可令满足方程(2.11)中初条件的 $\Delta u_1(\tau)$ 为

$$\Delta u_1(\tau) = x_1(\cos \tau - \cos 3\tau). \quad (2.14)$$

将式(2.5)，(2.9)，(2.12)和(2.14)代入方程(2.11)，把结果方程展为 Fourier 级数，再令 $\cos \tau$ 和 $\cos 3\tau$ 项的系数分别为零，有

$$2a_1 - 2A\Omega_1 + (b_0 - b_4 - 2\Omega_1)x_1 - 2A\Delta\Omega_1 = 0, \quad (2.15)$$

$$(b_2 + b_4 - b_0 - b_6 + 18\Omega_1)x_1 + 2a_3 = 0. \quad (2.16)$$

解关于 x_1 和 $\Delta\Omega_1$ 的线性代数方程组(2.15)和(2.16)，得

$$\begin{aligned} x_1(A) &= -2a_3 A^2 / \Phi(A), \\ \Delta\Omega_1(A) &= -a_3 [(b_0 - b_4)A - 2a_1] / \Phi(A) \end{aligned} \quad (2.17)$$

式中

$$\Phi(A) = A[(b_2 + b_4 - b_0 - b_6)A + 18a_1].$$

因此，方程(2.1)的第二个解析逼近周期和周期解为

$$\begin{aligned} T_2(A) &= 2\pi / \sqrt{\Omega_2(A)}, \quad \Omega_2(A) = \Omega_1(A) + \Delta\Omega_1(A), \\ u_2(t) &= u_1(\tau) + \Delta u_1(\tau) = X(A)\cos \tau + Y(A)\cos 3\tau, \quad \tau = \sqrt{\Omega_2(A)} t \end{aligned} \quad (2.18)$$

式中

$$X(A) = A + x_1(A), \quad Y(A) = -x_1(A).$$

重复上面的过程，每步仅需解简单的线性代数方程组即可建立更高阶

的解析逼近解。需要指出的是，牛顿谐波平衡法是否能够成功应用的一个关键问题是恢复力函数的Fourier系数是否能够求出或易于求出。对于恢复力函数的Fourier系数难于求出或不能求出的问题，可以考虑将控制方程变形后再利用牛顿谐波平衡法求解。

第三章 分数幂振子的解析逼近解

3.1 问题描述

在研究单自由度保守系统的非线性振动问题时,会遇到恢复力为分数幂形式的非线性振动问题[16, 26-30]。

文[16, 28, 29]考虑的分数幂振子为

$$\ddot{u} + \text{sign}(u)|u|^p = 0, u(0) = A, \dot{u}(0) = 0 \quad (0 < p < 1) \quad (3.1)$$

式中, $p = n/m$ 为真分数, 如 $p = 3/4, 2/3, 1/3 \dots$

尽管分数幂形式恢复力的 Fourier 系数可以通过某些技巧直接求出 [16], 但通常运算是较复杂的。本章先将分数幂振动方程变形, 然后利用牛顿谐波平衡法建立其解析逼近周期与周期解。

下面分别以 $p = 1/3$, $p = 2/3$ 和 $p = 3/4$ 为例具体介绍牛顿谐波平衡方法在分数幂振子中的应用。

3.2 非线性振子 $\ddot{u} + \text{sign}(u)|u|^{1/3} = 0$ 的解析逼近解

考虑下面的方程[16]

$$\ddot{u} + \text{sign}(u)|u|^{1/3} = 0. \quad (3.2)$$

引入新的变量 $\tau = \omega t$, 则方程(3.2)变形为

$$\Omega(u'')^3 + u = 0, u(0) = A, u'(0) = 0. \quad (3.3)$$

式中, “'”表示对新变量 τ 求导, $\Omega = \omega^6$ 。新变量 τ 的选取使得方程(3.3)的解是关于 τ 的以 2π 为周期的周期函数, 相应的原非线性振动的频率

$\omega = \Omega^{1/6}$ ，周期 T 及周期解 $u(\tau)$ 都依赖于振幅 A 。

利用单项谐波平衡法，取满足方程(3.3)的初始逼近为

$$u_1(\tau) = A \cos \tau. \quad (3.4)$$

将式(3.4)代入方程(3.3)，把结果方程展为 Fourier 级数，再令 $\cos \tau$ 项的系数为零，可解得

$$\Omega_1(A) = \frac{4}{3A^2}. \quad (3.5)$$

于是，方程(3.2)的第一个解析逼近周期和周期解为

$$T_1 = 2\pi/\Omega_1^{1/6}, u_1(t) = A \cos \tau, \tau = \Omega_1^{1/6}t. \quad (3.6)$$

下面结合牛顿方法和谐波平衡法建立方程(3.3)的第二个解析逼近解。首先由牛顿方法，将方程(3.3)的周期解 $u(\tau)$ 和频率的六次方 $\Omega(A)$ 表示为

$$u = u_1 + \Delta u_1, \Omega = \Omega_1 + \Delta \Omega_1 \quad (3.7)$$

式中 u_1 ， Ω_1 为解的主要部分， Δu_1 ， $\Delta \Omega_1$ 为解的校正部分且 Δu_1 为 τ 的 2π 周期函数。把式(3.7)代入方程(3.3)，再将结果方程关于 Δu_1 和 $\Delta \Omega_1$ 线性化，得

$$(\Omega_1 + \Delta \Omega_1)(u_1'')^3 + 3\Omega_1(u_1'')^2 \Delta u_1'' + u_1 + \Delta u_1 = 0, \Delta u_1(0) = 0, \Delta u_1'(0) = 0. \quad (3.8)$$

式中，待求的 Δu_1 和 $\Delta \Omega_1$ 将由谐波平衡法确定。为此，取满足方程(3.8)中初条件的 $\Delta u_1(\tau)$ 为

$$\Delta u_1(\tau) = x_1(\cos \tau - \cos 3\tau). \quad (3.9)$$

将式(3.6)，(3.9)代入方程(3.8)，把结果方程展为 Fourier 级数，再令 $\cos \tau$ 和 $\cos 3\tau$ 项的系数分别为零，有

$$28x_1 - 3A^3\Delta\Omega_1 = 0, \quad (3.10a)$$

$$196x_1 - A(4 + 3A^2\Delta\Omega_1) = 0. \quad (3.10b)$$

解关于 x_1 和 $\Delta\Omega_1$ 的线性代数方程组(3.10), 得

$$x_1 = \frac{A}{41}, \quad \Delta\Omega_1 = \frac{28}{123A^2}. \quad (3.11)$$

因此, 方程(3.2)的第二个解析逼近周期和周期解为

$$T_2 = 2\pi/\Omega_2^{1/6}, \quad \Omega_2(A) = \frac{64}{41A^2},$$

$$u_2(t) = u_1(\tau) + \Delta u_1(\tau) = X(A)\cos\tau + Y(A)\cos 3\tau, \quad \tau = \Omega_2^{1/6} t. \quad (3.12)$$

式中

$$X = \frac{42A}{41}, Y = -\frac{A}{41}.$$

3.3 非线性振子 $\ddot{u} + \text{sign}(u)|u|^{2/3} = 0$ 的解析逼近解

考虑下面的方程

$$\ddot{u} + \text{sign}(u)|u|^{2/3} = 0. \quad (3.13)$$

引入新的变量 $\tau = \omega t$, 将方程(3.13)变形为

$$\Omega(u'')^3 + \text{sign}(u)u^2 = 0, u(0) = A, u'(0) = 0 \quad (3.14)$$

式中, “'”表示对新变量 τ 求导, $\Omega = \omega^6$ 。新变量 τ 的选取使得方程(3.14)的解是关于 τ 的以 2π 为周期的周期函数, 相应的原非线性振动的频率 $\omega = \Omega^{1/6}$, 周期 T 及周期解 $u(\tau)$ 都依赖于振幅 A 。

利用单项谐波平衡法, 取方程(3.14)的初始逼近为

$$u_1(\tau) = A\cos\tau. \quad (3.15)$$

将式(3.15)代入方程(3.14)，把结果方程展为 Fourier 级数，再令 $\cos \tau$ 项的系数为零，得

$$\Omega_1(A) = \frac{32}{9A\pi}. \quad (3.16)$$

于是，得方程(3.13)的第一个解析逼近周期和周期解为

$$T_1 = 2\pi/\Omega_1^{1/6}, u_1(t) = A \cos \tau, \tau = \Omega_1^{1/6}t. \quad (3.17)$$

下面结合牛顿方法和谐波平衡法建立方程(3.14)的第二个解析逼近解。首先由牛顿方法，将方程(3.14)的周期解 $u(\tau)$ 和频率的六次方 $\Omega(A)$ 表示为

$$u = u_1 + \Delta u_1, \Omega = \Omega_1 + \Delta \Omega_1 \quad (3.18)$$

式中 u_1, Ω_1 为解的主要部分， $\Delta u_1, \Delta \Omega_1$ 为解的校正部分且 Δu_1 为 τ 的 2π 周期函数。把式(3.18)代入方程(3.14)，再将结果方程关于 Δu_1 和 $\Delta \Omega_1$ 线性化，得

$$\begin{aligned} (\Omega_1 + \Delta \Omega_1)(u_1'')^3 + 3\Omega_1(u_1'')^2 \Delta u_1'' + \text{sign}(u_1)u_1'^2 + 2|u_1| \Delta u_1 &= 0, \\ \Delta u_1(0) = 0, \Delta u_1'(0) &= 0. \end{aligned} \quad (3.19)$$

式中，待求的 Δu_1 和 $\Delta \Omega_1$ 将由谐波平衡法确定。为此，取满足方程(3.19)中初条件的 $\Delta u_1(\tau)$ 为

$$\Delta u_1(\tau) = x_1(\cos \tau - \cos 3\tau). \quad (3.20)$$

将式(3.17)，(3.20)代入方程(3.19)，把结果方程展为 Fourier 级数，再令 $\cos \tau$ 和 $\cos 3\tau$ 项的系数分别为零，有

$$160A - 45A^2\pi\Omega_1 - 45A\pi\Delta\Omega + (256 + 270A\pi\Omega_1)x_1 = 0, \quad (3.21a)$$

$$224A - 105A^2\pi\Omega_1 - 105A\pi\Delta\Omega + 5(-256 + 1071A\pi\Omega_1)x_1 = 0. \quad (3.21b)$$

解关于 x_1 和 $\Delta \Omega_1$ 的线性代数方程组(3.21)，得

$$x_1 = \frac{448A}{-5632 + 14175A\pi\Omega_1}, \quad (3.22a)$$

$$\Delta\Omega_1 = \frac{262144 - 880800A\pi\Omega_1 + 212625A^2\pi^2\Omega_1^2}{84480A\pi - 212625A^2\pi^2\Omega_1}. \quad (3.22b)$$

因此，方程(3.13)的第二个解析逼近周期和周期解为

$$T_2 = 2\pi/\Omega_2^{1/6}, \Omega_2(A) = \frac{80288}{20985A\pi},$$

$$u_2(t) = u_1(\tau) + \Delta u_1(\tau) = X(A)\cos\tau + Y(A)\cos 3\tau, \tau = \Omega_2^{1/6}t. \quad (3.23)$$

式中

$$X = \frac{1413A}{1399}, Y = -\frac{14A}{1399}.$$

3.4 非线性振子 $\ddot{u} + \text{sign}(u)|u|^{3/4} = 0$ 的解析逼近解

考虑下面的方程

$$\ddot{u} + \text{sign}(u)|u|^{3/4} = 0. \quad (3.24)$$

引入新的变量 $\tau = \omega t$ ，再将方程(3.24)改写成如下形式

$$\Omega(u'')^4 - |u|^3 = 0, u(0) = A, u'(0) = 0 \quad (3.25)$$

式中，“'”表示对新变量 τ 求导， $\Omega = \omega^8$ 。新变量 τ 的选取使得方程(3.24)

的解是关于 τ 的以 2π 为周期的周期函数。原非线性振动的频率 $\omega = \Omega^{1/8}$ ，

周期 T 及周期解 $u(\tau)$ 都依赖于振幅 A 。

利用单项谐波平衡法，取方程(3.25)的初始逼近为

$$u_1(\tau) = A\cos\tau. \quad (3.26)$$

将式(3.26)代入方程(3.25)，把结果方程展为Fourier级数，再常数项为零，

得

$$\Omega_1(A) = \frac{32}{9A\pi}. \quad (3.27)$$

于是，方程(3.24)的第一个解析逼近周期和周期解为

$$T_1 = 2\pi/\Omega_1^{1/8}, u_1(t) = A \cos \tau, \tau = \Omega_1^{1/8}t. \quad (3.28)$$

下面结合牛顿方法和谐波平衡法建立方程(3.25)的第二个解析逼近解。首先由牛顿方法，将方程(3.25)的周期解 $u(\tau)$ 和频率的八次方 $\Omega(A)$ 表示为

$$u = u_1 + \Delta u_1, \Omega = \Omega_1 + \Delta \Omega_1 \quad (3.29)$$

式中 u_1, Ω_1 为解的主要部分， $\Delta u_1, \Delta \Omega_1$ 为解的校正部分且 Δu_1 为 τ 的 2π 周期函数。把式(3.29)代入方程(3.25)，再将结果方程关于 Δu_1 和 $\Delta \Omega_1$ 线性化，得

$$\begin{aligned} (\Omega_1 + \Delta \Omega_1)(u_1'')^4 + 4\Omega_1 (u_1'')^3 \Delta u_1'' - |u_1|^3 - 3\text{sign}(u_1)u_1^2 \Delta u_1 &= 0, \\ \Delta u_1(0) = 0, \Delta u_1'(0) &= 0. \end{aligned} \quad (3.30)$$

式中，待求的 Δu_1 和 $\Delta \Omega_1$ 可由谐波平衡法确定。为了获得第二个解析逼近解，可令满足方程(3.30)中初条件的 $\Delta u_1(\tau)$ 为

$$\Delta u_1(\tau) = x_1(\cos \tau - \cos 3\tau). \quad (3.31)$$

将式(3.28)和(3.31)代入方程(3.30)，把结果方程展开为Fourier级数，再令常数项和 $\cos 2\tau$ 项的系数为零，有

$$-1664A^2x_1 + 45\pi A^4\Delta\Omega_1 = 0, \quad (3.32a)$$

$$112A - 26336x_1 + 315\pi A^2\Delta\Omega = 0. \quad (3.32b)$$

解关于 x_1 和 $\Delta\Omega_1$ 的线性代数方程组(3.32)，得

$$x_1 = \frac{7A}{918}, \quad \Delta\Omega_1 = \frac{5824}{20655A\pi}. \quad (3.33)$$

因此，方程(3.24)的第二个解析逼近周期和周期解为

$$T_2 = 2\pi/\Omega_2^{1/8},$$

$$u_2(t) = u_1(\tau) + \Delta u_1(\tau) = X(A)\cos\tau + Y(A)\cos 3\tau, \quad \tau = \Omega_2^{1/8} t \quad (3.34)$$

式中

$$\Omega_2(A) = \frac{79264}{20655A\pi}, \quad X = \frac{925A}{918}, \quad Y = -\frac{7A}{918}.$$

3.5 一般分数幂非线性振子的解析逼近解

下面讨论方程(3.1)在一般情形下的求解，我们将之分为以下两种情况讨论

1) 当 m 为奇数时，方程(3.1)变为

$$\Omega(u'')^m + \text{sign}(u)|u|^n = 0, \quad u(0) = A, \quad u'(0) = 0 \quad (3.35)$$

式中，“'”表示对新变量 τ 求导， $\Omega = \omega^{2m}$ 。求解过程与 $p = 1/3$ 和 $p = 2/3$ 相同。需要注意的是，方程(3.35)相应的线性化方程为

$$(\Omega_k + \Delta\Omega_k)(u_k'')^m + m\Omega_k(u_k'')^{m-1}\Delta u_k'' + \text{sign}(u_k)|u_k|^n + n|u_k|^{n-1}\Delta u_k = 0,$$

$$\Delta u_k(0) = 0, \Delta u_k'(0) = 0. \quad (3.36)$$

2) 当 m 为偶数时，方程(3.1)变为

$$\Omega(u'')^m - |u|^n = 0, \quad u(0) = A, \quad u'(0) = 0. \quad (3.37)$$

式中，“'”表示对新变量 τ 求导， $\Omega = \omega^{2m}$ 。求解过程与 $p = 3/4$ 相同。需要注意的是，方程(2.36)相应的线性化方程为

$$(\Omega_k + \Delta\Omega_k)(u_k'')^m + m\Omega_k(u_k'')^{m-1}\Delta u_k'' - |u_k|^n - n\text{sign}(u_k)|u_k|^{n-1}\Delta u_k = 0,$$

$$\Delta u_k(0) = 0, \Delta u_k'(0) = 0. \quad (3.38)$$

直接积分方程(3.1)得下面的精确周期 T_e [31]

$$T_e(A) = \frac{4\sqrt{2(1-p)}\pi\Gamma\left(\frac{1}{p+1}\right)A^{\frac{1-p}{2}}}{(1-p)\Gamma\left(\frac{1-p}{2+2p}\right)}. \quad (3.39)$$

式中， $\Gamma(\cdot)$ 表示伽玛函数。

将解析逼近周期 T_1 和 T_2 与精确周期 T_e (3.39)的比列于表3.1。表3.1表明各解析逼近周期都有很高的逼近精度。

表 3.1 各解析逼近周期与精确周期的比较

p	$T_e/A^{(1-p)/2}$	T_1/T_e	T_2/T_e
3/4	6.13019	1.00922	0.999639
5/7	6.10813	1.01889	1.00257
2/3	6.07863	1.01255	1.00025
3/5	6.03718	1.02195	1.00049
1/2	5.97467	0.990007	0.993446
3/7	5.92979	1.03596	0.998399
1/3	5.86966	1.02034	0.993880
1/4	5.81679	1.01103	0.973650
1/5	5.78495	1.03626	0.985695
1/6	5.76368	1.02737	0.964364
1/7	5.74847	1.04690	0.983110
1/8	5.73705	1.03885	0.963546
1/9	5.72816	1.05453	0.984296
1/10	5.72105	1.04729	0.966687
1/11	5.71522	1.06032	0.987365

取 $A=1$ 。将 $p=3/4$, $p=2/3$, $p=1/2$, $p=1/3$, $p=1/4$ 和 $p=1/5$ 对应的精确周期解 $u_e(t)$ [数值积分方程(3.1)]和各解析逼近周期解 $u_1(t)$ 和 $u_2(t)$ 在一个精确周期内的值画于图3.1-3.6中。这些图表明解析逼近周期解 $u_2(t)$ 都有较高的逼近精度。

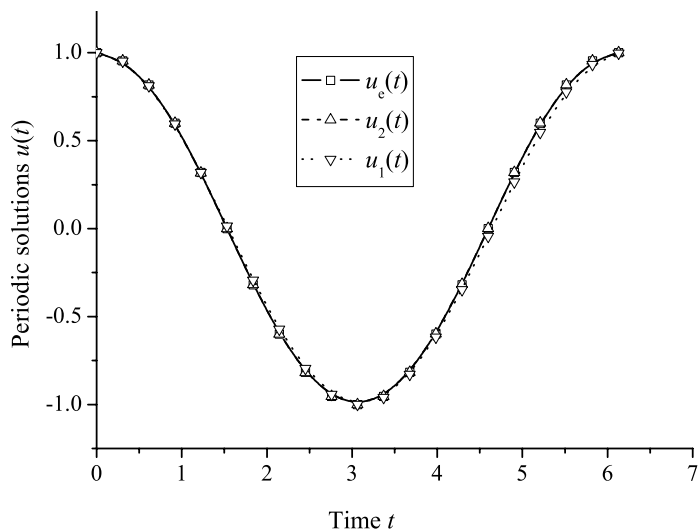


图 3.1 各解析逼近周期解和精确周期解的比较 ($p=3/4, A=1$)。

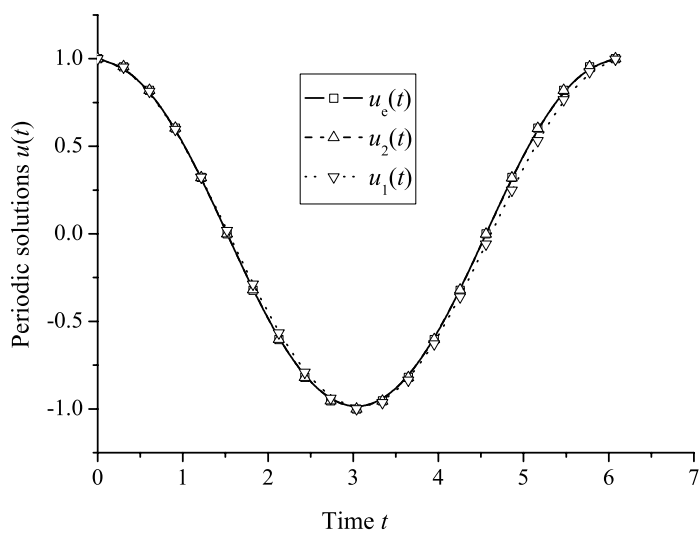


图 3.2 各解析逼近周期解和精确周期解的比较 ($p=2/3, A=1$)。

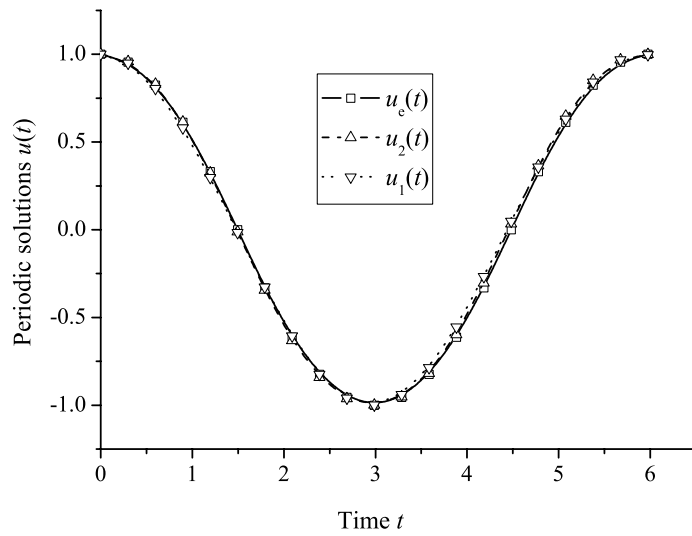


图 3.3 各解析逼近周期解和精确周期解的比较 ($p = 1/2, A = 1$)。

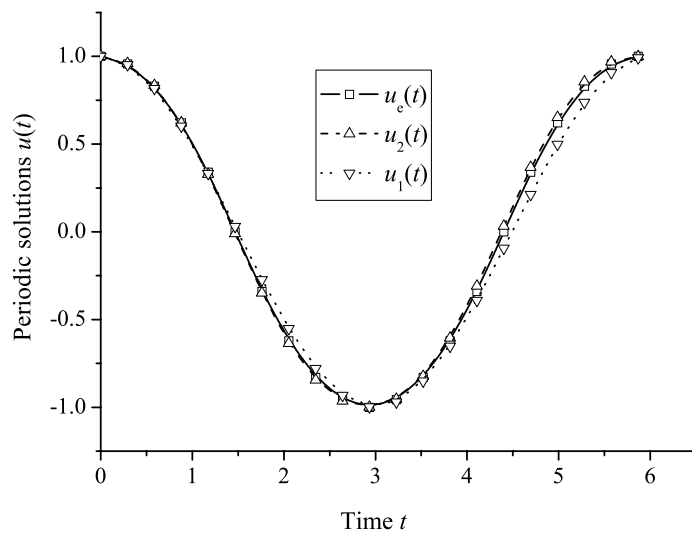


图 3.4 各解析逼近周期解和精确周期解的比较 ($p = 1/3, A = 1$)。

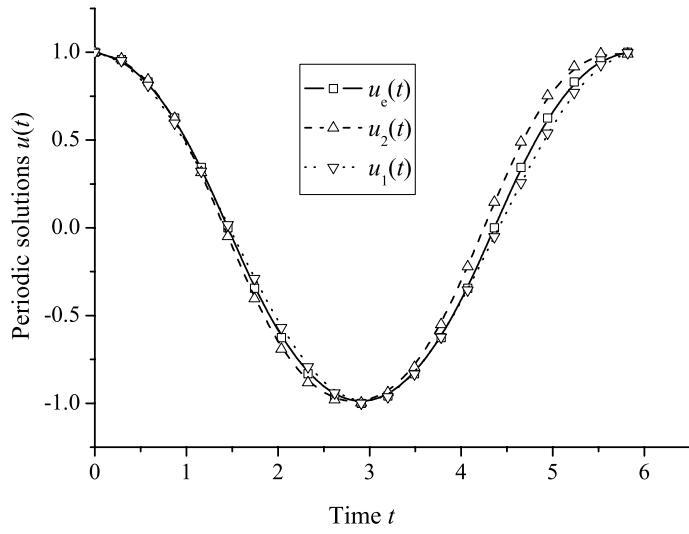


图 3.5 各解析逼近周期解和精确周期解的比较 ($p = 1/4, A = 1$)。

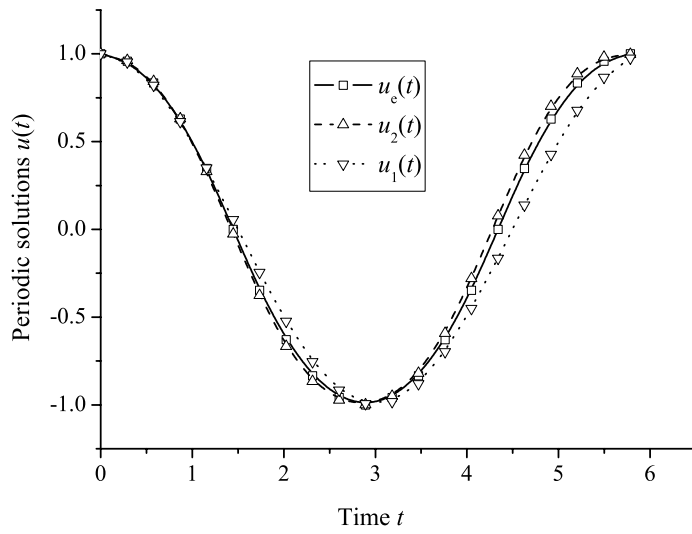


图 3.6 各解析逼近周期解和精确周期解的比较 ($p = 1/5, A = 1$)。

结 论

本文灵活应用牛顿谐波平衡法建立了分数幂振子的解析逼近周期和周期解。首先对分数幂振子的控制方程做适当的变形，然后利用牛顿谐波平衡法求解变形后的控制方程，即可通过简单的运算建立分数幂振子相应的解析逼近解。

给出的解析逼近解不仅形式简单且在 $p < 1$ 并靠近 1 时都有很高的逼近精度。但在 $p \ll 1$ 时，给出的逼近解精度不高，需要进一步的研究。

参考文献

- [1] Stoker J.J., *Nonlinear Vibrations in Mechanical and Electrical Systems*, Inter-science, New York, 1950.
- [2] Nayfeh A.H., Mook D.T., *Nonlinear Oscillations*, Wiley Inter-science, New York, 1979.
- [3] Mickens R.E., *Oscillations in Planar Dynamic Systems*, World Scientific, Singapore, 1996.
- [4] 陈予恕, *非线性振动*, 高等教育出版社, 北京, 2002 年.
- [5] Mickens R.E., Comments on the method of harmonic-balance, *Journal of Sound and Vibration*, 1984, 94, 456-460.
- [6] Rao A.V., Rao B.N., Some remarks on the harmonic-balance method for mixed-parity nonlinear oscillations, *Journal of Sound and Vibration*, 1994, 170, 571-576.
- [7] Seelig F.F., Unrestricted harmonic-balance—a general method to evaluate periodic structures in time and—or space of arbitrary stability for non-linear chemical-reaction and reaction-diffusion systems. 1. Theory and computer-program for time-dependent systems, *Zeitschrift fur Naturforschung section A*, 1980, 35, 1054-1061.
- [8] Mickens R.E., A generalization of the method of harmonic balance, *Journal of Sound and Vibration*, 1986, 111, 515-518.
- [9] Yuste S.B., Comments on the method of harmonic-balance in which Jacobi elliptic functions are used, *Journal of Sound and Vibration*, 1991, 145, 381-390.
- [10] Summers J.L., Savage M.D., Two timescale harmonic-balance. 1. Application to autonomous one-dimensional nonlinear oscillators, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A*, 1992, 340, 473-501.

- [11]Lau S.L., Cheung Y.K., Amplitude incremental variational principle for nonlinear vibration of elastic system, *Journal of Applied Mechanics*, ASME, 1981, 48, 959-964.
- [12]Wu B.S., Li P.S., A method for obtaining approximate analytic periods for a class of nonlinear oscillators, *Meccanica*, 2001, 36, 167-176.
- [13]Lim C.W., Wu B.S., He L.H., A new approximate analytical approach for dispersion relation of the nonlinear Klein-Gordon equation, *Chaos*, 2001, 11, 843-848.
- [14]Wu B.S., Lim C.W., He L.H., A new method for approximate analytic solutions to nonlinear oscillations of nonnatural systems, *Nonlinear Dynamics*, 2003, 32,1-13.
- [15]Lim C.W., Wu B.S., A new analytical approach to the Duffing-harmonic oscillator, *Physics Letters A*, 2003, 311, 365–373.
- [16]Lim C.W., Wu B.S., Accurate higher-order approximations to frequencies of nonlinear oscillators with fractional powers, *Journal of Sound and Vibration*, 2005, 281, 1157-1162.
- [17]李鹏松, *求解大振幅非线性振动问题的若干解析逼近方法*, 吉林大学博士学位论文, 长春, 2004 年.
- [18]陈树辉, *强非线性振动系统的定量分析方法*, 科学出版社, 北京, 2006.
- [19]Wu B.S., Sun W.P. , Lim C.W., An analytical approximate technique for a class of strongly non-linear oscillators, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2006, 41(6-7), 766-774.
- [20]Wu B.S., Lim C.W., Sun W.P., Improved harmonic balance approach to periodic solutions of non-linear jerk equations, *Physics Letters A*, 2006, 354(1-2), 95-100.
- [21]Lim C.W., Wu B.S., Sun W.P., Higher accuracy analytical approximations to the Duffing-harmonic oscillator, *Journal of Sound and Vibration*, 2006, 296(4-5), 1039-1045.

- [22] Sun W.P., Wu B.S., Lim C.W., Approximate analytical solutions for oscillation of a mass attached to a stretched elastic wire, *Journal of Sound and Vibration*, 2007, 300(3-5), 1042-1047.
- [23] Wu B.S., Li P.S., A new approach to nonlinear oscillations, *Journal of Applied Mechanics*, ASME, 2001, 68, 951-952.
- [24] Wu B.S., Lim C.W., Large amplitude nonlinear oscillations of a general conservative system, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2004, 39, 859-870.
- [25] Sun W.P., Wu B.S., Accurate analytical approximate solutions to general strong nonlinear oscillators, *Nonlinear Dynamics*, 2007. DOI 10.1007/s11071-007-9210-9.
- [26] Mickens R.E., Oscillations in an $x^{4/3}$ potential, *Journal of Sound and Vibration*, 2001, 246, 375-378.
- [27] Hu H., Xiong, Z.G., Oscillations in an $x^{(2m+2)/(2n+1)}$ potential, *Journal of Sound and Vibration*, 2003, 259(4), 977-980.
- [28] Gottlieb H.P.W., Frequencies of oscillators with fractional-power nonlinearities, *Journal of Sound and Vibration*, 2003, 261, 557-566.
- [29] Pilipchuk V.N., Oscillators with a generalized power-form elastic term, *Journal of Sound and Vibration*, 2004, 270, 470-472.
- [30] Hu H., Solutions of nonlinear oscillators with fractional powers by an iteration procedure, *Journal of Sound and Vibration*, 2006, 294, 608-614.
- [31] Jeffrey A., *Handbook of Mathematical Formulas and Integrals*, Academic Press, San Diego, 1995.

摘 要

解析(逼近)解能够提供解的显式表示,允许人们直接讨论初始条件以及参数对解的影响。解析逼近方法是研究非线性振动系统的重要方法。在非线性振动系统中最普遍使用的解析逼近方法是摄动法,摄动法是为解具有小参数的问题,即主要用于弱非线性系统。可是,许多问题不包含小参数。另外,即使有这样的参数,由摄动法得到的解析逼近解也仅有一个小的有效范围。小参数限制了摄动法的应用。在某些情况下,人们可以应用谐波平衡法得到具有奇非线性恢复力单自由度保守系统周期和周期解的解析逼近,这些逼近甚至对相当大的振幅也是有效的。然而,谐波平衡法难于给出高精度解析逼近解,这是因为它们在建立高阶逼近解时需解析求解复杂的非线性代数方程(组)。

牛顿谐波平衡法是一种改进的谐波平衡法,它的突出优点是仅需解简单的线性代数方程组而不是非线性代数方程组,即可建立非线性振动问题的高精度解析逼近周期和周期解。本文利用牛顿谐波平衡法建立了分数幂振子的解析逼近解。

考虑恢复力为分数幂形式的振动方程

$$\ddot{u} + \text{sign}(u)|u|^p = 0, u(0) = A, \dot{u}(0) = 0 \quad (0 < p < 1) \quad (1)$$

式中, $p = n/m$ 为真分数, 如 $p = 3/4, 2/3, 1/3 \dots$

引入新变量 $\tau = \omega t$, 方程(1)可变形为

$$\Omega(u'')^m - [-\text{sign}(u)]^m |u|^n = 0, u(0) = A, \dot{u}(0) = 0 \quad (2)$$

式中(')表示对 τ 求导, $\Omega = \omega^{2m}$ 。新变量 τ 的选取使得方程(2)的解是关于 τ 的以 2π 为周期的周期函数, 相应的原非线性振动的周期为 $T = 2\pi/\omega$, 周

期解 $u(\tau)$ 及频率 ω 都与振幅 A 有关。

1. m 为奇数

当 m 为奇数时, 方程(2)可以化为

$$\Omega(u'')^m + \text{sign}(u)|u|^n = 0, u(0) = A, u'(0) = 0. \quad (3)$$

利用单项谐波平衡法, 取方程(2)的初始逼近为

$$u_1(\tau) = A \cos \tau. \quad (4)$$

将式(4)代入方程(3), 把结果方程展开为Fourier级数, 再令 $\cos \tau$ 项的系数为零, 得关于 Ω 的代数方程, 解得 Ω 的第一个逼近 Ω_1 。

这样, 得方程(3)的第一个解析逼近周期和周期解为

$$T_1 = 2\pi/\Omega_1^{1/(2m)}, u_1(t) = A \cos \tau, \tau = \Omega_1^{1/(2m)}t. \quad (5)$$

下面结合牛顿方法和谐波平衡法建立方程(3)的高阶解析逼近解。首先由牛顿方法, 将方程(3)的周期解 $u(\tau)$ 和频率的 $2m$ 次方 $\Omega(A)$ 表示为

$$u = u_k + \Delta u_k, \Omega = \Omega_k + \Delta \Omega_k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (6)$$

式中 u_k, Ω_k 为解的主要部分, $\Delta u_k, \Delta \Omega_k$ 为解的校正部分且 Δu_k 为 τ 的 2π 周期函数。把式(6)代入方程(3), 再将结果方程关于 Δu_k 和 $\Delta \Omega_k$ 线性化, 得

$$\begin{aligned} (\Omega_k + \Delta \Omega_k)(u_k'')^m + m\Omega_k (u_k'')^{m-1} \Delta u_k'' + \text{sign}(u_k)|u_k|^n + n|u_k|^{n-1} \Delta u_k &= 0, \\ \Delta u_k(0) = 0, \Delta u_k'(0) &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

式中, 待求的 Δu_k 和 $\Delta \Omega_k$ 将由谐波平衡法确定。

方程(7)中的 $\Delta u_k(\tau)$ 取为

$$\Delta u_k(\tau) = \sum_{i=1}^k x_i \{ \cos[(2i-1)\tau] - \cos[(2i+1)\tau] \}. \quad (8)$$

将式(8)代入方程(7), 令 $\cos \tau, \cos 3\tau, \dots, \cos(2k+1)\tau$ 项的系数分别为零, 得关于 x_1, x_2, \dots, x_k 和 $\Delta \Omega_k$ 的线性代数方程组, 解之即可建立方程(3)的第 $k+1$ 阶解析逼近周期和周期解。

2. m 为偶数

当 m 为偶数时, 方程(2)可以化为

$$\Omega(u'')^m - |u|^n = 0, u(0) = A, u'(0) = 0. \quad (9)$$

利用单项谐波平衡法, 取方程(9)的初始逼近为

$$u_1(\tau) = A \cos \tau. \quad (10)$$

将式(10)代入方程(9), 把结果方程展为Fourier级数, 再令常数项为零, 得关于 Ω 的代数方程, 解得 Ω 的第一个逼近 Ω_1 。

这样, 得方程(9)的第一个解析逼近周期和周期解为

$$T_1 = 2\pi/\Omega_1^{1/(2m)}, u_1(t) = A \cos \tau, \tau = \Omega_1^{1/(2m)} t. \quad (11)$$

下面结合牛顿方法和谐波平衡法建立方程(9)的高阶解析逼近解。首先由牛顿方法, 将方程(9)的周期解 $u(\tau)$ 和频率的 $2m$ 次方 $\Omega(A)$ 表示为

$$u = u_k + \Delta u_k, \Omega = \Omega_k + \Delta \Omega_k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (12)$$

式中 u_k, Ω_k 为解的主要部分, $\Delta u_k, \Delta \Omega_k$ 为解的校正部分且 Δu_k 为 τ 的 2π 周期函数。把式(12)代入方程(9), 再将结果方程关于 Δu_k 和 $\Delta \Omega_k$ 线性化, 得

$$(\Omega_k + \Delta \Omega_k)(u_k'')^m + m\Omega_k (u_k'')^{m-1} \Delta u_k'' - |u_k|^n - n \text{sign}(u_k) |u_k|^{n-1} \Delta u_k = 0,$$

$$\Delta u_k(0) = 0, \Delta u_k'(0) = 0. \quad (13)$$

式中，待求的 Δu_k 和 $\Delta \Omega_k$ 将由谐波平衡法确定。

方程(13)中的 $\Delta u_k(\tau)$ 取为

$$\Delta u_k(\tau) = \sum_{i=1}^k x_i \{ \cos[(2i-1)\tau] - \cos[(2i+1)\tau] \}. \quad (14)$$

将式(14)代入方程(13)，令常数项, $\cos 2\tau, \cos 4\tau, \dots, \cos 2k\tau$ 项的系数分别为零，得关于 x_1, x_2, \dots, x_k 和 $\Delta \Omega_k$ 的线性代数方程组，解之即可建立方程(9)的第 $k+1$ 阶解析逼近周期和周期解。

由此可见，建立分数幂非线性振子解析逼近周期和周期解的过程简单可行。给出的解析逼近周期和周期解在 $p < 1$ 且靠近1时都是有效的。

Abstract

Analytical (approximate) solutions can supply explicit expressions of the solution and allow the direct discussion of the influence of parameters and initial conditions on the solution. The analytical approximate methods are important methods. The perturbation method is one of the most commonly used analytical techniques for solving nonlinear oscillations with a small parameter. However, the use of perturbation theory in many important practical problems is invalid, or it simply breaks down for parameters beyond a certain specified range. In many cases, one can apply the harmonic balance method to determine analytical approximate periods and periodic solutions to the conservative single-degree-of-freedom nonlinear oscillation systems with odd nonlinearity, even these analytical approximations are valid for larger amplitude. However, applying the method of harmonic balance to construct higher-order approximate analytical solutions is very difficult, since it requires analytical solution of algebraic equation(s) with very complex nonlinearity.

Newton-harmonic balance method is an improved HB method. The most interesting features of the Newton-harmonic balance method are that it can be used to construct analytical periods and periodic solutions with high accuracy, and requires solution of simple linear algebraic equations only instead of nonlinear algebraic equations without analytical solution. In this paper, analytical approximations to the fractional power nonlinear oscillators are constructed.

Consider the following nonlinear equation

$$\ddot{u} + \text{sign}(u)|u|^p = 0, u(0) = A, \dot{u}(0) = 0 \quad (p < 1) \quad (1)$$

where $p = n/m$ is a fraction, such as $p = 3/4, 2/3, 1/3 \dots$

By introducing an independent variable $\tau = \omega t$, and Eq.(1) can be rewritten as

$$\Omega(u'')^m - [-\text{sign}(u)]^m |u|^n = 0, u(0) = A, \dot{u}(0) = 0. \quad (2)$$

where a prime represents derivative with respect to τ , and $\Omega = \omega^{2m}$. The new independent variable is chosen in such a way that the solution to Eq.(2) is a periodic function of τ of period 2π . The corresponding period of the nonlinear oscillation is given by $T = 2\pi/\omega$. Here, both the periodic solution $u(\tau)$ and frequency ω depend on A .

1. m is odd

Equation (2) can be rewritten as

$$\Omega(u'')^m + \text{sign}(u)|u|^n = 0, u(0) = A, u'(0) = 0. \quad (3)$$

Following the single term HB method, we first set

$$u_1(\tau) = A \cos \tau \quad (4)$$

which satisfies the initial conditions in Eq.(3). Substituting Eq.(4) into Eq. (3), and setting the coefficient of $\cos \tau$ to zero. Solving the equation in unknown Ω yields the first analytical approximation Ω_1 of Ω . Hence we get the initial approximation of Eq.(3) as

$$T_1 = 2\pi/\Omega_1^{1/(2m)}, u_1(t) = A \cos \tau, \tau = \Omega_1^{1/(2m)} t. \quad (5)$$

We can obtain further approximate solutions to Eq.(3) by combining Newton's method with the harmonic balance method. The periodic solution $u(\tau)$ and $2m$ power of frequency ω of Eq.(3) can be expressed as

$$u = u_k + \Delta u_k, \Omega = \Omega_k + \Delta \Omega_k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (6)$$

where Δu_k is the correction part to be determined later, they are periodic functions of τ of period 2π . Substituting Eq.(6) into Eq.(3), and linearizing the resulting equation with respect to the correction terms Δu_k and $\Delta \Omega_k$ yield

$$(\Omega_k + \Delta\Omega_k)(u_k'')^m + m\Omega_k(u_k'')^{m-1}\Delta u_k'' + \text{sign}(u_k)|u_k|^n + n|u_k|^{n-1}\Delta u_k = 0, \quad (7)$$

$$\Delta u_k(0) = 0, \Delta u_k'(0) = 0.$$

The HB method will again be applied to solve Eq.(7) for Δu_k and $\Delta\Omega_k$.

The $\Delta u_k(\tau)$ in Eq.(7) can be set as

$$\Delta u_k(\tau) = \sum_{i=1}^k x_i \left\{ \cos[(2i-1)\tau] - \cos[(2i+1)\tau] \right\}. \quad (8)$$

Substituting Eq.(8) into Eq.(7), and setting the coefficient of $\cos\tau, \cos 3\tau, \dots, \cos(2k+1)\tau$ to zeros. We can get the linear algebra equations with unknowns x_1, x_2, \dots, x_k and $\Delta\Omega_k$, from which we can obtain the $(k+1)$ th analytical approximate periods and periodic solutions.

2 m is even

For this case, Eq. (2) can be rewritten as

$$\Omega(u'')^m - |u|^n = 0, u(0) = A, u'(0) = 0. \quad (9)$$

Following the single term HB method, we first set

$$u_1(\tau) = A \cos \tau \quad (10)$$

which satisfies the initial conditions in Eq.(9). Substituting Eq. (10) into Eq.(9), and setting the constant term to zero. Solving the equation in unknown Ω , one gets the first analytical approximation Ω_1 of Ω . Hence we get the initial approximation to Eq. (9) as

$$T_1 = 2\pi/\Omega_1^{1/(2m)}, u_1(t) = A \cos \tau, \tau = \Omega_1^{1/(2m)}t. \quad (11)$$

We can achieve further approximate solutions by combing Newton's method and the harmonic balance method. The periodic solution and $2m$ power of frequency ω of Eq. (2) can be expressed as

$$u = u_k + \Delta u_k, \Omega = \Omega_k + \Delta\Omega_k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (12)$$

where Δu_k is the correction part to be determined later, they are periodic functions of τ of period 2π . Substituting Eq.(12) into Eq.(9), and linearizing the resulting equation with respect to the correction terms Δu_k and $\Delta \Omega_k$ yield

$$(\Omega_k + \Delta \Omega_k)(u_k'')^m + m\Omega_k (u_k'')^{m-1} \Delta u_k'' - |u_k|^n - n \text{sign}(u_k) |u_k|^{n-1} \Delta u_k = 0, \quad (13)$$

$$\Delta u_k(0) = 0, \Delta u_k'(0) = 0.$$

The HB method will again be applied to solve Eq.(13) for Δu_k and $\Delta \Omega_k$.

The $\Delta u_k(\tau)$ in Eq.(13) can be set as

$$\Delta u_k(\tau) = \sum_{i=1}^k x_i \{ \cos[(2i-1)\tau] - \cos[(2i+1)\tau] \}. \quad (14)$$

Substituting Eq.(14) into Eq.(13), and setting the constant term and the coefficient of $\cos 2\tau, \cos 4\tau, \dots, \cos 2k\tau$ to zeros, we can get the linear algebra equations with unknowns x_1, x_2, \dots, x_k and $\Delta \Omega_k$, from which we can obtain the $(k+1)$ th analytical approximate periods and periodic solutions.

It should be clear that the procedures of constructing approximate solutions to fractional power nonlinear oscillators mentioned above are very simple. These analytical approximations are valid for all fractions $p < 1$ and near to 1.

致 谢

本文是在我的导师吴柏生教授的悉心指导下完成的。首先对尊敬的吴老师表示诚挚的感谢和崇高的敬意。在本人攻读硕士学位期间，导师不仅在学业方面给予了详尽的指导，而且在生活方面也给予了无微不至的关怀与帮助。导师严肃的科学态度、严谨的治学精神、渊博的知识以及高尚的品德，使我深深佩服，并从中获益匪浅，是我一生仿效的楷模。

衷心感谢力学教研室的全体老师给予我的关心和帮助。

衷心感谢我的师兄李正光、孙维鹏及我的所有师兄、师姐和诸位同学，他们给予了我多方面的帮助。

谨以此论文献给我的父母和所有帮助我完成学业的亲人，是他们给我战胜困难的勇气和继续前行的动力。感谢一起学习、生活的好友们，总在我最需要的时候给予无私的帮助。

2007年4月15日